Q1 L'insieme numerico $X_\alpha = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup [\alpha, \alpha + 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

- a) non ha punti interni, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
- b) ha esattamente due punti di accumulazione, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
- c) ha minimo se e soltanto se $\alpha \leq -1$
- d) ha massimo se e soltanto se $\alpha \geq 0$

Q2 Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 2}{3^x - 3}$

- a) è uguale a $\frac{\log 2}{\log 3}$
- b) è uguale a $\frac{1}{2}$
- c) è uguale a $+\infty$
- d) non esiste

Q3 La condizione $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$

- a) è necessaria e sufficiente
- b) è necessaria ma non sufficiente
- c) è sufficiente ma non necessaria
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + b_n \right)$ sia convergente

Q4 La derivata della funzione x^{x+1} è uguale a

- a) x^x
- b) $x^x(x \log x + x + 1)$
- c) $e^{x+1} \log x \left[\log x + \frac{x+1}{x} \right]$
- d) $e^{(x+1) \log x} \left[\frac{1}{x} + x + 1 \right]$

Q5 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N}$. Allora:

- a) la successione $\{b_n\}$ converge ad un numero $\ell \in [0, 1]$
- b) la successione $\{b_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente ad un numero $\ell \in [0, 1]$
- c) per ogni $\ell \in [0, 1]$ esiste sottosuccessione $\{b_{k_n}\}$ di $\{b_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{k_n} = \ell$
- d) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Q6 L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} dx$

- a) è uguale a $[x \log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$
- b) è minore di $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2$

c) è minore dell'integrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{x}{\cos x} dx$

- d) non esiste

ESEMPIO 5

E1 Trovare le radici quarte del numero complesso $-\frac{1}{64}(1+i)^8$ e scriverle in forma algebrica.

E2 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}$$

- trovarne il dominio, indicandone i punti di frontiera e quelli isolati, e gli eventuali asintoti;
- calcolarne le derivate prima e seconda, trovarne gli eventuali punti a tangente verticale e studiarne la monotonia e la convessità;
- disegnarne il grafico.

E3 Trovare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda^{n^2}}{\sqrt{n^2 + (-1)^n n + 1}} - \frac{(-1)^n}{n} \right]$$

è convergente. Provare inoltre che vi è un solo valore di λ per il quale la convergenza è assoluta.

D1 Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Sice che la retta di equazione $x = 5$ è tangente al grafico della funzione f se ... (completare la definizione)

D2 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama maggiorante dell'insieme $X \dots$, massimo dell'insieme $X \dots$, estremo superiore dell'insieme $X \dots$ (completare le definizioni)

D3 Enunciare la regola di integrazione indefinita per parti.

P1 Enunciare e dimostrare il teorema sul prodotto di due funzioni derivabili.

P2 Provare che una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

P3 Provare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.