ANALISI MATEMATICA 1

(Ingegneria Industriale, corsi A e B)

Esempi di prove scritte

Rispondere ai quesiti a risposta multipla **Qi**, risolvere gli esercizi **Ei**, enunciare le definizioni **Di** e svolgere le dimostrazioni **Pi**.

Il requisito minimo per superare l'esame è: rispondere correttamente a **quattro quesiti**, risolvere **completamente un esercizio**, enunciare correttamente **una definizione** e svolgere in maniera compiuta **una dimostrazione**

- Q1** L'insieme $X = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
- non ha punti di accumulazione
 - non ha punti interni
 - non ha massimo
 - ha infiniti punti di accumulazione

- Q2** La derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{sen}^3 x|}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

nel punto $x_0 = 0$

- non esiste perché il rapporto incrementale diverge a $+\infty$
 - non esiste perché la derivata sinistra e la derivata destra sono diverse
 - esiste ed è uguale a 0
 - esiste ed è uguale a $\frac{1}{2}$
- Q3** Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. La condizione $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}a_n = 1$
- è necessaria e sufficiente
 - è necessaria ma non sufficiente
 - è sufficiente ma non necessaria
 - non è né necessaria né sufficiente
- affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente.

- Q4** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Dire che: “5 non è un punto di accumulazione per X ” vuol dire che

- $\forall \delta > 0 \implies]5 - \delta, 5 + \delta[\cap X \subseteq \{5\}$
- $\exists \delta > 0 :]5 - \delta, 5 + \delta[\cap X = \emptyset$
- $\exists \delta > 0 :]5 - \delta, 5 + \delta[\cap X = \{5\}$
- $\exists \delta > 0 :]5 - \delta, 5 + \delta[\cap X \subseteq \{5\}$

- Q5** La funzione $\operatorname{arctg}(e^x - x + 2)$ è

- strettamente crescente in $\mathbb{R}$
- limitata inferiormente ma non superiormente
- limitata superiormente e dotata di massimo
- limitata inferiormente e dotata di minimo

- Q6** La funzione $xe^{x|x|}$

- ha come primitiva la funzione $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x|x|} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}e^{x|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- ha come primitiva la funzione $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2} & \text{se } x > 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

- non ha primitive in $\mathbb{R}$
- ha primitive in $\mathbb{R}$ ma le primitive non sono esprimibili elementarmente

ESEMPIO 1

E1 Trovare i valori del parametro $a \in]0, +\infty[$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a^x - 3) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -\operatorname{arctg} a^x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è continua nel punto $x_0 = 1$.

E2 Data la funzione reale di variabile reale $\log [4(1+x) - x^2 - x^3]$,

- trovarne il dominio, i limiti alla frontiera e gli asintoti;
- studiarne la monotonia, determinandone il numero degli zeri, e la convessità;
- disegnarne il grafico sulla scorta delle informazioni precedentemente acquisite.

E3 Provare, senza calcolarlo, che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\log 2} e^x \sqrt{4 - e^{2x}} dx$ esiste finito. Calcolarne quindi il valore.

D1 Si dice che il numero reale L è l'estremo superiore dell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se ... (completare la definizione)

D2 Si dice che la retta di equazione $y = 3x - 1$ è un asintoto per la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ se ... (completare la definizione)

D3 Si dice che la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata in $[a, b]$, è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a, b]$ se ... (completare la definizione)

P1 Enunciare e dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass sui punti di accumulazione.

P2 Enunciare e dimostrare il teorema sul limite della funzione prodotto di due funzioni convergenti.

P3 Provare che una serie assolutamente convergente è anche semplicemente convergente.

ESEMPIO 2

- Q1** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x$ se $x < 0$, $f(0) = a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ se $x > 0$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- a) f è continua se e soltanto se $a \in [0, 1]$
 - b) $f(\mathbb{R}) =] - \infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \forall a < 1$
 - c) esiste $\varepsilon > 0$ tale che f è iniettiva per ogni $a \in [0, 1 + \varepsilon]$
 - d) f ha punti di minimo relativo se $a < 0$
- Q2** La successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{2^n} \right\}$ è
- a) convergente a $e^{\frac{2}{3}}$
 - b) divergente a $+\infty$
 - c) convergente a 1
 - d) infinitesima
- Q3** La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n}{n+1} + (-1)^n \right]$
- a) converge assolutamente
 - b) converge semplicemente ma non assolutamente
 - c) diverge a $+\infty$
 - d) è irregolare
- Q4** La derivata della funzione $\frac{\text{sen}^2 \pi x}{x^2+1}$
- a) esiste solamente nei punti $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
 - b) è uguale a $\frac{4\pi \text{sen} \pi x \cos \pi x}{x^2+1} - \frac{2x \text{sen}^2 \pi x}{(x^2+1)^2}$
 - c) si annulla nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$
 - d) è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$
- Q5** L'integrale $\int_0^1 e^{x^2-1} dx$
- a) è uguale a $\frac{1}{2} (1 - e^{-1})$
 - b) non esiste
 - c) è minore di 1
 - d) non verifica nessuna delle precedenti condizioni
- Q6** Siano X, Y sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. L'affermazione “ $\sup X > \inf Y$ ” è equivalente a
- a) $X \cap Y \neq \emptyset$
 - b) $\exists x \in X, \exists y \in Y : y < x$
 - c) $\forall x \in X \exists y \in Y : y < x$
 - d) $\exists x \in X, \exists y \in Y, \exists z \in X \cap Y : y < z < x$

E1 Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \operatorname{arctg} \left[1 - \left(\frac{2^n + n + 1}{2^{n+1}} \right)^{\sqrt{n + \cos n}} \right] .$$

E2 Data la funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x}$,

- determinare l'insieme X , intersezione del dominio naturale di f con l'intervallo $[0, 2\pi]$;
- studiare la monotonia e la convessità della restrizione $f|_X$ e trovarne tutti i punti a tangente verticale e tutti quelli di estremo relativo;
- disegnare il grafico di $f|_X$ sulla scorta delle informazioni precedentemente acquisite.

E3 Calcolare l'integrale

$$\int_{[-\pi, \frac{\pi}{2}]} \frac{(1 + \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen}^4 x - 2 \cos^2 x + 4)^3} .$$

D1 Si dice che il numero reale L è il limite della funzione $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ per $x \rightarrow 0$ se ... (completare la definizione)

D2 Si dice che la funzione $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nel punto $x_0 = -1$ se ... (completare la definizione)

D3 Si dice che la funzione $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, continua nell'intervallo $] -\infty, 0]$, è integrabile in senso improprio in $] -\infty, 0]$ se ... (completare la definizione)

P1 Enunciare e dimostrare il teorema dell'esistenza degli zeri.

P2 Enunciare e dimostrare una condizione sufficiente, formulata tramite la derivata prima, affinché una funzione sia fortemente crescente in un intervallo

P3 Provare che un insieme chiuso, limitato superiormente, ha il massimo.