UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	COGNOME e NOME:	
Facoltà di Ingegneria	FIRMA:	
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	MATRICOLA:	
C.D.L. IN INGEGNERIA INDUSTRIALE (A-SALA)	REGOLARITÀ STUDI:	☐ In Regola ☐ Ripetente ☐ Fuori Corso
Anno Accademico 2011/2012	PROGRAMMA DEL PROF.:	
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1 DEL 02/03/2012	CORSO SEGUITO NELL'A.A.:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno però consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 $\rightarrow$ 30/30 e lode.

Quesiti (svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati)

1) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali:

$$x_1 = \log_4 \frac{31}{2}, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5, \quad x_3 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad x_4 = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^7.$$

- a) $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$;
 b) $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$;
 c) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$;
 d) $x_1 < x_2 < x_4 < x_3$.

2) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La negazione della frase "La successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al numero 5" è

- a) " $\forall \varepsilon > 0, \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \text{ e } |a_n - 5| \geq \varepsilon$ ";
 b) " $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \leq \bar{n} \implies |a_n - 5| < \varepsilon$ ";
 c) " $\exists \varepsilon > 0 : [\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \text{ e } |a_n - 5| \geq \varepsilon]$ ";
 d) " $\exists \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n} \implies |a_n - 5| \geq \varepsilon$ ".

3) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{1}{2x} + \arctan x$ è falsa?

- a) la funzione f è crescente, definitivamente per $x \rightarrow +\infty$;
 b) esiste $c > 0$ tale che la restrizione $f|_{]0,c]}$ è decrescente;
 c) la restrizione $f|_{]2,+\infty[}$ ha massimo assoluto;
 d) il dominio naturale di f è un insieme aperto.

4) Dato l'insieme $X_\alpha = \left\{ \frac{n}{n+1} : n = 0, 1, 2, \dots \right\} \cup [\alpha, \alpha + 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$, quali delle seguenti affermazioni è vera?

- a) l'insieme X_α ha minimo soltanto se $\alpha < 0$;
 b) l'insieme X_α ha massimo per ogni $\alpha \leq 0$;
 c) qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una successione di elementi di X_α che converge al numero $\alpha + 1$;
 d) esiste $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme X_{α^*} non ha punti di accumulazione.

5) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ -\sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} \frac{2e^x-1}{2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1-2\sin x}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

6)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + n^{-p}}$, $p \in \mathbb{R}$,

- a) verifica le ipotesi del criterio di Leibniz per qualche $p \in \mathbb{R}$;
- b) converge solamente se $p > 1$;
- c) diverge per ogni $p < 0$;
- d) converge se e soltanto se $|p| > 1$.

Esercizi (*svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30*)

1) Calcolare l'integrale

$$\int_4^{12} \frac{|10-x|}{x^2+x-12} dx.$$

2) Provare che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{1-x}} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ ed è dotata di massimo assoluto.

3) Data la funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$,

- determinare l'insieme X , intersezione del dominio naturale di f con l'intervallo $[-\pi, \pi]$;
- studiare la monotonia e la convessità della restrizione $f|_X$ e trovarne tutti i punti a tangente verticale e tutti quelli di estremo assoluto;
- disegnare un grafico qualitativo di $f|_X$.

Definizioni (*dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata*)

1) Definizione di funzione derivabile in un punto.

2) Definizione di serie numerica convergente.

3) Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ dicesi di accumulazione per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ quando

Teoremi (*dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette*)

1) Provare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) Dimostrare che ogni insieme compatto è limitato.

3) Se F è una primitiva di f nell'intervallo I , allora tutte e sole le primitive di f in I sono . . . (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).