UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	COGNOME e NOME:	
Facoltà di Ingegneria	FIRMA:	
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	MATRICOLA:	
C.d.L. in Ingegneria Industriale (A–Sala)	REGOLARITÀ STUDI:	☐ In Regola ☐ Ripetente ☐ Fuori Corso
Anno Accademico 2011/ 2012	PROGRAMMA DEL PROF.:	
Prova d'Esame di Analisi Matematica 1 del 19/06/2012	CORSO SEGUITO NELL'A.A.:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno** però **consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 → 30/30 *e lode*.

Quesiti (*svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati*)

1) Sia f la funzione reale di variabile reale definita ponendo $f(x) = x \operatorname{sen}|x|\ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

☐ *a)* f non è derivabile nel punto $x_0 = 0$;

☐ *b)* f è derivabile nel punto $x_0 = 0$, ma non esiste la derivata seconda $f''(0)$;

☐ *c)* f è dotata di derivate di qualunque ordine nel punto $x_0 = 0$;

☐ *d)* nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

2) Sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La condizione: "Esistono due successioni reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergenti ad uno stesso numero e tali che $a_n \le b_n \le c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$"

☐ *a)* è necessaria e sufficiente,

☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente,

☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria,

☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente,

affinché la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

3) L'insieme immagine della funzione reale di variabile reale f definita ponendo $f(x) = x^x\ \forall x \in]0, +\infty[$ è

☐ *a)* $]1, +\infty[$;

☐ *b)* $\left]\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}, +\infty\right[$;

☐ *c)* $\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}, +\infty\right[$;

☐ *d)* $[\mathrm{e}^{\mathrm{e}}, +\infty[$.

4) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

☐ *a)* converge ed ha per somma un numero $s > \frac{3}{2}$;

☐ *b)* converge ed ha per somma un numero $s < 1$;

☐ *c)* diverge positivamente;

☐ *d)* converge semplicemente ma non assolutamente.

5) Quali dei seguenti integrali hanno valore finito:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx \quad , \quad I_2 = \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx \quad \text{e} \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx \ ?$$

☐ *a)* I_1 e I_2 ;
☐ *b)* I_2 e I_3 ;
☐ *c)* solamente I_2 ;
☐ *d)* nessuno dei tre .

---

6) Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} -3^{\,x} & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x = 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* non esiste alcun valore di a per il quale f è continua ;
☐ *b)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è un punto di massimo locale ;
☐ *c)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è un punto di minimo assoluto ;
☐ *d)* esistono valori di a per i quali f è monotòna in qualche intervallo del tipo $]-\infty, b]$, con $b > 1$.

Esercizi ***(svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30)***

---

1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\,2x} + 2\,\mathrm{e}^{\,x} + 2} .$$

---

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} + \operatorname{sen} \frac{1}{n!} \right)^{n} .$$

---

3) Provare che la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^{\,x} - 1}{\mathrm{e}^{\,x}}}$$

è strettamente monotòna nel suo dominio e calcolare la derivata della sua funzione inversa f^{-1} nel punto $y_0 = 1$. Completare quindi lo studio di f fino a disegnarne un grafico qualitativo.

Definizioni ***(dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata)***

---

1) Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ si dice [*sequenzialmente*] *compatto* se . . . (completare la definizione) .

---

2) Scrivere la definizione di *funzione integrale* .

---

3) Si dice che la retta di equazione $y = 5x - 2$ è un *asintoto* per la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ se . . . (completare la definizione) .

Teoremi ***(dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette)***

---

1) Dimostrare che la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

---

2) Dimostrare che la limitatezza di una successione reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è condizione necessaria, ma non sufficiente, per la convergenza della successione stessa.

---

3) Dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è integrabile secondo Riemann.