UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO ...
PRIMA PROVA SCRITTA

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Tempo disponibile: 90 minuti. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_3 \left(\left(5 - \operatorname{sen}(x^2+3)\right) \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{1-\sqrt{x}} \right)$ è l'insieme

- ☐ *a)* $\left]0, \frac{1}{3}\right[\,\cup\,]1, +\infty[\,$;
- ☐ *b)* $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right[$;
- ☐ *c)* $\left]0, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right[\,\cup\,]1, +\infty[\,$;
- ☐ *d)* $\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, 1\right[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $[0, +\infty[$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di $[0, +\infty[$. La negazione della frase " $\forall\, x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists\, z \in U \cap [0, +\infty[: \; f(z^2) > f(x)$ " è

- ☐ *a)* " $\forall\, x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; : \; \forall\, z \in U \cap [0, +\infty[\Longrightarrow \; f(z^2) \le f(x)$ " ;
- ☐ *b)* " $\forall\, x \in B \;\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists\, z \in U \cap [0, +\infty[: \; f(z) \le f(\sqrt{x})$ " ;
- ☐ *c)* " $\exists\, x \in B \; : \; \left[\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \forall\, z \in U \cap [0, +\infty[\Longrightarrow \; f(z^2) \le f(x)\right]$ " ;
- ☐ *d)* " $\exists\, x \in B \; : \; \left[\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists\, z \in U \cap [0, +\infty[: \; f(z^2) \le f(x)\right]$ " .

---

3) La derivata della funzione $\left(3x^2+5\right)^{4x+1}$ è uguale a

- ☐ *a)* $\left(3x^2+5\right)^{4x+1} \left[\log(3x^2+5)^4 + \frac{6x(4x+1)}{3x^2+5}\right]$;
- ☐ *b)* $\mathrm{e}^{\,(4x+1)\log(3x^2+5)} \left[\log(3x^2+5) + \frac{6x(4x+1)}{3x^2+5}\right]$;
- ☐ *c)* $\left(3x^2+5\right)^{4x} \left[(3x^2+5)\log(3x^2+5) + 6x(4x+1)\right]$;
- ☐ *d)* $6x\left(3x^2+5\right)^{4x}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7} n^{-\frac{7}{5}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7}\left(-\frac{7}{5}\right)^n \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9}(n+7)^{-\frac{9}{7}} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9}\left(-\frac{9}{7}\right)^{n+7} \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (3) ;
- ☐ *d)* (2) e (4) .

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2n+3} - (2n+3)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

- ☐ *a)* ha massimo, ma non ha minimo ;
- ☐ *b)* ha minimo, ma non ha massimo ;
- ☐ *c)* non ha né massimo né minimo ;
- ☐ *d)* non è una successione monotòna .

---

6) La serie $1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\dots$

- ☐ *a)* converge assolutamente ;
- ☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente ;
- ☐ *c)* diverge negativamente ;
- ☐ *d)* non è regolare .

---

7) Il limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\right)}{\log(1+\frac{1}{x^2})}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* 1 ;
- ☐ *c)* e ;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\log_2|x| & \text{se } x<-1\\ a-x & \text{se } -1\le x\le 0\\ -\frac{1}{x+1} & \text{se } x>0\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha minimo assoluto ;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è strettamente convessa nell'intervallo $[a,a+2]$;
- ☐ *d)* $f''(1)=-\frac{1}{4}$ $\forall a\in\mathbb{R}$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\cos 3x}{3-\operatorname{sen}3x}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* $\log\frac{2}{3}$;
- ☐ *b)* $\log\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;
- ☐ *c)* $\log\frac{3}{2}$;
- ☐ *d)* $3-\log 3$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x-\operatorname{arctg}|x|$ è vera ?

- ☐ *a)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* f è convessa in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* f ha un unico asintoto ;
- ☐ *d)* f ha un punto di massimo locale .

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x<0\\ x\operatorname{sen}x^2 & \text{se } x\ge 0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & \text{se } x<0\\ -\frac{1}{2}\cos x^2 & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}\frac{2x^3-3}{6} & \text{se } x<0\\ -\frac{1}{2}\cos x^2 & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .