UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 6 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log(\arcsen(4 - 3^{-2x}))$ è l'insieme

- a) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1]$;
- b) $] \log_3 \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$;
- c) $] -\log_3 2, +\infty [$;
- d) $] 0, +\infty [$.

2) Sia E il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $E = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Quale delle seguenti affermazioni riguardanti l'insieme E è vera?

- a) $\overset{\circ}{E} = \{0, 1\}$ e $DE = [0, 1] \cup \{2\}$;
- b) $\partial E = E$ e $DE = E \cup \{2\}$;
- c) $\partial E = E \cup [0, 1] \cup \{2\}$ e $DE = [0, 1] \cup \{2\}$;
- d) $\partial E = E \cup \{2\}$ e $DE =]0, 1[\cup \{2\}$.

3) La derivata della funzione $\arctg((2x)^x)$ è uguale a

- a) $\frac{(2x)^x}{1+(2x)^2} (\log(2x) + 1)$;
- b) $\frac{(2x)^x}{1+(2x)^{2x}} (\log x + \log 2 + 1)$;
- c) $\frac{(2x)^x}{1+(2x)^{2x}} (\log(2x) + \frac{1}{2})$;
- d) $\frac{(2x)^x}{1+(2x)^{2x}} 2x \arctg((2x)^{x-1})$.

4) Dati gli insiemi $A = \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x} : x \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} \right\}$, è vero che:

- a) A e B sono separati, ma non contigui;
- b) A e B sono separati e contigui;
- c) A e B non sono separati;
- d) A e B non sono disgiunti.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_3(1 + 3^x)}{\arctg 2^x}$ è uguale a

- a) 1;
- b) $\log_3 e$;
- c) 0;
- d) $\log \sqrt{e^3}$.

6) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{2n+1} - \frac{1}{n^2} \right]$ converge

- a) per ogni $x \in \mathbb{R}$;
 - b) solo se $x \in]-1, 1[$;
 - c) solo se $x \in [-1, 1[$;
 - d) solo se $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(ax) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono valori di a per i quali f_a è derivabile in tutto $\mathbb{R}$;
 - b) esistono valori di a per i quali f_a è concava in $\mathbb{R}$;
 - c) esistono infiniti valori di a per cui la funzione f_a ha punti di massimo locale;
 - d) $f_a''(0) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{x}$ è vera ?

- a) la funzione f ha minimo assoluto;
 - b) f è derivabile in ogni punto del suo dominio;
 - c) il grafico di f ha un asintoto obliquo;
 - d) il punto $x_0 = 2$ è di estremo relativo per f .
-

9) L'integrale indefinito $\int x^3 \operatorname{sen} 5x \, dx$ è uguale a

- a) $-\frac{x^4}{20} \cos 5x + c$;
 - b) $\frac{x^2}{5} [-x \cos 5x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} 5x] - \frac{6}{25} \int x \operatorname{sen} 5x \, dx$;
 - c) $5x^2 [x \cos 5x - 3 \operatorname{sen} 5x] + 150 \int x \operatorname{sen} 5x \, dx$;
 - d) $\frac{5}{4} x^4 \cos 5x - x^3 \operatorname{sen} 5x - \frac{2}{5} \int x \operatorname{sen} 5x \, dx$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La condizione

“La serie $a_0 + (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + \dots$ è convergente”

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_x^{x^2} \operatorname{sen} t^2 \, dt$ è uguale a

- a) $\operatorname{sen} x^4 - \operatorname{sen} x^2$;
- b) $2x \operatorname{sen} x^4 - \operatorname{sen} x^2$;
- c) $\int_1^{2x} 2t \cos t^2 \, dt$;
- d) $2x \operatorname{sen} x^4 \cos x^2$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 6 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log \frac{1+2|x|}{\arcsen(2-e^{3x})}$ è l'insieme

- a) $[0, \log \frac{3}{2}[;$
 b) $] -\infty, \log \sqrt[3]{2}[;$
 c) $] 0, \frac{1}{3} \log 2[;$
 d) $[0, \log \sqrt[3]{2}.$

2) Sia E il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $E = ([-1, 0] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$. Quale delle seguenti affermazioni riguardanti l'insieme E è vera?

- a) $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ e $DE = E$;
 b) $\partial E = \{-1, 1\}$ e $DE = [-1, 0]$;
 c) $\partial E = E \cup [-1, 0]$ e $DE = [-1, 0]$;
 d) $\partial E = E$ e $DE = [-1, 0]$.

3) La derivata della funzione $\arcsen((2x)^x)$ è uguale a

- a) $\frac{(2x)^x}{\sqrt{1-4x^2}} (\log(2x) + 1)$;
 b) $\frac{(2x)^x}{\sqrt{1-(2x)^{2x}}} (\log x + \log 2 + 1)$;
 c) $\frac{(2x)^x}{\sqrt{1-(2x)^x}} \cdot \frac{\log(2x) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1+(2x)^x}}$;
 d) $\frac{(2x)^x}{\sqrt{1-(2x)^{2x}}} 2x \arcsen((2x)^{x-1})$.

4) Dati gli insiemi $A = \left\{ (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}x} : x \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} \right\}$, è vero che:

- a) A e B sono separati, ma non contigui;
 b) A e B sono separati e contigui;
 c) A e B non sono separati;
 d) A e B non sono disgiunti.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+5^x)^3 - 1}{\sen^2 \pi x}$ è uguale a

- a) 3;
 b) $\frac{15}{\pi}$;
 c) 0;
 d) $+\infty$.

6) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1} x^n - \frac{1}{n!} \right]$ converge

- a) per ogni $x \in \mathbb{R}$;
 - b) solo se $x \in [-1, 1[$;
 - c) solo se $x \in]-1, 1[$;
 - d) solo se $x = 0$.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(ax) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) f_a è convessa in $] - \infty, 1]$ per ogni $a \geq 0$;
 - b) f_a è iniettiva per ogni $a \geq 0$;
 - c) esistono infiniti valori di a per cui l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
 - d) esistono infiniti valori di a per cui la funzione f_a ha minimo assoluto.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{x}$ è vera ?

- a) f non ha minimo assoluto;
 - b) f è derivabile in ogni punto del suo dominio;
 - c) f l'insieme immagine di f è l'intervallo $[e, +\infty[$;
 - d) f è iniettiva.
-

9) L'integrale indefinito $\int x^3 \cos 4x \, dx$ è uguale a

- a) $\frac{x^2}{4} [x \sin 4x - \frac{3}{4} \cos 4x] + \frac{3}{8} \int x \cos 4x \, dx$;
 - b) $\frac{x^4}{12} \sin 4x + c$;
 - c) $-x^4 \sin 4x + 16x^3 \cos 4x - 8 \int x \cos 4x \, dx$;
 - d) $\frac{x^2}{4} [x \sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x] - \frac{3}{8} \int x \cos 4x \, dx$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. La condizione "La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} a_n$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_x^{2x} \sin^2 t^2 \, dt$ è uguale a

- a) $2 \sin^2(2x^2) - \sin^2 x^2$;
- b) $2 \sin^2 x^2$;
- c) $\int_1^2 4t \sin t^2 \cos t^2 \, dt$;
- d) $2 \sin^2(4x^2) - \sin^2 x^2$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 6 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log \frac{\arcsen(3 - 2^{3x})}{3^{2|x|+1} - 1}$ è l'insieme

- a) $] -\infty, \log_2 \sqrt[3]{3}[;$
 b) $[\frac{1}{3}, \log_2 3[;$
 c) $[\frac{1}{3}, \log_2 \sqrt[3]{3}[;$
 d) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \log_2 3[.$

2) Sia E il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $E = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Quale delle seguenti affermazioni riguardanti l'insieme E è vera?

- a) $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ e $DE = E \cup \{0, e\}$;
 b) $\partial E = E$ e $DE = \{0, e\}$;
 c) $\partial E = \{0, e\}$ e $DE = \{0, e\}$;
 d) $\partial E = E \cup \{0, e\}$ e $DE = \{0, e\}$.

3) La derivata della funzione $\sqrt{1 + (2x)^x}$ è uguale a

- a) $\frac{(2x)^x}{2\sqrt{1+(2x)^x}} (\log(2x) + 1)$;
 b) $\frac{2^{x-1}x^x}{\sqrt{1+(2x)^x}} (\log x + \log 2 + \frac{1}{2})$;
 c) $\frac{(2x)^x}{\sqrt{1+4x^{2x}}} (\log(2x) + 1)$;
 d) $\frac{x(2x)^{x-1}}{2\sqrt{1+(2x)^x}}$.

4) Dati gli insiemi $A = \{(-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{\text{tg} \frac{\pi}{2} x : x \in]\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}\}$, è vero che:

- a) A e B sono separati, ma non contigui;
 b) A e B sono separati e contigui;
 c) A e B non sono separati;
 d) A e B non sono disgiunti.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen} e^{\frac{1}{x}}}{|x|^\pi}$ è uguale a

- a) e ;
 b) $e^{\frac{1}{\pi}}$;
 c) 0 ;
 d) 1 .

6) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!} x^{3n}$ converge

- a) per ogni $x \in \mathbb{R}$;
 - b) solo se $x \in [-1, 1]$;
 - c) solo se $x \in [-1, 1[$;
 - d) solo se $x = 0$.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(ax) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la funzione f_a è dotata di derivata seconda nell'intervallo $] -\infty, 1[$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - b) esiste un unico valore di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
 - c) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - d) risulta $\inf_{x \in \mathbb{R}} f_a(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } a > 0 \\ a & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{x}$ è vera ?

- a) f non è iniettiva;
 - b) il grafico di f ha un asintoto verticale;
 - c) f ha punti di massimo locale;
 - d) la retta di equazione $y = \frac{e}{2}$ è tangente al grafico della funzione f .
-

9) L'integrale indefinito $\int x^4 \cos 2x \, dx$ è uguale a

- a) $-\frac{2x^5}{5} \sin 2x + 4x^3 \cos 2x + 3 \int x^2 \cos 2x \, dx$;
 - b) $\frac{x^3}{2} [x \sin 2x + 2 \cos 2x] - 3 \int x^2 \cos 2x \, dx$;
 - c) $x^3 [\frac{1}{2}x \sin 2x - \cos 2x] + 3 \int x^2 \cos 2x \, dx$;
 - d) $-\frac{x^5}{10} \sin 2x + c$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri positivi. La condizione "La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{n})^n a_n$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_x^{e^x} \sin t^2 \, dt$ è uguale a

- a) $(e^x - 1) \sin x^2$;
- b) $e^x \sin^2 e^x - \sin x^2$;
- c) $\int_1^{e^x} 2t \cos t^2 \, dt$;
- d) $e^x \sin e^{2x} - \sin x^2$.

Tutti i quesiti dei compiti D, E e F del 6 febbraio 2014 si trovano in uno dei compiti A, B e C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 6 FEBBRAIO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Data una funzione $f :] - \infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$, dire che "il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ è uguale a -1 " vuol dire che ... (completare la definizione).

- 2) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è di *accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

- 3) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dice che f è *integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$ se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Dimostrare che per ogni $a > 1$ ed ogni $p > 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$.

- 2) In $\mathbb{R}$ ogni successione limitata ha una sottosuccessione ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

- 3) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^3
 - a) è uniformemente continua in $]0, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

- 2) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(4 \cos x - 1) \sin x}{(5 - \sin^2 x)(\cos x + 3)} dx .$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\log(\arcsen(4 - 3^{-2x}))}{4 + 3^{-2x}}$ è l'insieme

- a) $]0, +\infty[$;
- b) $] -\log_3 2, +\infty[$;
- c) $] \log_3 \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$;
- d) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1]$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{0, 1, 2\}$;
- b) $\left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}$;
- c) $E \cup \{2\}$;
- d) $[0, 1] \cup \left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}$.

3) La derivata della funzione $[\arctg(2x)]^x$ è uguale a

- a) $[\arctg(2x)]^x \left[\log(\arctg(2x)) + \frac{2}{(1+4x^2)\arctg(2x)} \right]$;
- b) $[\arctg(2x)]^{x-1} \left[\arctg(2x) \log(\arctg(2x)) + \frac{x}{1+4x^2} \right]$;
- c) $x [\arctg(2x)]^{x-1} \frac{2}{1+4x^2}$;
- d) $[\arctg(2x)]^{x-1} \left[\arctg(2x) \log(\arctg(2x)) + \frac{2x}{1+4x^2} \right]$.

4) L'insieme $A = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}x} : x \in [-1, 0[\cap \mathbb{Q} \right\}$

- a) è limitato ed ha minimo e massimo;
- b) è limitato, ha massimo ma non ha minimo;
- c) è limitato superiormente, ma non inferiormente, ed ha massimo;
- d) è limitato superiormente, ma non inferiormente, e non ha massimo.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_3(1 + \pi^x)}{\sin(\sin 3^x)}$ è uguale a

- a) $\frac{\pi}{3}$;
- b) 0 ;
- c) $\log_3 e$;
- d) $+\infty$.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsen \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e+1} \right)^{n+3}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
 - b) (1), (3) e (4);
 - c) solo (3);
 - d) (3) e (4).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg(a^2x) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a ;
 - b) esistono infiniti valori di a per cui f_a è iniettiva;
 - c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 0$;
 - d) la funzione f_a ha minimo assoluto soltanto se $a \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup \{0\}$.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ è vera ?

- a) la funzione f ha minimo assoluto;
 - b) f è derivabile in ogni punto del suo dominio;
 - c) il grafico di f ha un asintoto obliquo;
 - d) il punto $x_0 = -1$ non è di estremo locale per f .
-

9) L'integrale indefinito $\int \frac{e^{3x}}{e^x + \sqrt{e^x + 3}} dx$ è uguale a

- a) $\left[\int \frac{(t^2-3)^2}{t^2+t-3} dt \right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$;
 - b) $\left[\int \frac{z^3}{z+\sqrt{z+3}} dz \right]_{z=e^x}$;
 - c) $\left[\int \frac{2t(t^2-3)^2}{t^2+t-3} dt \right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$;
 - d) $\frac{1}{3} \left[\int \frac{dz}{z+\sqrt{z+3}} \right]_{z=e^{3x}}$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. La condizione "La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) L'integrale definito $\int_0^2 \frac{|x-1|}{x+3} dx$ è uguale a

- a) $4 - 8 \log 4 - \log 15$;
- b) $2 - 4 \log 15$;
- c) $4 \log \frac{16}{15}$;
- d) $\frac{2}{15}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\log(\arcsen(2 - e^{3x}))}{2 + e^{3x}}$ è l'insieme

- a) $]0, \frac{1}{3} \log 2[;$
 b) $[0, \log \sqrt[3]{2}[;$
 c) $[0, \log \frac{3}{2}[;$
 d) $] -\infty, \log \sqrt[3]{2}[.$

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = ([-1, 0] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ è l'insieme

- a) $[-1, 0];$
 b) $\{-1, 0\} \cup \{2^n : n \in \mathbb{N}\};$
 c) $[-1, 0] \cup \{2^n : n \in \mathbb{N}\};$
 d) $E \cup \{2^n : n \in \mathbb{N}\}.$

3) La derivata della funzione $[\arcsen(2x)]^x$ è uguale a

- a) $[\arcsen(2x)]^x \left[x \log(\arcsen(2x)) + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2} \arcsen(2x)} \right];$
 b) $[\arcsen(2x)]^x \left[\log(\arcsen(2x)) + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2} \arcsen(2x)} \right];$
 c) $[\arcsen(2x)]^{x-1} \left[\arcsen(2x) \log(\arcsen(2x)) + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \right];$
 d) $x [\arcsen(2x)]^{x-1} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$

4) L'insieme $A = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}x} : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \right\}$

- a) è limitato, ha minimo ma non ha massimo;
 b) è limitato ma non ha né minimo né massimo;
 c) è limitato inferiormente, ma non superiormente, ed ha minimo;
 d) è limitato inferiormente, ma non superiormente, e non ha minimo.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 + 9^x)^3 - 1}{\sin^2 \pi x}$ è uguale a

- a) $\frac{27}{\pi^2};$
 b) $3;$
 c) $0;$
 d) $+\infty.$

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)^{n+4}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n+1}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (2) e (3);
- c) solo (3);
- d) (2) e (3).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a^2x) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo se e soltanto se $a \geq 1$;
- c) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) esistono infiniti valori di a per cui la funzione f_a ha minimo assoluto.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ è vera ?

- a) f non ha minimo assoluto;
- b) f è derivabile in ogni punto del suo dominio;
- c) f l'insieme immagine di f è l'intervallo $[-1, +\infty[$;
- d) f non è iniettiva.

9) L'integrale indefinito $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^x + 3}} dx$ è uguale a

- a) $\left[\int \frac{z^2}{z^2 + \sqrt{z+3}} dz \right]_{z=e^x}$;
- b) $\left[\int \frac{2t(t^2-3)}{(t^2-3)^2+t} dt \right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$;
- c) $\frac{1}{2} \left[\int \frac{dz}{z + \sqrt{z+3}} \right]_{z=e^{2x}}$;
- d) $\left[\int \frac{t^2-3}{(t^2-3)^2+t} dt \right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. La condizione "La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} a_n$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) L'integrale definito $\int_0^3 \frac{|x-1|}{x+3} dx$ è uguale a

- a) $1 + 4 \log \frac{8}{9}$;
- b) $3 - 4 \log 18$;
- c) $\frac{1}{15}$;
- d) $5 - 4 \log 48$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\log(\arcsen(3 - 2^{3x}))}{3 + 2^{3x}}$ è l'insieme

- a) $[\frac{1}{3}, \log_2 3[$;
- b) $] -\infty, \log_2 \sqrt[3]{3}[$;
- c) $] \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \log_2 3[$;
- d) $[\frac{1}{3}, \log_2 \sqrt[3]{3}[$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}^+\}$ è l'insieme

- a) $\{0, e\}$;
- b) $\{0, 1, 2, e\}$;
- c) $E \cup \{0, e\}$;
- d) $]0, 1] \cup [2, e[$.

3) La derivata della funzione $[\sqrt{x^2 + 2x}]^x$ è uguale a

- a) $[\sqrt{x^2 + 2x}]^x \left[\log \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} \right]$;
- b) $[\sqrt{x^2 + 2x}]^{x-1} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 2x} \log(x^2 + 2x) + \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}} \right]$;
- c) $[x^2 + 2x]^{\frac{x}{2}} \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + 2x) + \frac{x(x+1)}{x^2+2x} \right]$;
- d) $x [x^2 + 2x]^{\frac{x}{2}-1} (x + 1)$.

4) L'insieme $A = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}x} : x \in \left[-\frac{3}{2}, -1[\cap \mathbb{Q} \right\}$

- a) è limitato ed ha minimo e massimo ;
- b) è limitato, ha minimo ma non ha massimo ;
- c) è limitato, ma non ha né minimo né massimo ;
- d) è limitato inferiormente ma non superiormente.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 + \pi^x)^4 - 1}{\sin 2^{3x}}$ è uguale a

- a) 0 ;
- b) 4 ;
- c) $+\infty$;
- d) $\frac{\pi^2}{9}$.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2} \right]$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n+1}{n}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$?

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (2) e (3);
- c) solo (1);
- d) (1) e (2).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg(a^2x) & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a > 1$;
- b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo se e soltanto se $a > 1$;
- c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 0$ oppure $a = 1$;
- d) la retta di equazione $y - 2 = \frac{x-c}{e}$ è tangente al grafico di f_a per ogni $a \in \mathbb{R}$.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ è vera ?

- a) f è iniettiva;
- b) il grafico di f non ha asintoti;
- c) f non ha punti di estremo locale;
- d) la retta di equazione $4(y-1) = x-3$ è tangente al grafico della funzione f .

9) L'integrale indefinito $\int \frac{e^{3x}}{e^x + \sqrt[3]{e^x+3}} dx$ è uguale a

- a) $\left[\int \frac{z^3}{z + \sqrt[3]{z+3}} dz \right]_{z=e^x}$;
- b) $\left[\int \frac{3t^5}{t^3+t-3} dt \right]_{t=\sqrt[3]{e^x+3}}$;
- c) $\left[\int \frac{3t^2(t^3-3)^2}{t^3+t-3} dt \right]_{t=\sqrt[3]{e^x+3}}$;
- d) $\frac{1}{3} \left[\int \frac{dz}{z + \sqrt[3]{z+3}} \right]_{z=e^{3x}}$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. La condizione "La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente.

11) L'integrale definito $\int_0^3 \frac{|x-2|}{x+3} dx$ è uguale a

- a) $\frac{1}{2}$;
- b) $3 - 5 \log 18$;
- c) $7 - 5 \log(25 \cdot 18)$;
- d) $-1 + 5 \log \frac{25}{18}$.

Tutti i quesiti dei compiti D, E e F del 21 febbraio 2014 si trovano in uno dei compiti A, B e C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Data una funzione $f :] - \infty, 2[\rightarrow \mathbb{R}$, dire che “il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ è uguale a 5” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 2) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è di *frontiera* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

- 3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *convergente* se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- 2) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza degli zeri.

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo I . Se $f'(x) > 0 \forall x \in I$, allora la funzione f è ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^2
 - a) è uniformemente continua in $]0, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

- 2) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(2\sin^2 x + \sin x + 17) \cos x}{(10 - \cos^2 x)(\sin x - 1)} dx .$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \frac{x}{x-1}$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova il **presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Data una funzione $f :] - \infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$, dire che “il limite di $f(x)$ per x che tende a -1 è uguale a $-\infty$ ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 2) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si chiama *estremo superiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si chiama *primitiva* di f ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Dimostrare che per ogni $a > 1$ ed ogni $p > 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$.

- 2) Enunciare e dimostrare il *criterio di convergenza di Cauchy* per le successioni.

- 3) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione 5^x
 - a) è uniformemente continua in $[0, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

- 2) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 5)(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{(\operatorname{tg} x - 1)^2(\operatorname{tg} x + 2)} dx .$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 FEBBRAIO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Data una funzione $f :] - 5, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dire che “il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è uguale a $-\infty$ ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 2) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato inferiormente* se Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, si chiama *estremo inferiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f è *derivabile in un punto* $x_0 \in I$ se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.

- 2) In $\mathbb{R}$ ogni insieme infinito e limitato ha almeno un punto ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

- 3) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat sui punti di estremo locale.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione $\frac{1}{x^2}$
 - a) è uniformemente continua in $]1, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $]0, 1]$.

- 2) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(2 + 5 \operatorname{sen} x - 2 \cos^2 x) \cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2 (\operatorname{sen} x - 2)} dx .$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = |x| \operatorname{arctg} x$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 MARZO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log(|2x + 3| + 3x) - \log(|2x + 3| - 4)$ è l'insieme

- a) $] -\frac{4}{3}, +\infty[$;
- b) $[-\frac{4}{3}, +\infty[$;
- c) $] -\infty, -\frac{7}{2}[\cup] \frac{1}{2}, +\infty[$;
- d) $] \frac{1}{2}, +\infty[$.

2) Il derivato DE dell'insieme $E = (]-\infty, 0] \setminus \mathbb{Z}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $] -\infty, 0]$;
- b) $] -\infty, 0] \cup \{1, 3\}$;
- c) $\{1, 3\}$;
- d) $] -\infty, 0] \cup \{3\}$.

3) La derivata della funzione $\arcsen^5 \sqrt{1-x^2}$ è uguale a

- a) $-\frac{5 \arcsen^4 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$;
- b) $\frac{5|x|}{\sqrt{1-x^2}} \arcsen^4 \sqrt{1-x^2}$;
- c) $\frac{\cos \sqrt{1-x^2}}{\sen^5 \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$;
- d) $-\frac{5x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \arcsen^4 \sqrt{1-x^2}$.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(2-x^4) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{arctg} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) $-\infty$ e 1 ;
- b) $-1, 0$ e 1 ;
- c) -1 e 1 ;
- d) solo 1 .

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-1}{4+\sen^2 x} \sen^2 \frac{1}{x}$

- a) è uguale a 4 ;
- b) non esiste;
- c) è uguale a $+\infty$;
- d) è uguale a 0 .

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\arcsen \frac{1}{\sqrt{n}} - \arcsen \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e+1} \right)^{n+3}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
 - b) (1), (3) e (4);
 - c) solo (3);
 - d) (3) e (4).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a ;
 - b) esistono infiniti valori di a per cui f_a è iniettiva;
 - c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 1$;
 - d) la funzione f_a ha minimo assoluto soltanto se $a \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup \{0\}$.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x|(e^x - 1)$ è vera ?

- a) f ha un asintoto orizzontale;
 - b) $f''(-1) = -e$;
 - c) il grafico di f ha un punto angoloso;
 - d) f è iniettiva.
-

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{2 + \sin 3x} dx$ è uguale a

- a) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;
 - b) $\frac{1}{3} \log 2$;
 - c) $\frac{1}{3} \log \frac{3}{2}$;
 - d) $\log \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.
-

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione $x^2 f(x)$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$

$$(3) f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (2) e (4);
- c) (1) e (4);
- d) solo (4).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 MARZO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\log(9x - |2x - 7|) - \log(4 - |2x - 7|)}$ è l'insieme

- a) $[\frac{4}{9}, +\infty[;$
 b) $[\frac{4}{9}, \frac{11}{2} [;$
 c) $] \frac{3}{2}, \frac{11}{2} [;$
 d) $] -\infty, \frac{4}{9}] \cup] \frac{3}{2}, \frac{11}{2} [.$

2) Il derivato DE dell'insieme $E = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{0, 1, 3\};$
 b) $\{3\};$
 c) $\{0\};$
 d) $\{0, 3\}.$

3) La derivata della funzione $\arcsen^3 \sqrt{1-x^4}$ è uguale a

- a) $\frac{\cos \sqrt{1-x^4}}{\sen^3 \sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}};$
 b) $-6x \frac{\arcsen^2 \sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}};$
 c) $\frac{6|x|}{\sqrt{1-x^4}} \arcsen^2 \sqrt{1-x^4};$
 d) $\frac{3}{x\sqrt{1-x^4}} \arcsen^2 \sqrt{1-x^4}.$

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ e^{x^3-2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) -1 e $1;$
 b) $-\infty$ e $1;$
 c) $-\infty, 1$ e $+\infty;$
 d) solo $-\infty.$

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{4+\sen^4 2^x} \sen^2 \frac{1}{x}$

- a) è uguale a $4;$
 b) non esiste;
 c) è uguale a $1;$
 d) è uguale a $0.$

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)^{n+4}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (2) e (3);
- c) solo (3);
- d) (2) e (3).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 1$ è di minimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) f_a è limitata inferiormente per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 0$ oppure $a = 1$;
- d) per ogni $a \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y - a - 1 = \frac{x-e}{e}$ è tangente al grafico di f_a .

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x|(e^x - 1)$ è vera ?

- a) f ha un punto di minimo locale;
- b) $f''(1) = 2e$;
- c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- d) f è convessa in $\mathbb{R}$.

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{2 - \sin 3x} dx$ è uguale a

- a) $\frac{1}{3} \log \frac{3}{2}$;
- b) $\log \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;
- c) $-\frac{1}{3} \log 3$;
- d) $-3(\log 3 - \log 2)$.

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione $\frac{f(x)}{x^2+1}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$
$$(3) f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (1), (2) e (3);
- b) (1) e (2);
- c) (1) e (4);
- d) solo (1).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 MARZO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log(\log(9x - |2x + 3|) - \log(4 - |2x + 3|))$ è l'insieme

- a) $] \frac{4}{9}, \frac{1}{2} [;$
 b) $] \frac{4}{9}, +\infty [;$
 c) $] -\frac{7}{2}, \frac{4}{9} [;$
 d) $] -\frac{7}{2}, \frac{1}{2} [.$

2) Il derivato DE dell'insieme $E = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{(-1)^n 2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-2, 2\};$
 b) $[0, 1];$
 c) $[0, 1] \cup \{-2, 2\};$
 d) $([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{-2, 2\}.$

3) La derivata della funzione $\arcsen^4 \sqrt{1-x^3}$ è uguale a

- a) $-\frac{6|x| \arcsen^3 \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}};$
 b) $-\frac{6|x| \arcsen^3 \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^3}};$
 c) $\frac{\cos \sqrt{1-x^3}}{\sen^4 \sqrt{1-x^3}} \cdot \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}};$
 d) $\frac{12x^2 \arcsen^3 \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}}.$

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ e^{x^2+2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) 1 e 2;
 b) 2 e $+\infty$;
 c) 1, 2 e $+\infty$;
 d) solo 2.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-1}{4+\sen^4 2^x} \sen^2 \frac{1}{x}$

- a) è uguale a 4;
 b) non esiste;
 c) è uguale a 0;
 d) è uguale a 1.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n+1}{n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}} \right), \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
 - b) (1), (2) e (3);
 - c) solo (1);
 - d) (1) e (2).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
 - b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - c) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - d) esistono infiniti valori di a per cui la funzione f_a ha minimo assoluto.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x|(e^x - 1)$ è vera ?

- a) $f'(\log 2) = 1 + \log 2$;
 - b) f è derivabile due volte nel punto $x_0 = 0$;
 - c) f ha punti di flesso;
 - d) f è limitata inferiormente.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 9} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+19} dx$ è uguale a

- a) 40;
 - b) $\frac{1}{2} \log 80$;
 - c) $\log \sqrt{5}$;
 - d) $\log \sqrt{100}$.
-

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione $xf(x)$ sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$
$$(3) f_3(x) = \begin{cases} x \log^2 x & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1) e (4);
- c) (3) e (4);
- d) solo (4).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 MARZO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova il **presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.

- 2) Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$), dire che “un punto $x_0 \in E$ è un *punto di minimo assoluto* per f ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *assolutamente convergente* se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Dimostrare che una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in un punto $x_0 \in I$ è anche continua in x_0 .

- 2) Enunciare e dimostrare il *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^2
 - a) è uniformemente continua in $]0, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.
- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{3+2\cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.
- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{n! + n} - \frac{x^n}{n^2 + 3} \right]$$
 è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 MARZO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.

- 2) Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$), dire che “un punto $x_0 \in E$ è un *punto di minimo locale* per f ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy* se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema di *unicità del limite* di una successione.

- 2) Provare che una funzione monotona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.

- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione 5^x
 - a) è uniformemente continua in $[0, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.
- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{3-2\cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.
- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 11 APRILE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{|3x-1|-2}{1+\sqrt{7-|3x-1|}}$ è l'insieme

- a) $[-2, -\frac{1}{3}[\cup]1, \frac{8}{3}]$;
- b) $]1, \frac{8}{3}]$;
- c) $] -2, -\frac{1}{3}[\cup]1, \frac{8}{3}[$;
- d) $[-2, \frac{8}{3}]$.

2) Il derivato DE dell'insieme $E = (]-\infty, 0] \setminus \mathbb{Z}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $] -\infty, 0]$;
- b) $] -\infty, 0] \cup \{1, 3\}$;
- c) $\{1, 3\}$;
- d) $] -\infty, 0] \cup \{3\}$.

3) La derivata della funzione $\arcsen^5 \sqrt{1-x^4}$ è uguale a

- a) $-\frac{10x \arcsen^4 \sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}}$;
- b) $-\frac{5 \arcsen^4 \sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}}$;
- c) $\frac{\cos \sqrt{1-x^4}}{\sen^5 \sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$;
- d) $-\frac{10|x| \arcsen^4 \sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}}$.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} (2-x^4)^{11} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^{22} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) -1 e 1 ;
- b) $-1, 0$ e 1 ;
- c) $-\infty$ e 1 ;
- d) solo 1 .

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-1}{4+\cos^4 x} \arcsen \frac{1}{x^2}$

- a) è uguale a 4 ;
- b) è uguale a 0 ;
- c) è uguale a $+\infty$;
- d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arcsen \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsen \frac{n}{n+1}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (3) e (4);
- c) solo (3);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \arctg^3 x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a ;
- b) esistono infiniti valori di a per cui f_a è iniettiva;
- c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 0$;
- d) la funzione f_a ha minimo assoluto se $a \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}]$.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x| + e^x - 1$ è vera ?

- a) f ha un asintoto orizzontale;
- b) $f''(-1) = -\frac{1}{e}$;
- c) il grafico di f ha un punto angoloso;
- d) f è iniettiva.

9) L'integrale indefinito $\int e^{4x} \sen 5e^x dx$ è uguale a

- a) $[\frac{1}{5}y^3 \cos 5y - \frac{3}{5} \int y^2 \cos 5y dy]_{y=e^x}$;
- b) $[-\frac{1}{5}y^3 \cos 5y + \frac{3}{25}y^2 \sen 5y - \frac{6}{25} \int y \sen 5y dy]_{y=e^x}$;
- c) $[\int y^4 \sen 5y dy]_{y=e^x}$;
- d) $[-\frac{1}{5}y^3 \cos 5y + \frac{3}{25}y^2 \sen 5y - \frac{3}{25} \int y \sen 5y dy]_{y=e^x}$.

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione $x^2 + f(x)$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$$(3) f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sen \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} \frac{\sen|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (2) e (3);
- c) (2) e (4);
- d) solo (3).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 11 APRILE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{1 + \sqrt{|2x + 3|} - 4}{9 - |2x + 3|}$ è l'insieme

- a) $[\frac{1}{2}, 3[;$
 b) $] -6, -\frac{7}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 3[;$
 c) $] -6, \frac{1}{2}];$
 d) $] -6, -\frac{7}{2}[\cup] \frac{1}{2}, 3[.$

2) Il derivato DE dell'insieme $E = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^{n+2}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{0, 1, 3\};$
 b) $\{3\};$
 c) $\{0\};$
 d) $\{0, 3\}.$

3) La derivata della funzione $\arcsen^4 \sqrt{1-x^5}$ è uguale a

- a) $\frac{\cos \sqrt{1-x^5}}{\sen^4 \sqrt{1-x^5}} \cdot \frac{-5x^4}{2\sqrt{1-x^5}};$
 b) $-10|x|\sqrt{x} \frac{\arcsen^3 \sqrt{1-x^5}}{\sqrt{1-x^5}};$
 c) $\frac{-10x\sqrt{x} \arcsen^3 \sqrt{1-x^5}}{\sqrt{1-x^5}};$
 d) $\frac{-20x^2 \sqrt{x} \arcsen^3 \sqrt{1-x^5}}{\sqrt{1-x^5}}.$

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (\frac{1}{3})^{x^3-2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) $-\infty$ e $1;$
 b) $-\infty, 1$ e $+\infty;$
 c) -1 e $1;$
 d) solo $-\infty.$

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{4+\cos^4 2x} \arcsen \frac{1}{x^2}$

- a) è uguale a $0;$
 b) non esiste;
 c) è uguale a $1;$
 d) è uguale a $4.$

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{\frac{1}{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right], \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{5}} \right)^{n+4}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n+1}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (2) e (3);
- c) solo (3);
- d) (2) e (3).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}^3 x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa?

- a) il punto $x_0 = 1$ è di minimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) f_a è limitata inferiormente per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) esistono valori di a per cui f_a è derivabile in tutto $\mathbb{R}$;
- d) esistono infiniti valori di a per cui l'equazione $f_a(x) = 0$ ha due soluzioni.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x| + e^x - 1$ è vera ?

- a) f non ha punti di estremo locale;
- b) $f''(1) = 1 + e$;
- c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- d) f è convessa in $\mathbb{R}$.

9) L'integrale indefinito $\int x^7 \cos 4x^2 dx$ è uguale a

- a) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} y^3 \operatorname{sen} 4y + \frac{3}{16} y^2 \cos 4y - \frac{3}{8} \int y \cos 4y dy \right]_{y=x^2}$;
- b) $\frac{x^7}{7} \cdot \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x^2 + c$;
- c) $\frac{1}{2} \left[y^3 \operatorname{sen} 4y - \frac{3}{4} \int y^2 \operatorname{sen} 4y dy \right]_{y=x^2}$;
- d) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} y^3 \operatorname{sen} 4y + \frac{3}{8} y^2 \cos 4y - \frac{3}{8} \int y \cos 4y dy \right]_{y=x^2}$.

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione $[f(x)]^3$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$

$$(3) f_3(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 |x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 |x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (1), (2) e (3);
- b) (1) e (3);
- c) (3) e (4);
- d) solo (1).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 11 APRILE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{|2x - 7| - 6}{1 + \log^2(9 - |2x - 7|)}$ è l'insieme

- a) $[-1, \frac{1}{2}[\cup] \frac{13}{2}, 8]$;
- b) $] -1, \frac{1}{2}[$;
- c) $] -1, 8[$;
- d) $] -1, \frac{1}{2}[\cup] \frac{13}{2}, 8[$.

2) Il derivato DE dell'insieme $E = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-e, e\}$;
- b) $[0, 1]$;
- c) $[0, 1] \cup \left\{ \frac{1}{e}, e \right\}$;
- d) $\left([0, 1] \cap \mathbb{Q} \right) \cup \left\{ \frac{1}{e}, e \right\}$.

3) La derivata della funzione $\arcsen^5 \sqrt{1 - x^6}$ è uguale a

- a) $-\frac{15x|x| \arcsen^4 \sqrt{1-x^6}}{\sqrt{1-x^6}}$;
- b) $-\frac{15x^2 \arcsen^4 \sqrt{1-x^6}}{\sqrt{1-x^6}}$;
- c) $\frac{\cos \sqrt{1-x^6}}{\sin^5 \sqrt{1-x^6}} \cdot \frac{-3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$;
- d) $\frac{30|x| \arcsen^4 \sqrt{1-x^6}}{\sqrt{1-x^6}}$.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2^{x^2+2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Per quali $c \in \mathbb{R}^*$ esiste il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

- a) 1, 2 e $+\infty$;
- b) 2 e $+\infty$;
- c) 1 e 2;
- d) solo 2.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{4 + \cos^4 2x} \arcsen \frac{1}{x^2}$

- a) è uguale a 0;
- b) non esiste;
- c) è uguale a $\frac{4}{5}$;
- d) è uguale a $\frac{1}{5}$.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+2} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n^2 + 1}{n^2}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (2) e (3);
- c) solo (2);
- d) (1) e (3).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}^3 x & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) per ogni $y \in \mathbb{R}$ esistono valori di a per cui l'equazione $f_a(x) = y$ ha soluzioni.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = |x| + e^x - 1$ è vera ?

- a) esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = c$ ha tre soluzioni distinte;
- b) f è derivabile due volte nel punto $x_0 = 0$;
- c) f ha punti di flesso;
- d) f è limitata inferiormente.

9) L'integrale indefinito $\int x^7 \sin 3x^2 dx$ è uguale a

- a) $\frac{x^7}{7} \left[-\frac{1}{6} \cos 3x^2 \right] + c$;
- b) $\left[-\frac{1}{6} y^3 \cos 3y + \frac{1}{3} (y^2 \sin 3y + \int 2y \sin 3y dy) \right]_{y=x^2}$;
- c) $\left[-\frac{1}{6} y^3 \cos 3y + \frac{1}{2} \int y^2 \cos 3y dy \right]_{y=x^2}$;
- d) $\left[\frac{1}{6} y^3 \cos 3y - \int y^2 \cos 3y dy \right]_{y=x^2}$.

10) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione $\sqrt[3]{f(x)}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia derivabile in tale punto.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos^2 x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^{\cos x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \sin^2 x & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$
$$(3) f_3(x) = \begin{cases} x^2 + \log x & \text{se } x > 0 \\ \sin x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{se } x > 0 \\ \sin x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1) e (4);
- c) (3) e (4);
- d) solo (4).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 11 APRILE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova il **presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.

- 2) Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$), dire che “un punto $x_0 \in E$ è un *punto di minimo assoluto* per f ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 3) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è di *accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il *teorema sul limite di una successione crescente*.

- 2) Mostrare un esempio di funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e non integrabile secondo Riemann.

- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^2
 - a) è uniformemente continua in $] - 1, 1[$;
 - b) non è uniformemente continua in $] - \infty, 0]$.
- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{3+2\cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.
- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{n! + n} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 11 APRILE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.
- 2) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *convergente* se ... (completare la definizione).
- 3) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di frontiera* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il *teorema sul limite di una successione decrescente*.
- 2) Enunciare e dimostrare il *teorema di derivazione di una funzione composta*.
- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione $\frac{1}{x}$
 - a) è uniformemente continua in $] - 2, -1[$;
 - b) non è uniformemente continua in $] - 2, 0[$.
- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{3-2\cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.
- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n^2 + 3} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 20 GIUGNO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{|2x-7|-6}{x^2-3x-4}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, -1[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[;$
- b) $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[;$
- c) $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, 4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[;$
- d) $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[.$

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = (]-\infty, 0] \setminus \mathbb{Z}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $(]-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
- b) $\{0\} \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
- c) $(]-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{1, 3\};$
- d) $(]-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}) \cup \{1, 3\}.$

3) La derivata della funzione $\sqrt{1+x}^{\sqrt{1+x}}$ è uguale a

- a) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x}^{\sqrt{1+x}-1};$
- b) $\sqrt{1+x}^{\sqrt{1+x}} \left(\frac{\log \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right);$
- c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x}^{\sqrt{1+x}} \left(\frac{\log \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} + 1 \right);$
- d) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x}^{\sqrt{1+x}-1} (\log \sqrt{1+x} + 1).$

4) L'insieme $A = \{x + \log x : x \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$

- a) è limitato ed ha minimo e massimo;
- b) è limitato, ha massimo ma non ha minimo;
- c) è limitato superiormente, ma non inferiormente, ed ha massimo;
- d) è limitato superiormente, ma non inferiormente, e non ha massimo.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2^{-x}}{\log_3(1+3^{-x})}$ è uguale a

- a) 1;
- b) $\log 3;$
- c) $+\infty;$
- d) $\frac{2}{3}.$

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sin \frac{1}{n^5}}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right) ?$$

- a) (2), (3) e (4);
 - b) (1), (3) e (4);
 - c) solo (3);
 - d) (3) e (4).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a ;
 - b) esistono infiniti valori di a per cui f_a è iniettiva;
 - c) la derivata $f'_a(0)$ esiste solo se $a = 0$;
 - d) la funzione f_a ha minimo assoluto soltanto se $a < -1$.
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) il grafico di f ha un asintoto;
 - b) f ha minimo assoluto;
 - c) f è derivabile due volte in $\mathbb{R}$;
 - d) la restrizione $f|_{]-\infty, \pi]}$ è iniettiva.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 7} \frac{e^x}{(e^x+5)^2} dx$ è uguale a

- a) $\frac{7}{144}$;
 - b) $\frac{1}{144} - \frac{1}{36}$;
 - c) $\frac{1}{12}$;
 - d) $\frac{1}{4}$.
-

10) Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. La condizione "Gli insiemi A e B sono entrambi limitati superiormente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché l'insieme $A \cup B$ sia limitato superiormente.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$$(3) f_3(x) = \begin{cases} |x| \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{|x|}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (1), (3) e (4);
- b) (1) e (3);
- c) (1), (2) e (3);
- d) solo (3).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 20 GIUGNO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{|2x-7|-6}{x^2+3x-4}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, -4[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$;
- b) $]-\infty, -4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$;
- c) $]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$;
- d) $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, 4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) E ;
- b) $E \cup \{0\}$;
- c) $E \cup \{1, 3\}$;
- d) $E \cup \{0, 1, 3\}$.

3) La derivata della funzione $(\sin x)^{\sin x}$ è uguale a

- a) $(\sin x)^{\sin x - 1} \cos x$;
- b) $e^{\sin x \log \sin x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1 \right)$;
- c) $(\sin x)^{\sin x} (\cos x \log \sin x + \cos x)$;
- d) $(\sin x)^{\sin x} \left(\cos x \log \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$.

4) L'insieme $A = \{x - \log x : x \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$

- a) è limitato, ha minimo ma non ha massimo ;
- b) è limitato ma non ha né minimo né massimo ;
- c) è limitato inferiormente, ma non superiormente, ed ha minimo ;
- d) è limitato inferiormente, ma non superiormente, e non ha minimo .

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2\pi^{-x}}{(1+5^{-x})^3 - 1}$ è uguale a

- a) $\frac{1}{3}$;
- b) 0 ;
- c) $\frac{\pi}{15}$;
- d) $+\infty$.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sin \frac{1}{n^2}}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\sin \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\sin \frac{1}{(n+1)^2}} \right], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\sin \frac{1}{n}} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (3) e (4);
- c) solo (3);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 1$ è di minimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) f_a è limitata inferiormente per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) esistono valori di a per cui f_a è derivabile in tutto $\mathbb{R}$;
- d) esistono infiniti valori di a per cui l'equazione $f_a(x) = 0$ ha due soluzioni.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) f ha punti di discontinuità di prima specie;
- b) f ha massimo assoluto;
- c) il grafico di f ha un asintoto;
- d) esistono infiniti $c \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $f(x) = c$ ha soluzione unica.

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^x}{(e^x+3)^2} dx$ è uguale a

- a) $\frac{1}{64} - \frac{1}{16}$;
- b) $\frac{1}{8}$;
- c) $\frac{3}{8}$;
- d) $\frac{5}{64} - \frac{1}{16}$.

10) Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. La condizione "Almeno uno degli insiemi A e B è limitato superiormente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché l'insieme $A \cap B$ sia limitato superiormente.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$

$$(3) f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2|x+1|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ?$$

- a) (1), (3) e (4);
- b) (1) e (4);
- c) (3) e (4);
- d) solo (1).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 20 GIUGNO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{|2x-3|-5}{x^2-7x+\frac{13}{4}}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$;
- b) $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, 4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$;
- c) $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 4[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$;
- d) $]-\infty, -1[\cup]\frac{13}{2}, +\infty[$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $[0, 1] \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- b) $\{0, 1\} \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{3\}$;
- c) $[0, 1] \cup \left\{ \frac{2n+(-1)^n n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{3\}$;
- d) $[0, 1] \cup \{3\}$.

3) La derivata della funzione $(\log x)^{\log x}$ è uguale a

- a) $\frac{(\log x)^{\log x}}{x} (\log \log x + 1)$;
- b) $\frac{(\log x)^{\log x}}{x} (\log \log x + \log x)$;
- c) $(\log x)^{\log x} \left(\frac{\log \log x}{\log x} + \frac{1}{x} \right)$;
- d) $\frac{\log x}{x} (\log x)^{\log x - 1}$.

4) L'insieme $A = \{x - \log x : x \in]0, e] \cap \mathbb{Q}\}$

- a) è limitato, ha minimo ma non ha massimo;
- b) è limitato ma non ha né minimo né massimo;
- c) è limitato inferiormente, ma non superiormente, ed ha minimo;
- d) è limitato inferiormente, ma non superiormente, e non ha minimo.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{-\pi}}{\operatorname{sen} e^{-x}}$ è uguale a

- a) $\frac{1}{e}$;
- b) $e^{-\frac{1}{\pi}}$;
- c) 1;
- d) $+\infty$.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{n}} - \sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{n+1}} \right], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (1), (2) e (3);
- c) solo (2);
- d) (2) e (3).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \leq 0$;
- b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) per ogni $y \in \mathbb{R}$ esistono valori di a per cui l'equazione $f_a(x) = y$ ha soluzioni.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) il grafico di f ha un asintoto;
- b) f è limitata, ma non ha minimo assoluto;
- c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- d) esiste $b > 0$ tale che la restrizione $f|_{]-\infty, b]}$ è iniettiva.

9) L'integrale $\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{(e^x+2)^2} dx$ è uguale a

- a) $\frac{4}{36}$;
- b) $\frac{1}{6}$;
- c) $\frac{1}{2}$;
- d) $\frac{1}{36} - \frac{1}{9}$.

10) Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. La condizione "Almeno uno degli insiemi A e B è limitato superiormente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché l'insieme $A \setminus B$ sia limitato superiormente.

11) Quali tra le seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, hanno primitive in $\mathbb{R}$:

$$(1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{sen}^2 x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos^2 x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{sen}^2 x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$
$$(3) f_3(x) = \begin{cases} x^3 \log x & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (4) f_4(x) = \begin{cases} x^3 - \log x & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} ?$$

- a) (2), (3) e (4);
- b) (2) e (3);
- c) (3) e (4);
- d) solo (2).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 20 GIUGNO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f è *uniformemente continua* in I se ... (completare la definizione).

- 2) Una successione reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *limitata* se ... (completare la definizione).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f è *iniettiva* in I se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \arctg x$. Allora $f'(x) = \dots$ (completare l'enunciato e dimostrare la formula).

- 2) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie a termini non negativi.

- 3) Dimostrare che se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è convessa in I , allora per ogni $x_0 \in I$, la funzione $x \rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente in $I \setminus \{x_0\}$.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+3}}{\sqrt{n+2}} - \frac{2^{n+1}}{n! + n^2} \right]$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{(2 \sin^2 x + \sin x + 17) \cos x}{(10 - \cos^2 x)} dx.$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log |x^2 - 4|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 20 GIUGNO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che F è una *primitiva* di f in I se ... (completare la definizione).

- 2) Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice *divergente a $+\infty$* se ... (completare la definizione).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f ha in $x_0 \in I$ un punto di *discontinuità di prima specie* se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \arcsen x$. Allora $f'(x) = \dots$ (completare l'enunciato e dimostrare la formula).

- 2) Condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente è che $\lim_{n \rightarrow \infty} \dots$ (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Provare che se f è convessa in I , allora f è continua nell'interno di I .

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\log(n+3)} + \frac{(x-1)^n}{n^2+3} \right]$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{(\tan^2 x + 5)(\tan^2 x + 1)}{(\tan x - 1)^2} dx.$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 18 LUGLIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{\operatorname{arctg}(4 - 3^{-2x})}{x^2 - 4x + 3}$ è l'insieme

- a) $]3, +\infty[$;
- b) $] -\infty, \log_3 \frac{1}{2}[\cup]1, 3[$;
- c) $] -\infty, 1[\cup] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[$;
- d) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1[\cup]3, +\infty[$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = [-3, 3] \setminus \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $[-3, 3]$;
- b) $\{\sqrt{e}\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$;
- c) $\{-3, \sqrt{e}, 3\}$;
- d) $\{-3, \sqrt{e}, 3\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

3) La derivata della funzione $(\log x)^{-\log x}$ è uguale a

- a) $\frac{(\log x)^{-\log x}}{-x} (\log \log x + 1)$;
- b) $\frac{(\log x)^{-\log x}}{-x} (\log \log x + \log x)$;
- c) $-(\log x)^{-\log x} \left(\frac{\log \log x}{x} + \frac{1}{\log x} \right)$;
- d) $-\frac{1}{x} (\log x)^{-\log x - 1}$.

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\sqrt{|x|} - x}$ sono:

- a) 0 (min) e $\frac{1}{4}$ (max);
- b) 0 (min); $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (max);
- c) $\frac{1}{4}$ (min) e 0 (max);
- d) solo $\frac{1}{4}$ (max).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x \operatorname{sen} x)}{\log(\operatorname{arctg} x)}$ è uguale a

- a) $-\infty$;
- b) 0;
- c) 1;
- d) 2.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + 1) - n}{\log(n^2 + 1) + n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctg n - \arctg(n + 1)]$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{n^3}\right)$?

- a) solo la (1);
 - b) (1) e (3);
 - c) (2) e (3);
 - d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ a^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
 - b) esistono due valori distinti di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
 - c) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, 1[$;
 - d) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) il grafico di f ha un asintoto;
 - b) f è limitata, ma non ha minimo assoluto;
 - c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
 - d) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{]-\infty, b]}$ è iniettiva.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{(e^x + 2)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)$;
 - b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{9}$;
 - c) $-\frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{2^3} - 1\right)$;
 - d) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{9}\right)$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\left\{\frac{a_n}{a_n^2 + 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(0) = 0$ e $F'(x) = 2x \text{sen } x^4 - \text{sen } x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{x^2} \text{sen } t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = x^2 \text{sen } x^4 - 4x^3 \cos x^4 - \int_0^x \text{sen } t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^{x^2} \text{sen } t^2 dt + \cos^2 x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) F è crescente, definitivamente per $x \rightarrow +\infty$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 18 LUGLIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{\operatorname{arctg}(3 - 2^{3x})}{x^2 + x - 2}$ è l'insieme

- a) $] -2, \log_2 \sqrt[3]{3}[\cup] 1, +\infty[;$
 b) $] 1, +\infty[;$
 c) $] -\infty, -2[\cup] \log_2 \sqrt[3]{3}, 1[;$
 d) $] -\infty, -2[\cup] \frac{1}{3} \log_2 3, +\infty[.$

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E =] -2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-2, -1, 1, 2\};$
 b) $[-2, 2];$
 c) $\{-2, -1, 1, 2\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
 d) $\{-2, 2\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

3) La derivata della funzione $(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x}$ è uguale a

- a) $-(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x - 1} \cos x;$
 b) $-\cos x e^{-\operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x} (\log \cos x + 1);$
 c) $-\cos x (\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} (\log \operatorname{sen} x + 1);$
 d) $-\cos x (\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} \left(\log \operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right).$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ sono:

- a) $-\sqrt{3}$ (max) e $\sqrt{3}$ (min);
 b) $-\sqrt{3}$ (max); 0 e $\sqrt{3}$ (min);
 c) $-\sqrt{3}$ (min) e $\sqrt{3}$ (max);
 d) $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ (max); 0 (min).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log((e^x - 1)x)}{\log(\operatorname{sen}^4 x)}$ è uguale a

- a) $-\infty;$
 b) 0;
 c) $\frac{1}{2};$
 d) 1.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n^2} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (1);
 - b) (1) e (3);
 - c) (2) e (3);
 - d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 & \text{se } x < 0 \\ a^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste solo se $a = 0$;
 - b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - c) l'integrale di Riemann $\int_{[0,1]} f_a(x) dx$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - d) esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{se } x < 0 \\ \cos^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) esistono $a, b > 0$, $a < b$, per cui la restrizione $f|_{[a,b]}$ è iniettiva;
 - b) f ha massimo assoluto;
 - c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
 - d) l'integrale di Riemann $\int_{[a,b]} f(x) dx$ esiste per ogni $a < 0$ ed ogni $b > 0$.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^x}{(e^x+3)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right)$;
 - b) $\frac{1}{64} - \frac{1}{16}$;
 - c) $-\frac{1}{4^3} \left(\frac{1}{2^3} - 1 \right)$;
 - d) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{16} \right)$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\{\sin a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(0) = 0$ e $F'(x) = e^x \sin e^{2x} - \sin x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{e^x} \sin t^2 dt - \int_0^1 \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = \int_x^{e^x} \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^x e^t \sin e^{2t} dt + \int_0^x \cos t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) F è decrescente, definitivamente per $x \rightarrow -\infty$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 18 LUGLIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{\operatorname{arctg}(4 - 3^{-2x})}{x^2 - 4x + 3}$ è l'insieme

- a) $]3, +\infty[$;
 b) $] -\infty, \log_3 \frac{1}{2}[\cup]1, 3[$;
 c) $] -\infty, 1[\cup] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[$;
 d) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1[\cup]3, +\infty[$.

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E = [-3, 3] \setminus \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $[-3, 3]$;
 b) $\{\sqrt{e}\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$;
 c) $\{-3, \sqrt{e}, 3\}$;
 d) $\{-3, \sqrt{e}, 3\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

3) La derivata della funzione $(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x}$ è uguale a

- a) $-(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x - 1} \cos x$;
 b) $-\cos x e^{-\operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x} (\log \cos x + 1)$;
 c) $-\cos x (\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} (\log \operatorname{sen} x + 1)$;
 d) $-\cos x (\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} \left(\log \operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ sono:

- a) $-\sqrt{3}$ (max) e $\sqrt{3}$ (min);
 b) $-\sqrt{3}$ (max); 0 e $\sqrt{3}$ (min);
 c) $-\sqrt{3}$ (min) e $\sqrt{3}$ (max);
 d) $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ (max); 0 (min).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x \operatorname{sen} x)}{\log(\operatorname{arctg} x)}$ è uguale a

- a) $-\infty$;
 b) 0;
 c) 1;
 d) 2.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + 1) - n}{\log(n^2 + 1) + n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctg n - \arctg(n + 1)]$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{n^3}\right)$?

- a) solo la (1);
 - b) (1) e (3);
 - c) (2) e (3);
 - d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ a^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste solo se $a = 0$;
 - b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - c) l'integrale di Riemann $\int_{[0,1]} f_a(x) dx$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
 - d) esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{se } x < 0 \\ \cos^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) esistono $a, b > 0$, $a < b$, per cui la restrizione $f|_{[a,b]}$ è iniettiva;
 - b) f ha massimo assoluto;
 - c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
 - d) l'integrale di Riemann $\int_{[a,b]} f(x) dx$ esiste per ogni $a < 0$ ed ogni $b > 0$.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{(e^x + 2)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)$;
 - b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{9}$;
 - c) $-\frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{2^3} - 1\right)$;
 - d) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{9}\right)$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\left\{\frac{a_n}{a_n^2 + 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(0) = 0$ e $F'(x) = e^x \operatorname{sen} e^{2x} - \operatorname{sen} x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{e^x} \operatorname{sen} t^2 dt - \int_0^1 \operatorname{sen} t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = \int_x^{e^x} \operatorname{sen} t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^x e^t \operatorname{sen} e^{2t} dt + \int_0^x \cos t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) F è decrescente, definitivamente per $x \rightarrow -\infty$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 18 LUGLIO 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO D)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\log \frac{\operatorname{arctg}(3 - 2^{3x})}{x^2 + x - 2}$ è l'insieme

- a) $] -2, \log_2 \sqrt[3]{3}[\cup] 1, +\infty[;$
 b) $] 1, +\infty[;$
 c) $] -\infty, -2[\cup] \log_2 \sqrt[3]{3}, 1[;$
 d) $] -\infty, -2[\cup] \frac{1}{3} \log_2 3, +\infty[.$

2) La frontiera ∂E dell'insieme $E =] -2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-2, -1, 1, 2\};$
 b) $[-2, 2];$
 c) $\{-2, -1, 1, 2\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
 d) $\{-2, 2\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

3) La derivata della funzione $(\log x)^{-\log x}$ è uguale a

- a) $\frac{(\log x)^{-\log x}}{-x} (\log \log x + 1);$
 b) $\frac{(\log x)^{-\log x}}{-x} (\log \log x + \log x);$
 c) $-(\log x)^{-\log x} \left(\frac{\log \log x}{x} + \frac{1}{\log x} \right);$
 d) $-\frac{1}{x} (\log x)^{-\log x - 1}.$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\sqrt{|x|} - x}$ sono:

- a) 0 (min) e $\frac{1}{4}$ (max);
 b) 0 (min); $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (max);
 c) $\frac{1}{4}$ (min) e 0 (max);
 d) solo $\frac{1}{4}$ (max).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log((e^x - 1)x)}{\log(\sin^4 x)}$ è uguale a

- a) $-\infty;$
 b) 0;
 c) $\frac{1}{2};$
 d) 1.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n^2} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (1);
 - b) (1) e (3);
 - c) (2) e (3);
 - d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 & \text{se } x < 0 \\ a^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
 - b) esistono due valori distinti di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
 - c) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, 1]$;
 - d) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è falsa ?

- a) il grafico di f ha un asintoto;
 - b) f è limitata, ma non ha minimo assoluto;
 - c) f è derivabile in $\mathbb{R}$;
 - d) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{]-\infty, b]}$ è iniettiva.
-

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^x}{(e^x+3)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right)$;
 - b) $\frac{1}{64} - \frac{1}{16}$;
 - c) $-\frac{1}{4^3} \left(\frac{1}{2^3} - 1 \right)$;
 - d) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{16} \right)$.
-

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\{\text{sen } a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(0) = 0$ e $F'(x) = 2x \text{sen } x^4 - \text{sen } x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{x^2} \text{sen } t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = x^2 \text{sen } x^4 - 4x^3 \cos x^4 - \int_0^x \text{sen } t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^{x^2} \text{sen } t^2 dt + \cos^2 x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) F è crescente, definitivamente per $x \rightarrow +\infty$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 18 LUGLIO 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova il **presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.

- 2) Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$), dire che "un punto $x_0 \in E$ è un *punto di massimo locale* per f " vuol dire che ... (completare la definizione).

- 3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Dire che "*l'estremo superiore della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è uguale a 5*" vuol dire che ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite della successione prodotto di due successioni convergenti.

- 2) Provare che una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.

- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione $\frac{1}{x^2}$
 - a) è uniformemente continua in $]1, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $]0, 1[$.

- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n^2}}{\sqrt{n}} - \frac{3}{5^{n+1}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 SETTEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(\arctg(4 - 3^{-2x}))}{1 + \log^2(x^2 - 4x + 3)}$ è l'insieme

- a) $]3, +\infty[;$
- b) $] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[;$
- c) $] -\infty, 1[\cup] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[;$
- d) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1[\cup]3, +\infty[.$

2) Il derivato DE dell'insieme $E = [-3, 3] \setminus \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $[-3, 3];$
- b) $[-3, 3] \setminus \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\};$
- c) $\{-3, \sqrt{e}, 3\};$
- d) $\{-3, \sqrt{e}, 3\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$

3) La derivata della funzione $(-\log x)^{\log x}$ è uguale a

- a) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) + 1);$
- b) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) - 1);$
- c) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) + \log x);$
- d) $\frac{1}{x^2} (-\log x)^{\log x - 1}.$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\sqrt{|x|} - 2x^2}$ sono:

- a) 0 (min); $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (max)
- b) $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (entrambi max);
- c) $-\frac{1}{4}$ (min) e $\frac{1}{4}$ (max);
- d) 0 (min); $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ (max).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log(x \arctg x)}$ è uguale a

- a) $+\infty;$
- b) $0;$
- c) $\frac{1}{2};$
- d) $1.$

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log(n^2+1)+n}{\log(n^2+1)+n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} [e^n - e^{n+1}], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{n^2}\right) ?$$

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
- b) esistono due valori distinti di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
- c) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, +\infty[$;
- d) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a .

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \sin^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sono false ?

(1) il grafico di f ha un asintoto; (2) f è limitata, ma non ha minimo assoluto; (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$;

(4) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{]-\infty, b]}$ è iniettiva.

- a) (1) e (2);
- b) (2) e (3);
- c) (2) e (4);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 2} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$;
- b) $\frac{4}{6^3} - \frac{1}{3^3}$;
- c) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{9}\right)$;
- d) $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{9}\right)$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali positivi. La condizione "La successione $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(1) = 0$ e $F'(x) = 2x \sin x^4 - \sin x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{x^2} \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = x^2 \sin x^4 - 4x^3 \cos x^4 - \int_0^x \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 dt + \cos^2 x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) $F(x) = 1 + \int_x^{x^2} \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 SETTEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(\operatorname{arctg}(3 - 2^{3x}))}{1 + \log^4(x^2 + x - 2)}$ è l'insieme

- a) $] -2, \log_2 \sqrt[3]{3}[\cup] 1, +\infty[;$
- b) $] 1, +\infty[;$
- c) $] -\infty, -2[\cup] \log_2 \sqrt[3]{3}, 1[;$
- d) $] -\infty, -2[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =] -2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-1, 1\};$
- b) $[-2, 2];$
- c) $] -2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
- d) $[-2, 2] \setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

3) La derivata della funzione $(-\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ è uguale a

- a) $-(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x - 1} \cos x;$
- b) $\cos x e^{\operatorname{sen} x \log(-\operatorname{sen} x)} (\log(-\operatorname{sen} x) + 1);$
- c) $\cos x (-\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} (\log(-\operatorname{sen} x) - 1);$
- d) $\cos x (-\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \left(\log(-\operatorname{sen} x) - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right).$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $\frac{x^4}{x^2 - 1}$ sono:

- a) $-\sqrt{2}$ (max) e $\sqrt{2}$ (min);
- b) $-\sqrt{2}$ (max); 0 e $\sqrt{2}$ (min);
- c) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ (max); 0 (min);
- d) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ (min); 0 (max).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log(x \operatorname{sen}^4 x)}$ è uguale a

- a) $+\infty;$
- b) 0;
- c) $\frac{1}{5};$
- d) $\frac{1}{4}.$

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \cos \frac{1}{n} - (n+1) \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n^3} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (1);
- b) (1) e (2);
- c) (2) e (3);
- d) (2) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la derivata seconda $f_a''(0)$ esiste solo se $a = 0$;
- b) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- c) l'integrale di Riemann $\int_{[-1,2]} f_a(x) dx$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) l'insieme dei numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a è un insieme finito.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^2 & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

sono false ?

(1) esistono $a < 0$ e $b > 0$, per cui la restrizione $f|_{[a,b]}$ è iniettiva; (2) f ha minimo assoluto (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$; (4) l'integrale di Riemann $\int_{[a,b]} f(x) dx$ esiste per ogni $a < 0$ ed ogni $b > 0$.

- a) (1) e (2);
- b) (1) e (3);
- c) (2) e (3);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+3)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{4} \right)$;
- b) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{28^2} - \frac{1}{16} \right)$;
- c) $\frac{1}{4^3} \left(\frac{25}{7^3} - 1 \right)$;
- d) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{28^2} - \frac{1}{16} \right)$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali appartenenti all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La condizione "La successione $\{\sin a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(1) = 0$ e $F'(x) = e^x \sin e^{2x} - \sin x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{e^x} \sin t^2 dt - \int_0^1 \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = \int_x^{e^x} \sin t^2 dt - \int_1^e \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^x e^t \sin e^{2t} dt + \int_0^x \cos t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) $x \int_1^e \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 SETTEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(\operatorname{arctg}(4 - 3^{-2x}))}{1 + \log^2(x^2 - 4x + 3)}$ è l'insieme

- a) $]3, +\infty[;$
- b) $] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[;$
- c) $] -\infty, 1[\cup] \log_3 \frac{1}{2}, +\infty[;$
- d) $] \log_3 \frac{1}{2}, 1[\cup]3, +\infty[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =]-2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-1, 1\};$
- b) $[-2, 2];$
- c) $] -2, 2[\setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\};$
- d) $[-2, 2] \setminus \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

3) La derivata della funzione $(-\log x)^{\log x}$ è uguale a

- a) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) + 1);$
- b) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) - 1);$
- c) $\frac{(-\log x)^{\log x}}{x} (\log(-\log x) + \log x);$
- d) $\frac{1}{x^2} (-\log x)^{\log x - 1}.$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\sqrt{|x| - 2x^2}}$ sono:

- a) 0 (min); $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (max)
- b) $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ (entrambi max);
- c) $-\frac{1}{4}$ (min) e $\frac{1}{4}$ (max);
- d) 0 (min); $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ (max).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log(x \operatorname{sen}^4 x)}$ è uguale a

- a) $+\infty;$
- b) $0;$
- c) $\frac{1}{5};$
- d) $\frac{1}{4}.$

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \cos \frac{1}{n} - (n+1) \cos \frac{1}{n+1} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n^3} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (1);
- b) (1) e (2);
- c) (2) e (3);
- d) (2) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ ax^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
- b) esistono due valori distinti di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
- c) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, +\infty[$;
- d) esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a .

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \sin^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

sono false ?

(1) il grafico di f ha un asintoto; (2) f è limitata, ma non ha minimo assoluto; (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$;

(4) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{]-\infty, b]}$ è iniettiva.

- a) (1) e (2);
- b) (2) e (3);
- c) (2) e (4);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+3)^3} dx$ è uguale a

- a) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{4} \right)$;
- b) $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{28^2} - \frac{1}{16} \right)$;
- c) $\frac{1}{4^3} \left(\frac{25}{7^3} - 1 \right)$;
- d) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{28^2} - \frac{1}{16} \right)$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali appartenenti all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La condizione "La successione $\{\sin a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(1) = 0$ e $F'(x) = 2x \sin x^4 - \sin x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- a) $F(x) = \int_x^{x^2} \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x) = x^2 \sin x^4 - 4x^3 \cos x^4 - \int_0^x \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 dt + \cos^2 x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) $F(x) = 1 + \int_x^{x^2} \sin t^2 dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 SETTEMBRE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il requisito minimo per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f è una funzione *convessa* in I se ... (completare la definizione).

- 2) Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice *convergente* se ... (completare la definizione).

- 3) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si dice che f ha in $x_0 \in I$ un punto *di discontinuità eliminabile* se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = a^x$ ($a > 0$). Allora $f'(x) = \dots$ (completare l'enunciato e dimostrare la formula).

- 2) Enunciare e dimostrare il teorema di regolarità delle serie a termini non negativi.

- 3) Enunciare e dimostrare il primo teorema di de l'Hôpital.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n - 1000}{n^3 + 3} + \frac{(x - 1)^n}{n + 3} \right]$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{(2 + 5 \sin x - 2 \cos^2 x) \cos x}{(\sin x + 1)^2} dx .$$

- 3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 3 OTTOBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(4-3x)}{1+\log^2(x^2-4x+3)}$ è l'insieme

- a) $] -\infty, \frac{4}{3}[\cup] 3, +\infty[$;
- b) $(] -\infty, 1[\cup] 3, +\infty[) \setminus \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$;
- c) $] -\infty, 1[\cup] \frac{4}{3}, 3[$;
- d) $] -\infty, 1[$.

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $[2, \sqrt{e}]$;
- b) $\{2, \sqrt{e}\}$;
- c) $\{\sqrt{e}\}$;
- d) $E \cup \{\sqrt{e}\}$.

3) La derivata della funzione $(\log x)^{-\log x}$ è uguale a

- a) $-\frac{(\log x)^{-\log x}}{x} (\log(\log x) - 1)$;
- b) $-\frac{(\log x)^{-\log x}}{x} (\log(\log x) + 1)$;
- c) $-\frac{1}{x^2} (\log x)^{-\log x - 1}$;
- d) $\frac{1}{(\log x)^{\log x}} \left(-\frac{2 \log x}{x}\right)$.

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1}$ sono:

- a) 0 (min) e 4 (max);
- b) 0 (max) e 4 (min);
- c) 0 (max) e 12 (min);
- d) 0 e 12 (max); 4 (min).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log(\operatorname{arctg} x)}$

- a) è uguale a $+\infty$;
- b) è uguale a 0;
- c) è uguale a 1;
- d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log(n^2+1)+n}{\log(n^2+1)+\sqrt{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{2n+1}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} [3^n - 3^{n+1}], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{n^2}\right) ?$$

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
- b) non esiste alcun valore a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
- c) il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \in]-\infty, 1[$;
- d) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, +\infty[$.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \sin^2 x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sono false ?

(1) il grafico di f ha un asintoto; (2) f non ha massimo assoluto; (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$; (4) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{[-1,b]}$ è iniettiva.

- a) (1) e (2);
- b) (1) e (3);
- c) (2) e (4);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}} dx$ è uguale a

- a) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$;
- b) $3 - \sqrt{6}$;
- c) $\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}$;
- d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\left\{\frac{a_n}{|a_n|+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) La derivata della funzione $F(x) = \int_0^{x^2} e^t \sin t^2 dt$ è uguale a

- a) $F'(x) = e^{x^2} \sin x^4 + 2x \int_0^{x^2} e^t \sin t^2 dt$;
- b) $F'(x) = 2xe^{x^2} \sin x^4 (e^x \sin x^2 + 2xe^x \cos x^2)$;
- c) $F'(x) = 2xe^{x^2} \sin x^4$;
- d) $F'(x) = 2xe^x \sin x^2$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 3 OTTOBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(1-2x)}{1+\log^4(x^2+x-2)}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [1, +\infty[;$
- b) $(]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 1[) \setminus \left\{ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right\};$
- c) $]-\infty, -2[;$
- d) $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 1[.$

2) Il derivato DE dell'insieme $E = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-1, 1\};$
- b) $[-1, 1];$
- c) $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\};$
- d) $E \cup \{-1, 1\}.$

3) La derivata della funzione $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ è uguale a

- a) $\frac{(\sin x)^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} [\log \sin x + \cos^2 x];$
- b) $e^{\operatorname{tg} x \log(\sin x)} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + 1 \right);$
- c) $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left[\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \right];$
- d) $(\sin x)^{\operatorname{tg} x - 1} \frac{1}{\cos x}.$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\frac{x^3}{3} - 4x + 1}$ sono:

- a) -2 (max) e 2 (min);
- b) -2 (min) e 2 (max);
- c) -2 e 2 (max); 0 (min);
- d) $-2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ (max); 0 (min).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log x}$

- a) è uguale a 1 ;
- b) è uguale a e ;
- c) è uguale a 0 ;
- d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n^2}{1 + n^3} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (2);
- b) (1) e (2);
- c) (2) e (3);
- d) (2), (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la derivata prima $f'_a(1)$ esiste solo se $a = \frac{1}{2}$;
- b) esistono infiniti valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
- c) l'integrale di Riemann $\int_{[-1, \frac{1}{2}]} f_a(x) dx$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) l'insieme dei numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a è un insieme infinito.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sono false ?

(1) esistono $a < 0$ e $b > 0$, per cui la restrizione $f|_{[a,b]}$ è iniettiva; (2) f ha minimo assoluto (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$; (4) l'integrale di Riemann $\int_{[a,b]} f(x) dx$ esiste per ogni $a < 0$ ed ogni $b > 0$.

- a) (1) e (2);
- b) (1) e (3);
- c) (2) e (3);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+24}} dx$ è uguale a

- a) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$;
- b) 2;
- c) $\frac{1}{7} - \frac{1}{5}$;
- d) 1.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\{a_n^3\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) La derivata della funzione $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t^3 dt$ è uguale a

- a) $F'(x) = 6x^3 \cos x^3 \int_0^{x^2} \sin t^3 dt$;
- b) $F'(x) = 2x \sin x^3 \cos x^3$;
- c) $F'(x) = 2x \sin x^3$;
- d) $F'(x) = 2x \sin x^6$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 3 OTTOBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(x^2 - 4x + 3)}{1 + \log^2(4 - 3x)}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, \frac{4}{3}[\cup]3, +\infty[$;
- b) $(]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[) \setminus \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$;
- c) $]-\infty, 1[\cup]\frac{4}{3}, 3[$;
- d) $]-\infty, 1[$.

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ è l'insieme

- a) $\{-1, 1\}$;
- b) $[-1, 1]$;
- c) $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$;
- d) $E \cup \{-1, 1\}$.

3) La derivata della funzione $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ è uguale a

- a) $\frac{(\sin x)^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} [\log \sin x + \cos^2 x]$;
- b) $e^{\operatorname{tg} x \log(\sin x)} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + 1 \right)$;
- c) $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left[\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \right]$;
- d) $(\sin x)^{\operatorname{tg} x - 1} \frac{1}{\cos x}$.

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1}$ sono:

- a) 0 (min) e 4 (max) ;
- b) 0 (max) e 4 (min) ;
- c) 0 (max) e 12 (min) ;
- d) 0 e 12 (max) ; 4 (min) .

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log(\operatorname{arctg} x)}$

- a) è uguale a $+\infty$;
- b) è uguale a 0 ;
- c) è uguale a 1 ;
- d) non esiste .

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right], \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - e^n}{n + e^n}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n^2}{1 + n^3} \cos \frac{1}{n}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n+2} ?$$

- a) solo la (2);
- b) (1) e (2);
- c) (2) e (3);
- d) (2), (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) la derivata prima $f'_a(1)$ esiste solo se $a = \frac{1}{2}$;
- b) esistono infiniti valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
- c) l'integrale di Riemann $\int_{[-1, \frac{1}{2}]} f_a(x) dx$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) l'insieme dei numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a è un insieme infinito.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}^2 x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sono false ?

(1) il grafico di f ha un asintoto; (2) f non ha massimo assoluto; (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$; (4) esiste $b > 0$ per cui la restrizione $f|_{[-1, b]}$ è iniettiva.

- a) (1) e (2);
- b) (1) e (3);
- c) (2) e (4);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}} dx$ è uguale a

- a) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$;
- b) $3 - \sqrt{6}$;
- c) $\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}$;
- d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}$.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\{a_n^3\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente" è

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) La derivata della funzione $F(x) = \int_0^{x^2} \text{sen } t^3 dt$ è uguale a

- a) $F'(x) = 6x^3 \cos x^3 \int_0^{x^2} \text{sen } t^3 dt$;
- b) $F'(x) = 2x \text{sen } x^3 \cos x^3$;
- c) $F'(x) = 2x \text{sen } x^3$;
- d) $F'(x) = 2x \text{sen } x^6$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 3 OTTOBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO D)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\log(x^2 + x - 2)}{1 + \log^4(1 - 2x)}$ è l'insieme

- a) $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [1, +\infty[;$
 b) $(]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 1[) \setminus \left\{ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right\};$
 c) $]-\infty, -2[;$
 d) $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 1[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è l'insieme

- a) $[2, \sqrt{e}];$
 b) $\{2, \sqrt{e}\};$
 c) $\{\sqrt{e}\};$
 d) $E \cup \{\sqrt{e}\}.$

3) La derivata della funzione $(\log x)^{-\log x}$ è uguale a

- a) $-\frac{(\log x)^{-\log x}}{x} (\log(\log x) - 1);$
 b) $-\frac{(\log x)^{-\log x}}{x} (\log(\log x) + 1);$
 c) $-\frac{1}{x^2} (\log x)^{-\log x - 1};$
 d) $\frac{1}{(\log x)^{\log x}} \left(-\frac{2 \log x}{x} \right).$

4) I punti di estremo locale per la funzione reale di variabile reale $e^{\frac{x^3}{3} - 4x + 1}$ sono:

- a) -2 (max) e 2 (min);
 b) -2 (min) e 2 (max);
 c) -2 e 2 (max); 0 (min);
 d) $-2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ (max); 0 (min).

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{\log x}$

- a) è uguale a 1;
 b) è uguale a e;
 c) è uguale a 0;
 d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono divergenti negativamente:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log(n^2+1)+n}{\log(n^2+1)+\sqrt{n}}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{2n+1}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} [3^n - 3^{n+1}], \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{n^2}\right) ?$$

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di f_a ha asintoti;
- b) non esiste alcun valore a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;
- c) il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a se e soltanto se $a \in]-\infty, 1[$;
- d) f_a è iniettiva se e soltanto se $a \in]0, +\infty[$.

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

sono false ?

(1) esistono $a < 0$ e $b > 0$, per cui la restrizione $f|_{[a,b]}$ è iniettiva; (2) f ha minimo assoluto (3) f è derivabile in $\mathbb{R}$; (4) l'integrale di Riemann $\int_{[a,b]} f(x) dx$ esiste per ogni $a < 0$ ed ogni $b > 0$.

- a) (1) e (2);
- b) (1) e (3);
- c) (2) e (3);
- d) (3) e (4).

9) L'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+24}} dx$ è uguale a

- a) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$;
- b) 2;
- c) $\frac{1}{7} - \frac{1}{5}$;
- d) 1.

10) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali. La condizione "La successione $\left\{\frac{a_n}{|a_n|+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è convergente"

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ sia convergente.

11) La derivata della funzione $F(x) = \int_0^{x^2} e^t \sin t^2 dt$ è uguale a

- a) $F'(x) = e^{x^2} \sin x^4 + 2x \int_0^{x^2} e^t \sin t^2 dt$;
- b) $F'(x) = 2xe^{x^2} \sin x^4 (e^x \sin x^2 + 2xe^x \cos x^2)$;
- c) $F'(x) = 2xe^{x^2} \sin x^4$;
- d) $F'(x) = 2xe^x \sin x^2$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 3 OTTOBRE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova il **presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si chiama *estremo superiore* dell'insieme X Si dice che l'insieme X è dotato di *massimo* se ... (completare le definizioni).

- 2) Sia data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$). Dire che "la funzione f è continua in un punto $x_0 \in E$ " vuol dire che Dire che "la funzione f è continua nell'insieme E " vuol dire che ... (completare le definizioni).

- 3) Siano A e B due insiemi. Scrivere le definizioni degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il *teorema di Bolzano-Weierstrass* sui punti di accumulazione.

- 2) Enunciare e dimostrare il *teorema di derivazione di una funzione composta*.

- 3) Provare che una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^2
 - a) è uniformemente continua in $[-1, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $] - \infty, 0]$.

- 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{(2 \sin^2 x + \sin x + 17) \cos x}{(5 - \cos^2 x)} dx .$$

- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{5}{3^{n+1}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirmi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 NOVEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\frac{2^{x^2-x}-1}{x+2}} - \log(2^{x^2-x} + 1)$ è l'insieme

- a) $] -2, 0] \cup [1, +\infty[$;
- b) $] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$;
- c) $] -\infty, 0] \cup [2, +\infty[$;
- d) $] -2, 0[\cup] 1, +\infty[$.

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =]\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$ è l'insieme

- a) $[\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$;
- b) $[\frac{1}{2}, +\infty[$;
- c) $\{\frac{1}{2}\} \cup \mathbb{N}^+$;
- d) $\{\frac{1}{2}\}$.

3) La derivata della funzione $\text{arctg } x^{\sqrt{x}}$ è uguale a

- a) $\frac{x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{x} \right)$;
- b) $\frac{x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \frac{1}{2\sqrt{x}} (\log x + 1)$;
- c) $\frac{x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2} \log x + 1 \right)$;
- d) $\frac{x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} x^{\sqrt{x}-1}$.

4) Il minimo assoluto della funzione $e^{2x^3-15x^2+24x-7}$ nell'intervallo $[0, 2[$

- a) è uguale a e^{-7} ;
- b) è uguale a e^4 ;
- c) è uguale a e^{-3} ;
- d) non esiste.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\log^2 x} \right)^{\sqrt{x} \sin x}$

- a) è uguale a $+\infty$;
- b) è uguale a 0;
- c) è uguale a $\frac{1}{2}$;
- d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n+3}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+1}{2n+3}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{2n+3}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}+1}{2n+3} - \frac{\sqrt{n+1}+1}{2n+5} \right]$?

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ a + \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono valori di a per i quali la funzione f_a ha minimo assoluto;
- b) esistono valori di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- c) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- b) f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- c) nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;
- d) esiste la derivata seconda $f''(0)$.

9) L'integrale $\int_{\log \frac{\pi}{2}}^{\log \pi} e^{2x} \sin e^x dx$ è uguale a

- a) $\frac{\pi}{2}$;
- b) $\pi - 1$;
- c) $\frac{3\pi}{2}$;
- d) $e^\pi - 1$.

10) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è limitata in $[0, 1]$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia continua in $[0, 1]$.

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni

è vera?

- a) l'integrale $\int_{-\pi}^{\sqrt{\pi}} f(x) dx$ è uguale a zero;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} x - \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{x}{2} \cos x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirimi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 NOVEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\frac{x^2 - 4}{2^{x^2-x} + 1}} + \log(2^{x^2-x} - 1)$ è l'insieme

- a) $]-\infty, -2] \cup]0, 1[\cup [2, +\infty[;$
 b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[;$
 c) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[;$
 d) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ è l'insieme

- a) $E \cup \{0\};$
 b) $\mathbb{R};$
 c) $\mathbb{R} \setminus \{0\};$
 d) $\{0\}.$

3) La derivata della funzione $\arctg \sqrt{x}^x$ è uguale a

- a) $\frac{\sqrt{x}^x}{2(1+x^x)} (\log x + 1);$
 b) $\frac{x\sqrt{x}^{x-1}}{1+x^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$
 c) $\frac{\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\frac{1}{2} \log x + 1);$
 d) $\frac{2\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\log x + x).$

4) Il minimo assoluto della funzione $e^{2x^3 - 15x^2 + 24x - 7}$ nell'intervallo $]0, 2]$

- a) è uguale a $e^{-7};$
 b) è uguale a $e^4;$
 c) è uguale a $e^{-3};$
 d) non esiste.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\log^4 x}\right)^{\sqrt{x} + \sin x}$

- a) è uguale a $+\infty;$
 b) è uguale a $0;$
 c) è uguale a $\frac{1}{2};$
 d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n+3}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n^2+3} \right), \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{2n+3} ?$$

- a) (1) e (3);
 - b) (2) e (4);
 - c) (2), (3) e (4);
 - d) (3) e (4).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) f_a è iniettiva se e soltanto se $a > 2$;
 - b) esistono infiniti valori di a per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
 - c) esistono valori di a per cui il punto $x_0 = 0$ è di minimo locale per f_a ;
 - d) esistono valori di a per cui il punto $x_1 = 1$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
 - b) f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
 - c) nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;
 - d) esiste la derivata seconda $f''(0)$.
-

9) L'integrale $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos x^2 dx$ è uguale a

- a) 0;
 - b) $-\frac{1}{2}$;
 - c) -1;
 - d) $\frac{1}{2}$.
-

10) Sia $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è limitata in $[0, 1[$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia continua in $[0, 1[$.

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ è uguale a zero;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} x - \sin x & \text{se } x < 0 \\ x - \cos x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirmi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 NOVEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\frac{2^{x^2-x}-1}{x+2}} - \log(2^{x^2-x} + 1)$ è l'insieme

- a) $] -2, 0] \cup [1, +\infty[$;
- b) $] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$;
- c) $] -\infty, 0] \cup [2, +\infty[$;
- d) $] -2, 0[\cup] 1, +\infty[$.

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =]\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$ è l'insieme

- a) $[\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$;
- b) $[\frac{1}{2}, +\infty[$;
- c) $\{\frac{1}{2}\} \cup \mathbb{N}^+$;
- d) $\{\frac{1}{2}\}$.

3) La derivata della funzione $\arctg \sqrt{x}^x$ è uguale a

- a) $\frac{\sqrt{x}^x}{2(1+x^x)} (\log x + 1)$;
- b) $\frac{x\sqrt{x}^{x-1}}{1+x^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
- c) $\frac{\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\frac{1}{2} \log x + 1)$;
- d) $\frac{2\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\log x + x)$.

4) Il minimo assoluto della funzione $e^{2x^3-15x^2+24x-7}$ nell'intervallo $]0, 2]$

- a) è uguale a e^{-7} ;
- b) è uguale a e^4 ;
- c) è uguale a e^{-3} ;
- d) non esiste.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\log^2 x}\right)^{\sqrt{x} \sin x}$

- a) è uguale a $+\infty$;
- b) è uguale a 0 ;
- c) è uguale a $\frac{1}{2}$;
- d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n+3}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+1}{2n+3}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{2n+3}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}+1}{2n+3} - \frac{\sqrt{n+1}+1}{2n+5} \right]$?

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) f_a è iniettiva se e soltanto se $a > 2$;
- b) esistono infiniti valori di a per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
- c) esistono valori di a per cui il punto $x_0 = 0$ è di minimo locale per f_a ;
- d) esistono valori di a per cui il punto $x_1 = 1$ è di massimo locale per f_a .

8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- b) f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- c) nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;
- d) esiste la derivata seconda $f''(0)$.

9) L'integrale $\int_{\log \frac{\pi}{2}}^{\log \pi} e^{2x} \sin e^x dx$ è uguale a

- a) $\frac{\pi}{2}$;
- b) $\pi - 1$;
- c) $\frac{3\pi}{2}$;
- d) $e^\pi - 1$.

10) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è limitata in $[0, 1]$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia continua in $[0, 1]$.

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ è uguale a zero;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} x - \sin x & \text{se } x < 0 \\ x - \cos x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirmi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 7 NOVEMBRE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Scrivere una definizione di *spazio metrico*.

- 2) Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$), dire che “un punto $x_0 \in E$ è un *punto di massimo locale* per f ” vuol dire che ... (completare la definizione).

- 3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Dire che “*l'estremo superiore della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è uguale a 5*” vuol dire che ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite della successione prodotto di due successioni convergenti.

- 2) Provare che una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.

- 3) Enunciare e dimostrare il *criterio della condensazione* per le serie a termini positivi.

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione $\frac{1}{x^2}$
 - a) è uniformemente continua in $]1, 2[$;
 - b) non è uniformemente continua in $]0, 1]$.
- 2) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$
 - a) nell'intervallo $[0, \pi[$;
 - b) nell'intervallo $[0, 2\pi[$.
- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n^2}}{\sqrt{n}} - \frac{3}{5^{n+1}} \right]$$

è convergente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Prof. A. Villani, R. Cirimi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 DICEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\frac{x+2}{2^{x^2-x}-1}} - \log(2^{x-x^2} + 1)$ è l'insieme

- a) $] -2, 0[\cup] 1, +\infty[;$
 b) $] -\infty, 0[\cup] 1, +\infty[;$
 c) $] -\infty, 0[\cup [2, +\infty[;$
 d) $] -2, 0[\cup] 1, +\infty[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =]\frac{1}{2}, +\infty[\cup \mathbb{Z}$ è l'insieme

- a) $[\frac{1}{2}, +\infty[\cup \mathbb{Z};$
 b) $[\frac{1}{2}, +\infty[;$
 c) $\{\frac{1}{2}\} \cup \mathbb{Z};$
 d) $\{\frac{1}{2}\}.$

3) La derivata della funzione $\text{arctg}(x^{-\sqrt{x}})$ è uguale a

- a) $\frac{-x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right);$
 b) $\frac{-x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \frac{1}{2\sqrt{x}} (\log x + 1);$
 c) $\frac{-x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2} \log x + \sqrt{x} \right);$
 d) $\frac{x^{\sqrt{x}}}{1+x^{2\sqrt{x}}} \left[-\sqrt{x} \cdot x^{-\sqrt{x}-1} \right].$

4) Il massimo assoluto della funzione $e^{2x^3+3x^2-12x}$ nell'intervallo $[0, 2[$

- a) è uguale a 1;
 b) è uguale a e^4 ;
 c) è uguale a e^{20} ;
 d) non esiste.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2^x} \right)^{\sqrt{x} \sin x}$

- a) è uguale a e ;
 b) è uguale a 0;
 c) è uguale a 1;
 d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+3}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}}{2n+3} - \frac{\sqrt{n+1}}{2n+5} \right] ?$$

- a) (1) e (3);
- b) (2) e (4);
- c) (2), (3) e (4);
- d) (3) e (4).

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2a + \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) esistono valori di a per i quali la funzione f_a ha minimo assoluto;
- b) esistono valori di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- c) l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- d) esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- b) f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- c) nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;
- d) esiste la derivata seconda $f''(0)$.

9) L'integrale $\int_{\log \frac{\pi}{2}}^{\log \pi} e^{2x} \cos e^x dx$ è uguale a

- a) $-\frac{\pi}{2} + 1$;
- b) $-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$;
- c) $-\frac{3\pi}{2}$;
- d) $-\frac{\pi}{2} - 1$.

10) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è derivabile in $]0, 1[$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia continua in $[0, 1]$.

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ -\pi x \sin x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera?

- a) l'integrale $\int_{-\pi}^{\sqrt{\pi}} f(x) dx$ è uguale a zero;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} x - \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} (\cos x^2 - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirimi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 DICEMBRE 2014
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $\sqrt{\frac{x^2 - 4}{2^{x^2-x} - 1}} + \log(2^{x^2-x} + 1)$ è l'insieme

- a) $]-\infty, -2] \cup]0, 1[\cup [2, +\infty[;$
 b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[;$
 c) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[;$
 d) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$

2) Il derivato $D E$ dell'insieme $E =]0, +\infty[\setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ è l'insieme

- a) $E \cup \{0\};$
 b) $]0, +\infty[;$
 c) $[0, +\infty[;$
 d) $\{0\}.$

3) La derivata della funzione $\arctg(\sqrt{x}^{-x})$ è uguale a

- a) $\frac{-\sqrt{x}^x}{2(1+x^x)} (\log x + 1);$
 b) $\frac{-x\sqrt{x}^{x-1}}{1+x^{-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$
 c) $\frac{-\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\frac{1}{2} \log x + 1);$
 d) $\frac{-2\sqrt{x}^x}{1+x^x} (\log x + x).$

4) Il massimo assoluto della funzione $e^{2x^3+3x^2-12x}$ nell'intervallo $[0, 2]$

- a) è uguale a 1;
 b) è uguale a e^4 ;
 c) è uguale a e^{20} ;
 d) non esiste.

5) Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2^x}\right)^{\sin x - \pi^x}$

- a) è uguale a e ;
 b) è uguale a 0;
 c) è uguale a 1;
 d) non esiste.

6) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n+1}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n^2+1}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2n+3}}{n^2+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+1} \right)$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2n+3}}{n+1}$?

- a) (1) e (3);
 - b) (2) e (4);
 - c) (2), (3) e (4);
 - d) (3) e (4).
-

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2a + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- a) f_a è iniettiva se e soltanto se $a > 1$;
 - b) esistono infiniti valori di a per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo;
 - c) esistono valori di a per cui il punto $x_0 = 0$ è di minimo locale per f_a ;
 - d) esistono valori di a per cui il punto $x_1 = 1$ è di massimo locale per f_a .
-

8) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a) f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
 - b) f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
 - c) nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;
 - d) esiste la derivata seconda $f''(0)$.
-

9) L'integrale $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \sin x^2 dx$ è uguale a

- a) 0;
 - b) $-\frac{\pi}{2}$;
 - c) π ;
 - d) $\frac{\pi}{2}$.
-

10) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. La condizione "La funzione f è uniformemente continua in $[0, 1]$ "

- a) è necessaria e sufficiente;
- b) è necessaria ma non sufficiente;
- c) è sufficiente ma non necessaria;
- d) non è né necessaria né sufficiente

affinché la funzione f sia continua in $[0, 1]$.

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & \text{se } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni

è vera ?

- a) l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ è uguale a zero;
- b) una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} 2x - \sin x & \text{se } x < 0 \\ x - \cos x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- c) la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- d) la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani, R. Cirmi e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 12 DICEMBRE 2014
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (definizioni)

- 1) Si dice che due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono *separati* se Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono due insiemi separati, si dice che A, B sono *contigui* se ... (completare le definizioni).

- 2) Sia data una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$). Dire che “ Un punto $x_0 \in E$ è un *punto di massimo assoluto* per la funzione f ” vuol dire che Dire che “ Un punto $x_0 \in E$ è un *punto di massimo locale* per la funzione f ” vuol dire che ... (completare le definizioni).

- 3) Siano A e B due insiemi. Scrivere le definizioni degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

Quesiti di tipo T (teoremi)

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite della successione prodotto di due successioni convergenti.

- 2) Enunciare e dimostrare il teorema dell'esistenza degli zeri.

- 3) Se F è una primitiva della funzione f nell'intervallo I , allora tutte e sole le primitive di f nell'intervallo I sono ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

Quesiti di tipo E (esercizi)

- 1) Provare che la funzione x^2
 - a) è uniformemente continua in $[0, 1[$;
 - b) non è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

- 2) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{2\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{2x+1} [4x + \sqrt{2x+1} + 7]} dx.$$

- 3) Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n + \log n}{2n - \sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \right]$$

è convergente.

SOLUZIONI DEI QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

6 febbraio 2014

Compito A: 1 b; 2 c; 3 b; 4 b; 5 c; 6 c; 7 b; 8 a; 9 b; 10 b; 11 b.

Compito B: 1 d; 2 c; 3 b; 4 a; 5 d; 6 c; 7 b; 8 d; 9 d; 10 c; 11 d.

Compito C: 1 c; 2 d; 3 a; 4 b; 5 c; 6 b; 7 c; 8 d; 9 b; 10 a; 11 d.

21 febbraio 2014

Compito A: 1 c; 2 d; 3 d; 4 c; 5 b; 6 d; 7 c; 8 a; 9 c; 10 c; 11 c.

Compito B: 1 b; 2 c; 3 b; 4 d; 5 d; 6 d; 7 c; 8 d; 9 b; 10 a; 11 a.

Compito C: 1 d; 2 c; 3 c; 4 b; 5 c; 6 d; 7 b; 8 b; 9 c; 10 b; 11 d.

7 marzo 2014

Compito A: 1 d; 2 d; 3 d; 4 c; 5 b; 6 b; 7 d; 8 d; 9 a; 10 b; 11 b.

Compito B: 1 c; 2 d; 3 b; 4 b; 5 d; 6 a; 7 c; 8 c; 9 b; 10 a; 11 b.

Compito C: 1 a; 2 c; 3 b; 4 c; 5 d; 6 b; 7 c; 8 c; 9 c; 10 c; 11 c.

11 aprile 2014

Compito A: 1 a; 2 b; 3 a; 4 a; 5 d; 6 b; 7 d; 8 c; 9 b; 10 a; 11 b.

Compito B: 1 b; 2 a; 3 c; 4 a; 5 a; 6 d; 7 c; 8 d; 9 a; 10 b; 11 b.

Compito C: 1 d; 2 c; 3 a; 4 a; 5 c; 6 b; 7 c; 8 d; 9 c; 10 c; 11 b.

20 giugno 2014

Compito A: 1 b; 2 c; 3 d; 4 c; 5 c; 6 a; 7 d; 8 c; 9 c; 10 a; 11 b.

Compito B: 1 a; 2 d; 3 c; 4 c; 5 b; 6 b; 7 c; 8 a; 9 b; 10 c; 11 b.

Compito C: 1 c; 2 c; 3 a; 4 c; 5 d; 6 d; 7 c; 8 b; 9 b; 10 d; 11 b.

18 luglio 2014

Compito A: 1 d; 2 d; 3 a; 4 a; 5 d; 6 a; 7 b; 8 c; 9 d; 10 b; 11 a.

Compito B: 1 c; 2 c; 3 c; 4 a; 5 c; 6 c; 7 b; 8 c; 9 d; 10 b; 11 a.

Compito C: 1 d; 2 d; 3 c; 4 a; 5 d; 6 a; 7 b; 8 c; 9 d; 10 b; 11 a.

Compito D: 1 c; 2 c; 3 a; 4 a; 5 c; 6 c; 7 b; 8 c; 9 d; 10 b; 11 a.

12 settembre 2014

Compito A: 1 d; 2 a; 3 a; 4 a; 5 c; 6 d; 7 b; 8 c; 9 c; 10 b; 11 a.

Compito B: 1 d; 2 b; 3 b; 4 d; 5 c; 6 b; 7 d; 8 b; 9 b; 10 a; 11 b.

Compito C: 1 d; 2 b; 3 a; 4 a; 5 c; 6 b; 7 b; 8 c; 9 b; 10 a; 11 a.

3 ottobre 2014

Compito A: 1 d; 2 c; 3 b; 4 b; 5 c; 6 c; 7 d; 8 b; 9 b; 10 b; 11 c.

Compito B: 1 c; 2 a; 3 a; 4 a; 5 a; 6 c; 7 a; 8 b; 9 b; 10 a; 11 d.

Compito C: 1 d; 2 a; 3 a; 4 b; 5 c; 6 c; 7 a; 8 b; 9 b; 10 a; 11 d.

Compito D: 1 c; 2 c; 3 b; 4 a; 5 a; 6 c; 7 d; 8 b; 9 b; 10 b; 11 c.

7 novembre 2014

Compito A: 1 a; 2 b; 3 c; 4 a; 5 d; 6 d; 7 c; 8 d; 9 b; 10 b; 11 d.

Compito B: 1 c; 2 b; 3 a; 4 d; 5 a; 6 c; 7 a; 8 d; 9 c; 10 d; 11 c.

Compito C: 1 a; 2 b; 3 a; 4 d; 5 d; 6 d; 7 a; 8 d; 9 b; 10 b; 11 c.

12 dicembre 2014

Compito A: 1 d; 2 b; 3 a; 4 d; 5 c; 6 d; 7 c; 8 c; 9 d; 10 d; 11 b.

Compito B: 1 a; 2 c; 3 a; 4 b; 5 b; 6 c; 7 a; 8 c; 9 d; 10 b; 11 b.