| UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA | COGNOME e NOME: | |
|---|---|---|
| Facoltà di Ingegneria | FIRMA: | |
| docenti: A.O.Caruso – A.Villani | MATRICOLA: | |
| C.d.L. in Ingegneria Industriale (A–Sala) | REGOLARITÀ STUDI: | ☐ In Regola ☐ Ripetente ☐ Fuori Corso |
| Anno Accademico 2011/ 2012 | PROGRAMMA DEL PROF.: | |
| Prova d'Esame di Analisi Matematica 1 del 20/02/2012 | CORSO SEGUITO NELL'A.A.: | |

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno** però **consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 $\rightarrow$ 30/30 *e lode.*

## Quesiti *( svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati )*

***1)*** Il dominio della funzione reale $f$ di una variabile reale definita dalla posizione

$$f(x) = \log_{|x+2|}\left(\arctan\sqrt{x^2-1} - \arctan x\right)$$

è

☐ *a)* $]-\infty,-1[$ ;

☐ *b)* $]-\infty,-2[$ ;

☐ *c)* $]-\infty,-3[\cup]-3,-1[\setminus\{-2\}$ ;

☐ *d)* $]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$ .

---

***2)*** Siano $f,g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$. La negazione della frase " $\forall\, x\in[0,+\infty[\ \Longrightarrow\ g(z)<f(x)\ \ \forall\, z\in[x,+\infty[$ " è

☐ *a)* " $\forall\, x\in[0,+\infty[\ \Longrightarrow:\ g(z)\geq f(x)\ \ \forall\, z\in[x,+\infty[$ " ;

☐ *b)* " $\exists\, x\in[0,+\infty[:\ f(z)<g(x)\ \ \forall\, z\in[x,+\infty[$ " ;

☐ *c)* " $\exists\, x\in[0,+\infty[\ ,\ \exists\, z\in[x,+\infty[:\ g(z)\geq f(x)$ " ;

☐ *d)* " $\forall\, x\in[0,+\infty[\ ,\ \exists\, z\in[x,+\infty[:\ g(z)\leq f(x)$ " .

---

***3)*** Siano $a\in\mathbb{R}$ un parametro reale ed $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus[0,1] \\ x+a & \text{se } x\in[0,1] \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* $f$ è continua se e solo se $a=1$ ;

☐ *b)* non esiste alcun valore di $a$ per il quale il punto $x_0=0$ è un punto di massimo locale ;

☐ *c)* non esiste alcun valore di $a$ per il quale il punto $x_0=0$ è un punto di minimo locale ;

☐ *d)* esiste un unico valore di $a$ per il quale $f$ è iniettiva .

---

***4)*** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. La condizione $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{a_n}}=0$

☐ *a)* è necessaria e sufficiente ,

☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente ,

☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria ,

☐ *d)* non è né necessaria né sufficente ,

affinchè la serie di termine generale $a_n$ sia convergente .

---

***5)*** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{x^2} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* $f$ ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;

☐ *b)* $f$ è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;

☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di $f$;

☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

***6)*** Posto $f(x) = x^x$ risulta

☐ *a)* $xf = xf' + f \log f'$;

☐ *b)* $xf' = xf + f \log f$;

☐ *c)* $xf' = xf + f \log f'$;

☐ *d)* nessuna delle precedenti.

---

## Esercizi ( *svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30* )

***1)*** Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

---

***2)*** Determinare tutti i valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(\alpha - 3) \cdot \sqrt{n^{\alpha+1} + 1} \cdot \sin\frac{1}{n\sqrt{n}}\right].$$

---

***3)*** Studiare la funzione reale $f$ di una variabile reale definita dalla posizione

$$f(x) = \log\frac{\sqrt[3]{x+2}}{|x+8|},$$

provando, in particolare, che non vi sono asintoti obliqui e che vi è un solo punto di flesso, e disegnarne un grafico qualitativo.

---

## Definizioni ( *dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata* )

***1)*** Definizione di successione di numeri reali convergente a $-\frac{1}{2}$.

---

***2)*** Definizione di punto di massimo locale per una funzione reale di una variabile reale, definita in un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

---

***3)*** Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ dicesi di accumulazione per un un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ quando . . . .

---

## Teoremi ( *dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette* )

***1)*** Teorema della permanenza del segno generalizzato.

---

***2)*** Esistenza di una sottosuccessione convergente per una successione limitata.

---

***3)*** Teorema di Cauchy.