UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	COGNOME e NOME:	
Facoltà di Ingegneria	FIRMA:	
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	MATRICOLA:	
C.d.L. in Ingegneria Industriale (A–Sala)	REGOLARITÀ STUDI:	☐ In Regola ☐ Ripetente ☐ Fuori Corso
Anno Accademico 2011/2012	PROGRAMMA DEL PROF.:	
Prova d'Esame di Analisi Matematica 1 del 16/03/2012	CORSO SEGUITO NELL'A.A.:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno** però **consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 $\rightarrow$ 30/30 *e lode*.

Quesiti (*svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati*)

1) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali:

$$x_1 = \log_2 \frac{33}{2} \quad , \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \quad , \quad x_3 = \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad , \quad x_4 = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^7 \quad .$$

☐ *a)* $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$;

☐ *b)* $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$;

☐ *c)* $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$;

☐ *d)* $x_1 < x_2 < x_4 < x_3$.

---

2) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La negazione della frase " La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al numero 5 " è:

☐ *a)* " Esiste una sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad un numero diverso da 5 " ;

☐ *b)* " Esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_{k_n} - 5| > 0$ " ;

☐ *c)* " Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_{k_n} - 5| \geq \varepsilon$ " ;

☐ *d)* " Esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \, : \, |a_n - 5| < \varepsilon\}$ è un insieme finito " .

---

3) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{x} - \log x$ è falsa?

☐ *a)* la funzione f è crescente, definitivamente per $x \to +\infty$;

☐ *b)* esiste $c > 0$ tale che la restrizione $f|_{[c,c+4]}$ è decrescente ;

☐ *c)* la funzione f è dotata di minimo assoluto nel suo insieme di definizione ;

☐ *d)* il dominio di f è un insieme aperto .

---

4) Dato l'insieme $X_\alpha = \{2^{-n} \, : \, n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, quali delle seguenti affermazioni è vera?

☐ *a)* l'insieme X_α ha massimo soltanto se $\alpha > 0$;

☐ *b)* l'insieme X_α ha minimo soltanto se $\alpha > 0$;

☐ *c)* qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una successione di elementi di X_α che converge al numero α ;

☐ *d)* esiste un unico $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$ di accumulazione per l'insieme $X_{\overline{\alpha}}$.

---

5) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x} & \text{se } x < 0 \\ e^{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} ,$$

quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente;
- ☐ *c)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\left(e^{-3x}-2\right) & \text{se } x<0 \\ e^x - \frac{2}{3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;
- ☐ *d)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}e^{-3x} & \text{se } x<0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

---

6)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\frac{1}{n} \cos\frac{1}{n^2}$, $p \in \mathbb{R}$,

- ☐ *a)* converge per qualche $p > -1$;
- ☐ *b)* converge se e solo se $p > 0$;
- ☐ *c)* converge semplicemente per ogni $p \in]-1,1[$;
- ☐ *d)* verifica le ipotesi del criterio di Leibniz per qualche $p < 0$.

Esercizi (*svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30*)

1) Posto

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3^x & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$$

verificare che la restrizione della funzione f all'intervallo $[0,1]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange; detto poi c il punto che soddisfa la tesi del teorema, determinarlo.

---

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n .$$

---

3) Posto $f(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|x+1|}$, determinarne il dominio e, in particolare, le eventuali simmetrie; dopo aver poi studiato la funzione, tracciarne un grafico qualitativo.

Definizioni (*dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata*)

1) Definizione di primitiva di una funzione.

---

2) Definizione di estremo inferiore di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

---

3) Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata dicesi integrabile secondo Riemann quando . . . (completare la definizione).

Teoremi (*dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette*)

1) Provare che $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

---

2) Caratterizzazione degli insiemi compatti.

---

3) Se la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è derivabile in un punto $x_0 \in I$, allora essa è anche . . . (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).