UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	**COGNOME e NOME:**
Facoltà di Ingegneria	**FIRMA:**
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	**MATRICOLA:**
C.d.L. in Ingegneria Industriale (A–Sala)	**REGOLARITÀ STUDI:** ☐ **In Regola** ☐ **Ripetente** ☐ **Fuori Corso**
Anno Accademico 2011/2012	**PROGRAMMA DEL PROF.:**
Prova d'Esame di Analisi Matematica 1 del 05/10/2012	**CORSO SEGUITO NELL'A.A.:**

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno** però **consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 → 30/30 *e lode.*

Quesiti (*svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati*)

1) Il dominio della funzione reale f di una variabile reale definita dalla posizione

$$f(x) = \frac{\log_3\left(x^2+4x-5\right)}{\sqrt{3^{x^2+x-3}-27}}$$

è

- ☐ *a)* $]-5,-3[\cup]1,2[$;
- ☐ *b)* $]-\infty,-5[\cup]-3,1[\cup]2,+\infty[$;
- ☐ *c)* $]-\infty,-5[\cup]2,+\infty[$;
- ☐ *d)* $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$.

---

2) Dato l'insieme $A = \left\{\frac{[1+(-1)^n]n^2}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ è vero che:

- ☐ *a)* A non ha punti di accumulazione ;
- ☐ *b)* A ha un unico punto di accumulazione ,
- ☐ *c)* A ha infiniti punti di accumulazione ,
- ☐ *d)* nessuna delle precedenti risposte è corretta .

---

3) Sia f la funzione reale di variabile reale definita ponendo $f(x) = |x \operatorname{sen} x| \ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- ☐ *a)* f non è derivabile nel punto $x_0 = 0$;
- ☐ *b)* f è derivabile nel punto $x_0 = 0$, ma non esiste la derivata seconda $f''(0)$;
- ☐ *c)* f è dotata di derivate di qualunque ordine nel punto $x_0 = 0$;
- ☐ *d)* nessuna delle precedenti affermazioni è corretta .

---

4) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right]$$

- ☐ *a)* converge ;
- ☐ *b)* diverge a $+\infty$;
- ☐ *c)* diverge a $-\infty$;
- ☐ *d)* è non regolare .

---

5) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{e}^x - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;

☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \mathrm{e}^x - x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;

☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;

☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

---

6) Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(1 + x\Big)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

☐ *a)* è uguale a 1 ;

☐ *b)* è uguale a e ;

☐ *c)* è uguale a $+\infty$;

☐ *d)* non esiste .

Esercizi (***svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30***)

---

1) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \operatorname{sen} x^2 \,\mathrm{d}x \ .$$

---

2) Dire quali delle seguenti serie sono convergenti. Giustificare la risposta data.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-\frac{1}{n^2}} \quad , \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \quad , \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$$

---

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{1 - x|x|}{1 + x^2}$$

e disegnarne il grafico.

Definizioni (***dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata***)

---

1) Si dice che il numero reale L è l'*estremo superiore* dell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se ... (completare la definizione) .

---

2) Scrivere la definizione di *punto di massimo locale* per una funzione reale di variabile reale .

---

3) Si dice che una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è *convergente* a 3 per $x \to +\infty$ se ... (completare la definizione) .

Teoremi (***dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette***)

---

1) Dimostrare che ogni successione limitata possiede una sottosuccessione convergente.

---

2) Condizione sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo I, sia crescente in I è che risulti $f'(x)$ ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione) .

---

3) Dimostrare che il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos x$ non esiste.