UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 FEBBRAIO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_{4+\operatorname{sen} x}\left(4 - 2^{\frac{x}{\sqrt{x}-1}+3}\right)$ è l'insieme

- ☐ *a)* $\left]0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$;
- ☐ *b)* $\left]\frac{5-\sqrt{3}}{4}, 1\right[$;
- ☐ *c)* $\left]\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, 1\right[$;
- ☐ *d)* $\left]-1, 0\right[\cup \left]\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, 1\right[$.

2) Sia f una funzione reale definita nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\forall x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; : \; \forall z \in U \cap A \implies f(z) \leq f(x)$ " è

- ☐ *a)* " $\forall x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; : \; \forall z \in U \cap A \implies f(z) > f(x)$ ";
- ☐ *b)* " $\forall x \in B \;\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \; : \; f(z) > f(x)$ ";
- ☐ *c)* " $\exists x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; : \; \forall z \in U \cap A \implies f(z) > f(x)$ ";
- ☐ *d)* " $\exists x \in B \; : \; [\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \; : \; f(z) > f(x)]$ ".

3) La derivata della funzione $\operatorname{arcsen}^3\sqrt{x^4-1}$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{6x}{\sqrt{2-x^4}} \operatorname{arcsen}^2\sqrt{x^4-1}$;
- ☐ *b)* $\left(3\operatorname{arcsen}^2\sqrt{x^4-1}\right) \frac{2x^3}{\sqrt{(2-x^4)(x^4-1)}}$;
- ☐ *c)* $\frac{\cos\sqrt{x^4-1}}{\operatorname{sen}^3\sqrt{x^4-1}} \cdot \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$;
- ☐ *d)* $\frac{6x^3}{\sqrt{-x^8+3x^4-2}} \operatorname{arcsen}^3\sqrt{x^4-1}$.

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4}(n+1)^{-\frac{4}{3}} \quad , \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^n \quad , \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)^n \; ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (3) e (4);
- ☐ *c)* (1) e (3);
- ☐ *d)* (2) e (4).

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2} - (n+2)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è crescente;
- ☐ *b)* è decrescente, ma non è strettamente decrescente;
- ☐ *c)* è decrescente e divergente;
- ☐ *d)* è decrescente e convergente.

6) La serie $1-1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\dots$

- ☐ *a)* converge assolutamente ;
- ☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente ;
- ☐ *c)* diverge negativamente ;
- ☐ *d)* non è regolare .

---

7) Il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)}{\log(1+x^2)}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* 1 ;
- ☐ *c)* e ;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{se } x<0\\ x+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \log_2 x & \text{se } x>1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0=1$ è di massimo locale per f_a ;
- ☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva solatnto se $a\le -2$;
- ☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0=1$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2+\operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* 1 ;
- ☐ *b)* $\log\frac{\sqrt{2}}{4}$;
- ☐ *c)* $\log\frac{3}{2}$;
- ☐ *d)* $\log\sqrt{\frac{3}{2}}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x|\mathrm{e}^{x}-1|$ è vera ?

- ☐ *a)* f ha un asintoto orizzontale ;
- ☐ *b)* $f''(-1)=-\mathrm{e}$;
- ☐ *c)* il grafico di f ha un punto angoloso ;
- ☐ *d)* f è iniettiva .

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{se } x<0\\ x\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^3}{3} & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^3-1}{3} & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right) & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 FEBBRAIO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{4 - 3\,\mathrm{sen}^2 x} + \log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{\sqrt{x}-1}+1} - 1\right)$ è l'insieme

- ☐ *a)* $\left]\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right[$;
- ☐ *b)* $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right[$;
- ☐ *c)* $\left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$;
- ☐ *d)* $\left]-1, 0\right[\cup \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\forall x \in B \;\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \, : \, f(z) < f(x)$ " è

- ☐ *a)* " $\forall x \in B \;\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \, : \, f(z) \geq f(x)$ ";
- ☐ *b)* " $\exists x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \, : \, f(z) \geq f(x)$ ";
- ☐ *c)* " $\exists x \in B \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \, : \, \forall z \in U \cap A \implies f(z) \geq f(x)$ ";
- ☐ *d)* " $\exists x \in B \, : \, [\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists z \in U \cap A \, : \, f(z) \geq f(x)]$ ".

---

3) La derivata della funzione $\left(5x^2+3\right)^{4x+1}$ è uguale a

- ☐ *a)* $\left(5x^2+3\right)^{4x+1}\left[\log(5x^2+3)^4 + \frac{10x(4x+1)}{5x^2+3}\right]$;
- ☐ *b)* $\mathrm{e}^{(4x+1)\log(5x^2+3)}\left[\log(5x^2+3) + \frac{10x(4x+1)}{5x^2+3}\right]$;
- ☐ *c)* $\left(5x^2+3\right)^{4x}\left[(5x^2+3)\log(5x^2+3) + 10x(4x+1)\right]$;
- ☐ *d)* $10x\left(5x^2+3\right)^{4x}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}n^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \ ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (3) e (4);
- ☐ *c)* (1) e (4);
- ☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2} - (n+2)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è crescente ed il suo minimo è uguale a $\sqrt{2} - 2$;
- ☐ *b)* è decrescente ed il suo estremo superiore è uguale a 0;
- ☐ *c)* è decrescente ed il suo estremo inferiore è uguale a -2;
- ☐ *d)* non è monotòna.

---

6) La serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{13}}-\frac{1}{2^{15}}-\frac{1}{2^{17}}-\frac{1}{2^{19}}+\dots$

- ☐ *a)* converge assolutamente;
- ☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente;
- ☐ *c)* diverge negativamente;
- ☐ *d)* non è regolare.

---

7) Il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2^{x^2}-1\right)}{\operatorname{sen}\left(3^{x^2}-1\right)}$ è uguale a

- ☐ *a)* 1;
- ☐ *b)* $\log\frac{2}{3}$;
- ☐ *c)* $\frac{\log 2}{\log 3}$;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{se } x<0\\ x+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \log_2 x & \text{se } x>1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha minimo assoluto;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è strettamente convessa in qualche intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* $f_a''(-1)=-\frac{1}{4}$ $\forall a\in\mathbb{R}$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\log 7}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\log\frac{e^7+2}{3}$;
- ☐ *b)* $\log 3$;
- ☐ *c)* $3\frac{\log 2}{\log 3}$;
- ☐ *d)* $\log\frac{7}{9}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x|e^x-1|$ è vera ?

- ☐ *a)* f ha un punto di minimo locale;
- ☐ *b)* $f''(1)=2e$;
- ☐ *c)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* f è convessa in $\mathbb{R}$.

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x<0\\ x\,e^{x^2} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2}e^{x^2} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right) & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 FEBBRAIO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_8(8 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x) + \sqrt{\left(2^{-x^2} - 3\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x}-1} + 1\right)}$ è l'insieme

☐ *a)* $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

☐ *b)* $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right[$;

☐ *c)* $\left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]1, +\infty\right[$;

☐ *d)* $\left]-\infty, -\sqrt{\log_2 3}\right[\cup \left]\sqrt{\log_2 3}, +\infty\right[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\exists x \in B \,:\, [\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\exists z \in U \cap A \,:\, f(z) < f(x)]$ " è

☐ *a)* " $\forall x \in B \;\exists U \in \mathcal{U}(x) \;\exists z \in U \cap A \,:\, f(z) \geq f(x)$ ";

☐ *b)* " $\forall x \in B \;\exists U \in \mathcal{U}(x) \,:\, \forall z \in U \cap A \implies f(z) \geq f(x)$ ";

☐ *c)* " $\forall x \in B \;\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\exists z \in U \cap A \,:\, f(z) \geq f(x)$ ";

☐ *d)* " $\exists x \in B \,:\, [\forall U \in \mathcal{U}(x) \;\exists z \in U \cap A \,:\, f(z) \geq f(x)]$ ".

---

3) La derivata della funzione $\mathrm{arcsen}^2\sqrt{x^4 - 1}$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{4}{x\sqrt{2-x^4}}\;\mathrm{arcsen}\sqrt{x^4-1}$;

☐ *b)* $\frac{4x^3}{\sqrt{(2-x^4)(x^4-1)}}\;\mathrm{arcsen}^2\sqrt{x^4-1}$;

☐ *c)* $\frac{4x^3}{\sqrt{-x^8+3x^4-2}}\;\mathrm{arcsen}\sqrt{x^4-1}$;

☐ *d)* $\frac{1}{\mathrm{sen}^2\sqrt{x^4-1}} \cdot \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5}\, n^{-\frac{1}{5}} \;,\quad (2)\;\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \;,\quad (3)\;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\, n^{-\frac{1}{5}} \;,\quad (4)\;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^2+1} \;\;?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (1) e (4);

☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2} - (n+2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è divergente a $+\infty$;

☐ *b)* è decrescente e convergente a -4;

☐ *c)* è limitata inferiormente;

☐ *d)* non è regolare.

---

6) La serie $1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots$

☐ *a)* converge assolutamente;
☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente;
☐ *c)* diverge negativamente;
☐ *d)* non è regolare.

---

7) Il limite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ è uguale a

☐ *a)* 0;
☐ *b)* 1;
☐ *c)* $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$;
☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{se } x<0\\ x+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \log_2 x & \text{se } x>1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* per qualunque $a\in\mathbb{R}$ la derivata $f_a'(x)$ esiste soltanto se $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$;
☐ *b)* esiste un unico valori di a per cui il punto $x_0=0$ è di minimo assoluto per f_a;
☐ *c)* qualunque sia $a\in\mathbb{R}$ nessuna retta tangente al grafico di f_a è parallela alla retta di equazione $y=-2x$;
☐ *d)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0=1$ è di massimo locale per f_a.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos 2x}{2-\operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\log 2$;
☐ *b)* $\log\sqrt{2}$;
☐ *c)* $\log\frac{1}{2}$;
☐ *d)* $2-\log 2$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x|\mathrm{e}^{x}-1|$ è vera ?

☐ *a)* $f'(\log 2)=1+\log 2$;
☐ *b)* f è derivabile due volte nel punto $x_0=0$;
☐ *c)* f ha punti di flesso;
☐ *d)* f è limitata inferiormente.

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x\le 0\\ \mathrm{e}^{x^2}-1 & \text{se } x>0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & \text{se } x\le 0\\ \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{x^2}-x & \text{se } x>0\end{cases}$;
☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & \text{se } x\le 0\\ \mathrm{e}^{x^2}-x-1 & \text{se } x>0\end{cases}$;
☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 FEBBRAIO 2013
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se ... . Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si chiama *estremo superiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

2) Data una funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a 1 è uguale a $-\infty$*" vuol dire che ... (completare la definizione).

3) Dire che una funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* in $]0, +\infty[$ vuol dire che ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Provare che ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

2) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite della funzione composta.

3) Provare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ 2^{x^3 - x^2} \,:\, x \in [0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} \right\},$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo. Giustificare quanto asserito.

2) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\log 3}^{\log 2} e^{x} |e^{x} - 1|^3 \, dx .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 22 febbraio 2013
Prima prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\left(1 - 2^{x^2+1}\right) \log_3 \frac{1-\sqrt{x}}{x}}$ è l'insieme

☐ *a)* $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$;

☐ *b)* $\left]0, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right[\cup \left]1, +\infty\right[$;

☐ *c)* $\left]0, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right[$;

☐ *d)* $\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, 1\right[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\exists\, x \in B \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \,:\, \forall\, z \in U \cap A \implies f(z) \geq f(x)$ " è

☐ *a)* " $\exists\, x \in B \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \,:\, \forall\, z \in U \cap A \implies f(z) < f(x)$ ";

☐ *b)* " $\exists\, x \in B \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists\, z \in U \cap A \,:\, f(z) < f(x)$ ";

☐ *c)* " $\forall\, x \in B \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \,:\, \forall\, z \in U \cap A \implies f(z) < f(x)$ ";

☐ *d)* " $\forall\, x \in B \;\; \forall\, U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists\, z \in U \cap A \,:\, f(z) < f(x)$ ".

---

3) La derivata della funzione $(2x+1)^{2+x^2}$ è uguale a

☐ *a)* $2x\left(2+x^2\right)(2x+1)^{1+x^2}$;

☐ *b)* $(2x+1)^{2+x^2}\left[\log(2x+1) + \frac{2+x^2}{2x+1}\right]$;

☐ *c)* $(2x+1)^{2+x^2}\left[2x\log(2x+1) + \frac{2+x^2}{2x+1}\right]$;

☐ *d)* $2\,(2x+1)^{1+x^2}\left[x(2x+1)\log(2x+1) + 2 + x^2\right]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{4}\right)^n \ , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5}\left(\frac{5}{4}\right)^n \ , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \ , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\mathrm{e}+1}\right)^{n+1} \ ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (1) e (4);

☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2} - (n+2)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

☐ *a)* è convergente, ma non è monotòna;

☐ *b)* è monotòna, ma non è convergente;

☐ *c)* è monotòna e convergente;

☐ *d)* è decrescente ed ha estremo superiore positivo.

---

6) La serie $1-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{25}-\frac{1}{5}+\dots$

☐ *a)* converge assolutamente ;

☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente ;

☐ *c)* diverge negativamente ;

☐ *d)* non è regolare .

---

7) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3-\log^2 x}$ è uguale a

☐ *a)* 0 ;

☐ *b)* 1 ;

☐ *c)* e ;

☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{se } x<0\\ x+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \log_2 x & \text{se } x>1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* per qualunque $a\in\mathbb{R}$ la funzione f_a non ha né punti di discontinuità eliminabile né di seconda specie ;

☐ *b)* l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo soltanto se $a\in[-1,0]$;

☐ *c)* non esiste alcun valore di $a\in\mathbb{R}$ per cui l'equazione $f_a'(x)=-3$ ha soluzioni ;

☐ *d)* esiste un unico valore di $a\in\mathbb{R}$ per il quale la restrizione $f_a|_{[0,+\infty[}$ è strettamente monotòna .

---

9) L'integrale $\int_0^{\log\sqrt{2}}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\log 3$;

☐ *b)* $\log\sqrt{3}$;

☐ *c)* $\log\sqrt{\frac{3}{2}}$;

☐ *d)* $\log\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{2}}+1\right)-\log 2$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x-|\operatorname{arctg} x|$ è vera ?

☐ *a)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;

☐ *b)* f è convessa in $\mathbb{R}$;

☐ *c)* f ha un unico asintoto ;

☐ *d)* f ha un punto di massimo locale .

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{se } x<0\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}x-\operatorname{sen} x & \text{se } x<0\\ -\cos x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;

☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}x-\operatorname{sen} x & \text{se } x<0\\ 1-\cos x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;

☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;

☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 22 febbraio 2013
Prima prova scritta (compito B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_4\left(1-x^2\right) + \log_2\left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}+1\right)$ è l'insieme

☐ *a)* $]-1,0] \cup \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right[$;

☐ *b)* $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1,+\infty[$;

☐ *c)* $\left]0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$;

☐ *d)* $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\forall x \in B\ \ \exists U \in \mathcal{U}(x)\ \ \exists z \in U \cap A\ :\ f(z) > f(x)$ " è

☐ *a)* " $\forall x \in B\ \ \exists U \in \mathcal{U}(x)\ :\ \forall z \in U \cap A \implies f(z) \leq f(x)$ ";

☐ *b)* " $\forall x \in B\ \ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \ \exists z \in U \cap A\ :\ f(z) \leq f(x)$ ";

☐ *c)* " $\exists x \in B\ :\ [\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \ \forall z \in U \cap A \implies f(z) \leq f(x)]$ ";

☐ *d)* " $\exists x \in B\ :\ [\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \ \exists z \in U \cap A\ :\ f(z) \leq f(x)]$ ".

---

3) La derivata della funzione $\left(4+x^2\right)^{2x+3}$ è uguale a

☐ *a)* $2\left(4+x^2\right)^{2x+2}\left[(4+x^2)\log(4+x^2)+x(2x+3)\right]$;

☐ *b)* $\left(4+x^2\right)^{2x+3}\left[\log(4+x^2)^2+\frac{x(2x+3)}{4+x^2}\right]$;

☐ *c)* $\left(4+x^2\right)^{2x+3}\left[2x\log(4+x^2)+\frac{2x}{4+x^2}\right]$;

☐ *d)* $4x\left(4+x^2\right)^{2x+2}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\quad,\quad(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\quad,\quad(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-\frac{\pi}{4}}\quad,\quad(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi}\,n^{-\frac{\pi}{6}}\ \ ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (1) e (4);

☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2}-(n+2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è crescente e convergente a -2;

☐ *b)* è decrescente e convergente a -2;

☐ *c)* è decrescente e convergente a -4;

☐ *d)* converge a -2, ma non è monotòna.

---

6) La serie $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{10^2}-\frac{1}{12^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{14^2}-\frac{1}{16^2}-\frac{1}{18^2}-\frac{1}{20^2}+\dots$

- ☐ *a)* converge assolutamente ;
- ☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente ;
- ☐ *c)* diverge negativamente ;
- ☐ *d)* non è regolare .

---

7) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{x^2}}\right)^{3^{2x+1}}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* 1 ;
- ☐ *c)* e ;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{se } x<0\\ x+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \log_2 x & \text{se } x>1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)*$f_a''(-2)=-\frac{2}{27}\quad\forall a\in\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* $\exists a\in\mathbb{R}\ :\ \max\limits_{x\in]-\infty,1]} f_a(x)=0$;
- ☐ *c)* la restrizione $f_a|_{]-\infty,1]}$ è iniettiva solatnto se $a\le -3$;
- ☐ *d)* per qualunque $a\in\mathbb{R}$ la funzione f_a ha punti di estremo locale .

---

9) L'integrale $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$ è uguale a

- ☐ *a)* 2 ;
- ☐ *b)* 1 ;
- ☐ *c)* $\frac{1}{2}$;
- ☐ *d)* $\frac{3}{2}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=x-|\mathrm{arctg}\,x|$ è vera ?

- ☐ *a)* f è concava in $]-\infty,0]$;
- ☐ *b)* $f''(1)=\frac{1}{4}$;
- ☐ *c)* f ha un punto di flesso ;
- ☐ *d)* f è iniettiva .

---

11) Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{se } x<0\\ 1+\mathrm{sen}\,x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x)=\begin{cases}x-\mathrm{sen}\,x & \text{se } x<0\\ x-\cos x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x)=\begin{cases}x-\mathrm{sen}\,x & \text{se } x<0\\ x-\cos x+1 & \text{se } x\ge 0\end{cases}$;
- ☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 22 FEBBRAIO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\sqrt{x}-1}+1}+\log_3\left(4x^2-1\right)$ è l'insieme

☐ *a)* $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\,\cup\,\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right[$;

☐ *b)* $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\,\cup\,\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$;

☐ *c)* $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$;

☐ *d)* $]1,+\infty[$.

---

2) Siano f e g due funzioni reali definite nello stesso insieme $A\subseteq\mathbb{R}$ e sia B un sottoinsieme non vuoto di A. La negazione della frase " $\forall\, x\in B\ \ \forall\, U\in\mathcal{U}(x)\ \ \exists\, z\in U\cap A\,:\,f(z)\neq g(z)$ " è

☐ *a)* " $\forall\, x\in B\ \ \forall\, U\in\mathcal{U}(x)\ \ \exists\, z\in U\cap A\,:\,f(z)=g(z)$ ";

☐ *b)* " $\exists\, x\in B\ \ \exists\, U\in\mathcal{U}(x)\ \ \exists\, z\in U\cap A\,:\,f(z)=g(z)$ ";

☐ *c)* " $\exists\, x\in B\ \ \exists\, U\in\mathcal{U}(x)\,:\,\forall\, z\in U\cap A\implies f(z)=g(z)$ ";

☐ *d)* " $\exists\, x\in B\,:\,[\forall\, U\in\mathcal{U}(x)\ \ \exists\, z\in U\cap A\,:\,f(z)=g(z)]$ ".

---

3) La derivata della funzione $\frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^4-1}}$ è uguale a

☐ *a)* $\dfrac{\frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}\left[1-4x^3\operatorname{arcsen}\sqrt{x^4-1}\right]}{x^4-1}$;

☐ *b)* $2x^3\left(x^4-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{2-x^4}}-\operatorname{arcsen}\sqrt{x^4-1}\right]$;

☐ *c)* $2x^3\left(x^4-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\sqrt{\frac{x^4-1}{\sqrt{2-x^4}}}-\operatorname{arcsen}\sqrt{x^4-1}\right]$;

☐ *d)* $\dfrac{\frac{2x^3}{\operatorname{sen}\sqrt{x^4-1}}-\frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}\operatorname{arcsen}\sqrt{x^4-1}}{x^4-1}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad,\quad(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\quad,\quad(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\quad,\quad(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n\ ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (2) e (3);

☐ *d)* (1) e (4).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2}-(n+2)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* ha massimo, ma non ha minimo;

☐ *b)* ha minimo, ma non ha massimo;

☐ *c)* non ha né massimo né minimo;

☐ *d)* non è una successione monotòna.

---

6) La serie $1-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^5-\left(\frac{3}{2}\right)^6+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{3}{2}\right)^7-\left(\frac{3}{2}\right)^8+\dots$

- ☐ *a)* converge assolutamente ;
- ☐ *b)* converge, ma non converge assolutamente ;
- ☐ *c)* diverge negativamente ;
- ☐ *d)* non è regolare .

---

7) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+\operatorname{arctg} x}\right)^{x^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* 1 ;
- ☐ *c)* e ;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 0 \\ x+a & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \log_2 x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* per ogni $y \in \mathbb{R}$ esistono valori di a per i quali y appartiene all'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$;
- ☐ *b)* $f_a''(\log_2 \mathrm{e}) = -\frac{1}{\log_2 \mathrm{e}} \quad \forall a \in \mathbb{R}$;
- ☐ *c)* per ogni $a \in \mathbb{R}$ la restrizione $f_a|_{[0,2]}$ ha massimo assoluto ;
- ☐ *d)* per ogni $a \in \mathbb{R}$ la restrizione $f_a|_{[0,2]}$ ha minimo assoluto .

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{1}{2}\log 2$;
- ☐ *b)* $\log 2$;
- ☐ *c)* 0 ;
- ☐ *d)* 1 .

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = x - |\operatorname{arctg} x|$ è vera ?

- ☐ *a)* f è una funzione dispari ;
- ☐ *b)* f è derivabile nel punto $x_0 = 0$;
- ☐ *c)* esiste $a < 0$ tale che f è convessa in $[a, +\infty[$;
- ☐ *d)* $f''(1) = \frac{1}{2}$.

---

11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{se } x \le 0 \\ \operatorname{sen} x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione F così definita: $F(x) = \begin{cases} x - \operatorname{sen} x & \text{se } x \le 0 \\ -\frac{1}{2x}\cos x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$;
- ☐ *b)* una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione G così definita: $G(x) = \begin{cases} x - \operatorname{sen} x & \text{se } x \le 0 \\ -\frac{x}{2}\cos x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$;
- ☐ *c)* la funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$;
- ☐ *d)* la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$, ma le primitive non sono esprimibili elementarmente .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 22 febbraio 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato inferiormente* se ... . Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, si chiama *estremo inferiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

2) Data una funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a 2 è uguale a -2*" vuol dire che ... (completare la definizione).

3) Si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è *convessa* in I se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Provare la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è strettamente crescente.

2) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

3) Provare che se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) ha un punto di discontinuità di prima specie, allora essa non ha primitive in I.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen} x - \cos x} : x \in [0, \pi] \cap \mathbb{Q} \right\},$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo. Giustificare quanto asserito.

2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{|2x-1|}{x^2-2x-3} \, \mathrm{d}\, x .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 MARZO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\text{arcsen}\,(2 - e^{3x})}$ è l'insieme

☐ *a)* $[0, +\infty[$;

☐ *b)* $[-1, \frac{1}{3}\log 2]$;

☐ *c)* $[0, \log \sqrt[3]{2}]$;

☐ *d)* $]\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\log 2]$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1)\quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \quad , \qquad (2)\quad (A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad ,$$
$$(3)\quad A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B \quad , \qquad (4)\quad (A \cup B) \setminus C \subseteq A \setminus C \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2) ;

☐ *b)* (3) e (4) ;

☐ *c)* (1) e (4) ;

☐ *d)* (2) e (3) .

---

3) La derivata della funzione $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2}$ è uguale a

☐ *a)* $(3x+2)\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+1} \frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$;

☐ *b)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2} \left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{3x+2}{2x+1} \cdot \frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{x^2+1}\right]$;

☐ *c)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2} \left[\log\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^3 + 2\,\frac{(3x+2)(1-x-x^2)}{(2x+1)(x^2+1)}\right]$;

☐ *d)* $e^{(3x+2)\log\frac{2x+1}{x^2+1}} \left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} + 2(3x+2)\frac{x^2+1}{2x+1}\right]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{4}} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2) ;

☐ *b)* (3) e (4) ;

☐ *c)* (2) e (3) ;

☐ *d)* (1) e (4) .

---

5) La successione $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è convergente, ma non è monotòna ;

☐ *b)* è monotòna, ma non è convergente ;

☐ *c)* è monotòna e convergente ;

☐ *d)* è definitivamente decrescente e non ha massimo .

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}^2 x & \text{se } x \le 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;

☐ *b)* f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;

☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;

☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$

☐ *a)* è uguale a 0;

☐ *b)* è uguale a 1;

☐ *c)* è uguale a $+\infty$;

☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + a & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a;

☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua nel punto $x_0 = 1$;

☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva se e soltanto se $a \ge 3$;

☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \operatorname{sen} 2x}} \, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

☐ *b)* $\sqrt{3} - \sqrt{2}$;

☐ *c)* $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$;

☐ *d)* $\frac{1}{2}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - |x|}$ è vera ?

☐ *a)* f è derivabile in 0;

☐ *b)* f ha asintoti obliqui;

☐ *c)* f ha minimo assoluto;

☐ *d)* f ha punti di flesso.

---

11) L'integrale $\int_0^1 \frac{4x+1}{2x+3} \, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* 1;

☐ *b)* $\log \frac{5}{3}$;

☐ *c)* $2 - \frac{5}{2} \log \frac{5}{3}$;

☐ *d)* $2 - \frac{5}{3} \log \frac{5}{2}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 8 MARZO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_{2x+3}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-2x}\right)$ è l'insieme

- ☐ *a)* $]0, 2]$;
- ☐ *b)* $]2, +\infty[$;
- ☐ *c)* $[2, +\infty[$;
- ☐ *d)* $\{0\} \cup [2, +\infty[$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1)\quad A \setminus (B \setminus A) = A \quad , \quad (2)\quad (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B) \quad ,$$
$$(3)\quad (A \setminus B) \setminus C \subseteq C \setminus B \quad , \quad (4)\quad A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \cap C \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

3) La derivata della funzione $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3x^2+1} \cdot \frac{|x|}{x}$;
- ☐ *b)* $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(2x^2+1)(x^2+1)}$;
- ☐ *c)* $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x^2+x+1)(x^2+1)}$;
- ☐ *d)* $\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} n^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{2n+3} \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

5) La successione $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è crescente e infinitesima ;
- ☐ *b)* è decrescente e infinitesima ;
- ☐ *c)* è decrescente e convergente a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{5}}$;
- ☐ *d)* è infinitesima, ma non è monotòna .

---

6) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}-x & \text{se } x\le 0 \\ \cos x & \text{se } x>0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* f ha nel punto $x_0=0$ una discontinuità di prima specie;
- ☐ *b)* f è continua nel punto $x_0=0$ ma non è derivabile in tale punto;
- ☐ *c)* nel punto $x_0=0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;
- ☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$

- ☐ *a)* è uguale a 0;
- ☐ *b)* è uguale a 1;
- ☐ *c)* è uguale a $+\infty$;
- ☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x<0 \\ x^2+a & \text{se } 0\le x\le 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x>1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è iniettiva;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha massimo assoluto;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è derivabile nel punto $x_0=1$;
- ☐ *d)* $f''(2)=\log^2 2\ \forall a\in\mathbb{R}$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\log 7}\frac{e^{x}}{(e^{x}+2)^2}\,dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{2}{9}$;
- ☐ *b)* $\frac{1}{9}$;
- ☐ *c)* $\frac{7}{81}$;
- ☐ *d)* $\frac{1}{81}-\frac{1}{9}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=e^{x^2-|x|}$ è vera ?

- ☐ *a)* $f(\mathbb{R})=f([1,+\infty[)$;
- ☐ *b)* f è strettamente convessa in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* f ha punti di massimo locale;
- ☐ *d)* f ha asintoti verticali.

---

11) L'integrale $\int_0^1\frac{4x+1}{3x+2}\,dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{4}{3}-\frac{5}{2}\log\frac{5}{9}$;
- ☐ *b)* $\frac{4}{3}$;
- ☐ *c)* $\log\frac{4}{3}$;
- ☐ *d)* $\frac{4}{3}-\frac{5}{9}\log\frac{5}{2}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 8 marzo 2013
Prima prova scritta (compito C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}}(5x-4) - \log_{\frac{1}{3}}(3x^2-4) \right)$ è l'insieme

☐ *a)* $]-\infty, 0[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$;

☐ *b)* $]\frac{5}{3}, +\infty[$;

☐ *c)* $]-\infty, 0[\cup]\frac{4}{5}, +\infty[$;

☐ *d)* $]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1) \quad A \setminus (A \cap B) = \emptyset \quad , \quad (2) \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad ,$$
$$(3) \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \subseteq A \cup B \quad , \quad (4) \quad (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C) \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (1) e (4);

☐ *d)* (2) e (3).

---

3) La derivata della funzione $\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{3x+2}$ è uguale a

☐ *a)* $\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{3x+2} \left[\log \left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^3 + \frac{2x^2+5x}{2x^3+x^2+2x+1} \right]$;

☐ *b)* $\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{3x+2} \left[3 \log \frac{x^2+1}{2x+1} + \frac{2(3x+2)(x^2+x-1)}{(x^2+1)(2x+1)} \right]$;

☐ *c)* $(3x+2) \left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{3x+1} \frac{2x(2x+1)-2(x^2+1)}{(2x+1)^2}$;

☐ *d)* $e^{(3x+2)\log\frac{x^2+1}{2x+1}} \left[3 \log \frac{x^2+1}{2x+1} - \frac{3x+2}{x^2+1} \cdot \frac{2x(2x+1)-2(x^2+1)}{2x+1} \right]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{1}{n+2} \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \quad , \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} n^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^2+1} \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (3) e (4);

☐ *c)* (1) e (4);

☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definita ponendo $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

☐ *a)* ha massimo, ma non ha minimo;

☐ *b)* ha minimo, ma non ha massimo;

☐ *c)* non ha né massimo né minimo;

☐ *d)* è una successione monotòna.

6) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\,x}+x & \text{se } x\le 0 \\ \cos x & \text{se } x>0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* f ha nel punto $x_0=0$ una discontinuità di prima specie ;

☐ *b)* f è continua nel punto $x_0=0$ ma non è derivabile in tale punto ;

☐ *c)* nel punto $x_0=0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f ;

☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$

☐ *a)* è uguale a 0 ;

☐ *b)* è uguale a 1 ;

☐ *c)* è uguale a -2 ;

☐ *d)* non esiste .

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x<0 \\ x^2+a & \text{se } 0\le x\le 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x>1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* per qualunque $a\in[0,+\infty[$ la restrizione $f_a|_{]-\infty,1]}$ è strettamente crescente ;

☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui il punto $x_0=1$ è di massimo assoluto per f_a ;

☐ *c)* qualunque sia $a\in\mathbb{R}$ nessuna retta tangente al grafico di f_a è parallela alla retta di equazione $y=-5x$;

☐ *d)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0=0$ è di minimo locale per f_a .

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(2-\operatorname{sen}2x)^2}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{1}{2}$;

☐ *b)* $\frac{1}{4}$;

☐ *c)* 1 ;

☐ *d)* $\frac{\pi}{4}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=\mathrm{e}^{\,x^2-|x|}$ è vera ?

☐ *a)* $f(\mathbb{R})=f([\frac{1}{2},+\infty[)$;

☐ *b)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;

☐ *c)* l'equazione $f'(x)=1$ non ha soluzioni ;

☐ *d)* esiste $h>0$ tale che f è concava nell'intervallo $[-h,h]$.

---

11) L'integrale $\int_0^1\frac{3x+2}{4x+1}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{3}{4}+\frac{5}{16}\log 5$;

☐ *b)* $\frac{5}{16}\log 5$;

☐ *c)* $\frac{3}{4}-\frac{5}{16}\log 5$;

☐ *d)* $\frac{3}{4}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 8 marzo 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *interno* all'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *convergente* (*divergente a* $+\infty$, *divergente a* $-\infty$) se ... (completare le definizioni).

3) Dire che una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è *convessa* in $[0, +\infty[$ vuol dire che ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Siano $f, g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $\lim_{x\to 0} f(x) = a \in]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$. Allora il limite $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ è uguale a ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Férmat sui punti di estremo locale.

3) Provare che la serie armonica è divergente.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 7}{3^{n^2-n}} \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + n + 1}{2^n + 1} \right)^{n^2} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x \operatorname{arctg} |x|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 19 aprile 2013
Prima prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}}(5x-4) - \log_{\frac{1}{3}}(3x^2-4) \right)$ è l'insieme

☐ *a)* $]-\infty, 0[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$;

☐ *b)* $]\frac{5}{3}, +\infty[$;

☐ *c)* $]-\infty, 0[\cup]\frac{4}{5}, +\infty[$;

☐ *d)* $]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1) \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \quad , \quad (2) \quad (A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad ,$$
$$(3) \quad A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B \quad , \quad (4) \quad (A \cup B) \setminus C \subseteq A \setminus C \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2) ;

☐ *b)* (3) e (4) ;

☐ *c)* (1) e (4) ;

☐ *d)* (2) e (3) .

---

3) La derivata della funzione $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2}$ è uguale a

☐ *a)* $(3x+2)\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+1} \frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$;

☐ *b)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2} \left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{3x+2}{2x+1} \cdot \frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{x^2+1}\right]$;

☐ *c)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2} \left[\log\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^3 + 2\,\frac{(3x+2)(1-x-x^2)}{(2x+1)(x^2+1)}\right]$;

☐ *d)* $e^{(3x+2)\log\frac{2x+1}{x^2+1}} \left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} + 2(3x+2)\frac{x^2+1}{2x+1}\right]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} n^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad , \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{2n+3} \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2) ;

☐ *b)* (3) e (4) ;

☐ *c)* (1) e (4) ;

☐ *d)* (2) e (3) .

---

5) La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

☐ *a)* è crescente e infinitesima ;

☐ *b)* è decrescente e infinitesima ;

☐ *c)* è decrescente e convergente a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{5}}$;

☐ *d)* è infinitesima, ma non è monotòna .

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} - x & \text{se } x \le 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- ☐ *b)* f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- ☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;
- ☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$

- ☐ *a)* è uguale a 0;
- ☐ *b)* è uguale a 1;
- ☐ *c)* è uguale a $+\infty$;
- ☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + a & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a;
- ☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua nel punto $x_0 = 1$;
- ☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva se e soltanto se $a \ge 3$;
- ☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \operatorname{sen} 2x}}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
- ☐ *b)* $\sqrt{3} - \sqrt{2}$;
- ☐ *c)* $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$;
- ☐ *d)* $\frac{1}{2}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = e^{x^2 - |x|}$ è vera ?

- ☐ *a)* $f(\mathbb{R}) = f([1, +\infty[)$;
- ☐ *b)* f è strettamente convessa in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* f ha punti di massimo locale;
- ☐ *d)* f ha asintoti verticali.

---

11) L'integrale $\int_0^1 \frac{4x+1}{3x+2}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{4}{3} - \frac{5}{2} \log \frac{5}{9}$;
- ☐ *b)* $\frac{4}{3}$;
- ☐ *c)* $\log \frac{4}{3}$;
- ☐ *d)* $\frac{4}{3} - \frac{5}{9} \log \frac{5}{2}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 19 APRILE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \log_{2x+3}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-2x}\right)$ è l'insieme

- ☐ *a)* $]0,2]$;
- ☐ *b)* $]2,+\infty[$;
- ☐ *c)* $[2,+\infty[$;
- ☐ *d)* $\{0\}\cup[2,+\infty[$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1)\quad (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\cup B \quad , \quad (2)\quad (A\setminus B)\cup B = A\cup B \quad ,$$
$$(3)\quad A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus B \quad , \quad (4)\quad (A\cup B)\setminus C\subseteq A\setminus C \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

3) La derivata della funzione $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2}$ è uguale a

- ☐ *a)* $(3x+2)\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+1}\frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$;
- ☐ *b)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2}\left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{3x+2}{2x+1}\cdot\frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{x^2+1}\right]$;
- ☐ *c)* $\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{3x+2}\left[\log\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^3 + 2\,\frac{(3x+2)(1-x-x^2)}{(2x+1)(x^2+1)}\right]$;
- ☐ *d)* $\mathrm{e}^{(3x+2)\log\frac{2x+1}{x^2+1}}\left[3\log\frac{2x+1}{x^2+1} + 2(3x+2)\frac{x^2+1}{2x+1}\right]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\frac{1}{n+2} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{5}\right)^{n+1} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{5}\,n^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^2+1} \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

5) La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

- ☐ *a)* ha massimo, ma non ha minimo ;
- ☐ *b)* ha minimo, ma non ha massimo ;
- ☐ *c)* non ha né massimo né minimo ;
- ☐ *d)* è una successione monotòna .

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} + x & \text{se } x \le 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- ☐ *b)* f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- ☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;
- ☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$

- ☐ *a)* è uguale a 0;
- ☐ *b)* è uguale a 1;
- ☐ *c)* è uguale a $+\infty$;
- ☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + a & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a;
- ☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua nel punto $x_0 = 1$;
- ☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva se e soltanto se $a \ge 3$;
- ☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \operatorname{sen} 2x}}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
- ☐ *b)* $\sqrt{3} - \sqrt{2}$;
- ☐ *c)* $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$;
- ☐ *d)* $\frac{1}{2}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = e^{x^2 - |x|}$ è vera ?

- ☐ *a)* $f(\mathbb{R}) = f([\frac{1}{2}, +\infty[)$;
- ☐ *b)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* l'equazione $f'(x) = 1$ non ha soluzioni;
- ☐ *d)* esiste $h > 0$ tale che f è concava nell'intervallo $[-h, h]$.

---

11) L'integrale $\int_0^1 \frac{3x+2}{4x+1}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{3}{4} + \frac{5}{16} \log 5$;
- ☐ *b)* $\frac{5}{16} \log 5$;
- ☐ *c)* $\frac{3}{4} - \frac{5}{16} \log 5$;
- ☐ *d)* $\frac{3}{4}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 19 APRILE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\text{arcsen}\ (2 - \mathrm{e}^{3x})}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $[0, +\infty[$;
- ☐ *b)* $[-1, \frac{1}{3}\log 2]$;
- ☐ *c)* $[0, \log\sqrt[3]{2}]$;
- ☐ *d)* $]\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\log 2]$.

---

2) Quali delle seguenti uguaglianze e inclusioni insiemistiche sono vere in generale (cioè qualunque siano gli insiemi A, B e C):

$$(1)\quad A \setminus (B \setminus A) = A \quad , \quad (2)\quad (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B) \quad ,$$
$$(3)\quad (A \setminus B) \setminus C \subseteq C \setminus B \quad , \quad (4)\quad A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \cap C \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

3) La derivata della funzione arctg $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3x^2+1} \cdot \frac{|x|}{x}$;
- ☐ *b)* $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(2x^2+1)(x^2+1)}$;
- ☐ *c)* $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|(x^2+x+1)(x^2+1)}$;
- ☐ *d)* $\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\text{sen}\,\frac{1}{n+2} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\,n^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^2+1} \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (1) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (3) .

---

5) La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n^2-6n+5}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

- ☐ *a)* ha massimo, ma non ha minimo ;
- ☐ *b)* ha minimo, ma non ha massimo ;
- ☐ *c)* non ha né massimo né minimo ;
- ☐ *d)* è una successione monotòna .

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x} + x & \text{se } x \leq 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *a)* f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;

☐ *b)* f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;

☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;

☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$

☐ *a)* è uguale a 0;

☐ *b)* è uguale a 1;

☐ *c)* è uguale a $+\infty$;

☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + a & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è iniettiva;

☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha massimo assoluto;

☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è derivabile nel punto $x_0 = 1$;

☐ *d)* $f''(2) = \log^2 2 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

---

9) L'integrale $\int_0^{\log 7} \frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+2)^2} \, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{2}{9}$;

☐ *b)* $\frac{1}{9}$;

☐ *c)* $\frac{7}{81}$;

☐ *d)* $\frac{1}{81} - \frac{1}{9}$.

---

10) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - |x|}$ è vera ?

☐ *a)* $f(\mathbb{R}) = f([\frac{1}{2}, +\infty[)$;

☐ *b)* f è derivabile in $\mathbb{R}$;

☐ *c)* l'equazione $f'(x) = 1$ non ha soluzioni;

☐ *d)* esiste $h > 0$ tale che f è concava nell'intervallo $[-h, h]$.

---

11) L'integrale $\int_0^1 \frac{3x+2}{4x+1} \, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{3}{4} + \frac{5}{16} \log 5$;

☐ *b)* $\frac{5}{16} \log 5$;

☐ *c)* $\frac{3}{4} - \frac{5}{16} \log 5$;

☐ *d)* $\frac{3}{4}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 19 aprile 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di frontiera* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *continua* in un punto $x_0 \in E$ se ... (completare la definizione).

3) Sia $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Si dice che un punto $x_0 \in E$ è di *minimo locale* per f se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Siano $f, g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $\lim_{x\to 0} f(x) = a \in]-\infty, 0[$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Allora il limite $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ è uguale a ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

3) La derivata della funzione $\operatorname{sen} x$ è ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{\sqrt{n+1}}{2n+3} \right) \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1} \right)^{\sqrt{n+\cos n}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log |x^2 - 10|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 19 aprile 2013
Seconda prova scritta (compito B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è *derivabile* in un punto $x_0 \in I$ se ... (completare la definizione).

3) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si chiama *primitiva* di f ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il criterio del *confronto asintotico* per le serie a termini positivi.

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

3) Provare che il limite $\lim_{x\to-\infty} \cos x$ non esiste.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(2n-9)^3} \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to 4} \left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{4-x}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 21 GIUGNO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \dfrac{\log(|x+5|-1)}{2+\sqrt{2-|x+5|}}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $[-7,-6[\cup]-4,-3]$;
- ☐ *b)* $[3,7]$;
- ☐ *c)* $]-7,-6[\cup]-4,-3[$;
- ☐ *d)* $[-7,-3]$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $]0,+\infty[$. Dire che: "*Il punto $x_0 = 1$* **non è** *un punto di minimo locale per la funzione f*" equivale a dire che:

- ☐ *a)* " $\lim_{x\to 1} f(x) = \alpha < f(1)$ " ;
- ☐ *b)* "*Il punto 1 è di accumulazione per l'insieme* $\{x \in]0,+\infty[\ :\ f(x) < f(1)\}$" ;
- ☐ *c)* " $\exists U \in \mathcal{U}(1)\ :\ f(x) < f(1)\ \ \forall x \in U \cap]0,+\infty[\setminus\{1\}$ " ;
- ☐ *d)* " $\exists U \in \mathcal{U}(1)\ \exists \overline{x} \in U \cap]0,+\infty[\ :\ f(\overline{x}) < f(1)$ " .

---

3) La derivata della funzione $\operatorname{sen} x^{x+1}$ è uguale a

- ☐ *a)* $(x+1)x^x \cos x^{x+1}$;
- ☐ *b)* $(x+1)\operatorname{sen} x^x \cos x^{x+1}$;
- ☐ *c)* $x^{x+1}(x+1+\log x)\cos x^{x+1}$;
- ☐ *d)* $x^x(x+1+x\log x)\cos x^{x+1}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} n^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4}(n+2)^{-\frac{4}{3}} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\pi \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2) ;
- ☐ *b)* (1), (2) e (3) ;
- ☐ *c)* (1), (2) e (4) ;
- ☐ *d)* (3) e (4) .

---

5) La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo $a_n = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

- ☐ *a)* è crescente ;
- ☐ *b)* è decrescente, ma non è strettamente decrescente ;
- ☐ *c)* è decrescente e convergente ;
- ☐ *d)* è decrescente e divergente .

6) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n + n^4}$, $p \in \mathbb{R}$,

☐ *a)* converge per ogni $p \in \mathbb{R}$;

☐ *b)* converge solo se $p < 3$;

☐ *c)* converge solo se $p < 2$;

☐ *d)* diverge se $p \geq 4$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x-1}{4+\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

☐ *a)* è uguale a 4;

☐ *b)* non esiste;

☐ *c)* è uguale a $+\infty$;

☐ *d)* è uguale a 0.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* esistono valori di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;

☐ *b)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile in $\mathbb{R}$;

☐ *c)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di massimo locale per f_a;

☐ *d)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di minimo locale per f_a.

---

9) L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{1+(x-1)^4}\, \mathrm{d}x$

☐ *a)* non esiste;

☐ *b)* è uguale a $\frac{1}{2}$;

☐ *c)* è uguale a $\frac{\pi}{8}$;

☐ *d)* è uguale a $\frac{\pi}{4}$.

---

10) Quali tra le seguenti funzioni definite in $[-1,1]$ verificano le ipotesi del teorema di Rolle:

$$(1)\quad f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^3 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}, \quad (2)\quad f_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^2 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases},$$

$$(3)\quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}, \quad (4)\quad f_4(x) = |x| \operatorname{arctg} x^2 \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (3);

☐ *b)* (1), (2) e (3);

☐ *c)* (1), (3) e (4);

☐ *d)* (1) e (4).

---

11) Una primitiva in $\mathbb{R}$ della funzione $\mathrm{e}^x |\mathrm{e}^x - 1|^3$

☐ *a)* è la funzione $\frac{1}{4} |\mathrm{e}^x - 1|^4$;

☐ *b)* è la funzione $\frac{1}{4} (\mathrm{e}^x - 1) |\mathrm{e}^x - 1|^3$;

☐ *c)* è la funzione $\frac{1}{4} \mathrm{e}^x |\mathrm{e}^x - 1|^4$;

☐ *d)* non esiste.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 21 giugno 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è *derivabile* in un punto $x_0 \in I$ se ... (completare la definizione).

3) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si chiama *primitiva* di f ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il criterio del *confronto asintotico* per le serie a termini positivi.

2) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

3) Provare che il limite $\lim_{x\to-\infty} \cos x$ non esiste.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(2n-9)^3} \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{4-x}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 19 LUGLIO 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \dfrac{\log(|x+5|-2)}{\sqrt{1+|x+5|}}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $]-\infty,-7[\cup]-3,+\infty[$;
- ☐ *b)* $]-7,-3[$;
- ☐ *c)* $]-7,-6[\cup]-4,-3[$;
- ☐ *d)* $]-\infty,-7[\cup]-6,-4[\cup]-3,+\infty[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $]0,+\infty[$. Dire che: "*Il punto* $x_0 = 1$ **non è** *un punto di minimo locale per la funzione* f" equivale a dire che:

- ☐ *a)* " $\lim_{x\to 1} f(x) = \alpha < f(1)$ ";
- ☐ *b)* " $\exists\, \overline{x} \in]0,+\infty[\ :\ f(\overline{x}) < f(1)$ ";
- ☐ *c)* " $\exists\, U \in \mathcal{U}(1)\ :\ f(x) < f(1)\ \ \forall\, x \in U\cap]0,+\infty[\setminus\{1\}$ ";
- ☐ *d)* " $\forall\, U \in \mathcal{U}(1)\ \exists\, \overline{x} \in U\cap]0,+\infty[\ :\ f(\overline{x}) < f(1)$ ".

---

3) La derivata della funzione $(\operatorname{sen} x)^{x+1}$ è uguale a

- ☐ *a)* $(\cos x)^{x+1}$;
- ☐ *b)* $(\operatorname{sen} x)^{x+1}\left[\log(\operatorname{sen} x) + \frac{x+1}{\operatorname{sen} x}\right]$;
- ☐ *c)* $(\operatorname{sen} x)^{x}\left[(\operatorname{sen} x)\log(\operatorname{sen} x) + (x+1)\cos x\right]$;
- ☐ *d)* $(\cos x)^{x} \operatorname{sen} x$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} n^{-\frac{2}{3}}\ ,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}(n+2)^{-\frac{3}{4}}\ ,\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\pi\ ,\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}\ \ ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (1), (2) e (3);
- ☐ *c)* (1), (2) e (4);
- ☐ *d)* (3) e (4).

---

5) La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, definita ponendo $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n}\quad \forall n \in \mathbb{N}^+$,

- ☐ *a)* è crescente;
- ☐ *b)* è decrescente, ma non è strettamente decrescente;
- ☐ *c)* è decrescente e convergente;
- ☐ *d)* è decrescente e divergente.

6) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^4}$, $p \in \mathbb{R}$,

☐ *a)* converge per ogni $p \in \mathbb{R}$;

☐ *b)* converge solo se $p < 3$;

☐ *c)* converge solo se $p < 2$;

☐ *d)* diverge se $p \geq 4$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{4+\operatorname{sen} 2^x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

☐ *a)* è uguale a 4;

☐ *b)* non esiste;

☐ *c)* è uguale a $+\infty$;

☐ *d)* è uguale a 1.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} a e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* esistono infiniti valori di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;

☐ *b)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile in $\mathbb{R}$;

☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è iniettiva;

☐ *d)* per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione f_a ha minimo assoluto.

---

9) L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^6}\, dx$

☐ *a)* non esiste;

☐ *b)* è uguale a $\frac{1}{3}$;

☐ *c)* è uguale a $\frac{\pi}{12}$;

☐ *d)* è uguale a $\frac{\pi}{24}$.

---

10) Quali tra le seguenti funzioni definite in $[-1,1]$ verificano le ipotesi del teorema di Lagrange:

$$(1)\quad f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^3 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}, \quad (2)\quad f_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^2 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases},$$

$$(3)\quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}, \quad (4)\quad f_4(x) = |x| \operatorname{arctg} x^2 \quad ?$$

☐ *a)* (1) e (2);

☐ *b)* (1), (2) e (3);

☐ *c)* (1), (2) e (4);

☐ *d)* (1) e (4).

---

11) Una primitiva in $\mathbb{R}$ della funzione $e^x |e^x - 1|$

☐ *a)* è la funzione $\frac{1}{2}(e^x - 1)^2$;

☐ *b)* è la funzione $\frac{1}{2}(e^x - 1)|e^x - 1|$;

☐ *c)* è la funzione $\frac{1}{2} e^x |e^x - 1|^2$;

☐ *d)* non esiste.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 19 luglio 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di frontiera* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Si dice che un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è *limitato superiormente* se ...; se l'insieme X è limitato superiormente si chiama *estremo superiore* di X ... (completare le definizioni).

3) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Si chiama *primitiva* di f ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il *criterio del confronto* per le serie a termini non negativi.

2) Enunciare e dimostrare il *teorema dell'esistenza degli zeri*.

3) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$). Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ allora f è anche ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{(2n-9)^5} \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{5}{x} \right)^{\frac{1}{5-x}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 SETTEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsen} 2x - \operatorname{arcsen} x^2}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $[0, 2]$;
- ☐ *b)* $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$;
- ☐ *c)* $[0, \frac{1}{2}]$;
- ☐ *d)* $]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $]0, +\infty[$. Dire che: "*Il punto* $x_0 = 1$ **non è** *un punto di minimo assoluto per la funzione* f" equivale a dire che:

- ☐ *a)* " $\lim_{x\to 1} f(x) = \alpha < f(1)$ ";
- ☐ *b)* " $\exists\, \overline{x} \in]0, +\infty[\; : \; f(\overline{x}) < f(1)$ ";
- ☐ *c)* " $\exists\, U \in \mathcal{U}(1) \; : \; f(x) < f(1) \;\; \forall\, x \in U \cap]0, +\infty[\setminus \{1\}$ ";
- ☐ *d)* " $\forall\, U \in \mathcal{U}(1) \; \exists\, \overline{x} \in U \cap]0, +\infty[\; : \; f(\overline{x}) < f(1)$ ".

---

3) La derivata della funzione $(\operatorname{sen} x)^{3x+2}$ è uguale a

- ☐ *a)* $3\,(\operatorname{sen} x)^{3x+1}$;
- ☐ *b)* $3\,(\operatorname{sen} x)^{3x+1} \cos x$;
- ☐ *c)* $(\operatorname{sen} x)^{3x+2}\,[3 \log(\operatorname{sen} x) + (3x+2)\cos x]$;
- ☐ *d)* $(\operatorname{sen} x)^{3x+1}\,[3 \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) + (3x+2)\cos x]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \quad ?$$

- ☐ *a)* (2), (3) e (4);
- ☐ *b)* (3) e (4);
- ☐ *c)* solo (4);
- ☐ *d)* (2) e (4).

---

5) Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. La condizione "*La successione* $\{\log(2 + a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è convergente*"

- ☐ *a)* è necessaria e sufficiente,
- ☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente,
- ☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria,
- ☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente,

affinché la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

6) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\,x}+x & \text{se } x\le 0\\ 2\,\mathrm{sen}\,x+\cos x & \text{se } x>0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* f ha nel punto $x_0=0$ una discontinuità di prima specie;
- ☐ *b)* f è continua nel punto $x_0=0$ ma non è derivabile in tale punto;
- ☐ *c)* nel punto $x_0=0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;
- ☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{sen}\,x+x\cos\frac{1}{x}\right)$

- ☐ *a)* è uguale a 0;
- ☐ *b)* è uguale a 1;
- ☐ *c)* è uguale a $+\infty$;
- ☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases} x^5 & \text{se } x<0\\ x^2+a & \text{se } 0\le x\le 1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x>1 \end{cases}.$

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è iniettiva;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha massimo assoluto;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è derivabile nel punto $x_0=1$;
- ☐ *d)* $f''(2)=\log^2 2\ \forall a\in\mathbb{R}$.

---

9) L'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

- ☐ *a)* non esiste;
- ☐ *b)* è uguale a $\frac{1}{2}$;
- ☐ *c)* è uguale a $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$;
- ☐ *d)* è uguale a $+\infty$.

---

10) Quali tra le seguenti funzioni definite in $[-1,1]$ verificano le ipotesi del teorema di Lagrange:

$$(1)\quad f_1(x)=\begin{cases} \mathrm{sen}\,x^2 & \text{se } x\in[-1,0]\\ x^3 & \text{se } x\in\,]0,1] \end{cases},\quad (2)\quad f_2(x)=\begin{cases} \mathrm{sen}\,x^3 & \text{se } x\in[-1,0]\\ x^2 & \text{se } x\in\,]0,1] \end{cases},$$

$$(3)\quad f_3(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in[-1,0]\\ x & \text{se } x\in\,]0,1] \end{cases},\quad (4)\quad f_4(x)=|x|\,\mathrm{sen}\,x\ \ ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (1), (2) e (3);
- ☐ *c)* (1), (2) e (4);
- ☐ *d)* (1) e (4).

---

11) L'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3x+2}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{3}{8}\log 2+\frac{\pi}{4}$;
- ☐ *b)* $\frac{1}{8}(\log 2+\pi)$;
- ☐ *c)* $\frac{1}{8}(\log 8+\pi)$;
- ☐ *d)* $\frac{3}{8}\log 5+\frac{\pi}{8}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 SETTEMBRE 2013
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se ... . Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si chiama *estremo superiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

2) Data una funzione $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è uguale a -1*" vuol dire che ... (completare la definizione).

3) Data una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dire che "*la retta di equazione $y = 2x + 1$ è un asintoto per il grafico di f (per x che tende a $+\infty$)*" vuol dire che ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il *teorema dell'esistenza degli zeri.*

2) Enunciare e dimostrare il *teorema di Rolle.*

3) Dimostrare che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è ivi integrabile secondo Riemann.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ (x^2 - x^3)^7 \,:\, x \in [0, \sqrt{2}] \setminus \mathbb{Q} \right\},$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo. Giustificare quanto asserito.

2) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\log 2}^{\log 3} \mathrm{e}^{x} |\mathrm{e}^{x} - 1|^5 \, \mathrm{d}\, x \, .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \left(x^2 - 3x + 2 \right)$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 4 ottobre 2013
Prima prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsen} x^2 - \operatorname{arcsen} 2x}$ è l'insieme

☐ *a)* $[0, 2]$;

☐ *b)* $[-\frac{1}{2}, 0]$;

☐ *c)* $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$;

☐ *d)* $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$.

---

2) Sia f una funzione reale definita nell'intervallo $]0, +\infty[$. Dire che: "*Il punto* $x_0 = 1$ **non è** *un punto di massimo assoluto per la funzione* f" equivale a dire che:

☐ *a)* " $\exists\, \overline{x} \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \;:\; f(\overline{x}) > f(x) \;\; \forall\, x \in]0, +\infty[$ " ;

☐ *b)* " $\forall\, U \in \mathcal{U}(1) \;\exists\, \overline{x} \in U \cap]0, +\infty[\setminus \{1\} \;:\; f(\overline{x}) > f(1)$ " .

☐ *c)* " almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to 0+} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ è uguale a $+\infty$ " ;

☐ *d)* " $\exists\, \overline{x} \in]0, +\infty[\;:\; f(\overline{x}) > f(1)$ " .

---

3) La derivata della funzione $(\operatorname{sen} 2x)^{3x}$ è uguale a

☐ *a)* $3\,(\operatorname{sen} 2x)^{3x}\,[\log(\operatorname{sen} 2x) + 2x \operatorname{cotg} 2x]$;

☐ *b)* $3\,(\operatorname{sen} 2x)^{3x-1}$;

☐ *c)* $6\,(\operatorname{sen} 2x)^{3x-1} \cos 2x$;

☐ *d)* $3\,(\operatorname{sen} 2x)^{3x-1}\,[(\operatorname{sen} 2x)\log(\operatorname{sen} 2x) + x \cos 2x]$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1} \quad ?$$

☐ *a)* (2), (3) e (4) ;

☐ *b)* (3) e (4) ;

☐ *c)* solo (4) ;

☐ *d)* (2) e (4) .

---

5) Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. La condizione "*La successione* $\{e^{2+a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *è convergente*"

☐ *a)* è necessaria e sufficiente ,

☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente ,

☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria ,

☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente ,

affinché la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia convergente.

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\,x} + x^3 - 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - (\operatorname{sen} x + \cos x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- ☐ *a)* f ha nel punto $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie;
- ☐ *b)* f è continua nel punto $x_0 = 0$ ma non è derivabile in tale punto;
- ☐ *c)* nel punto $x_0 = 0$ esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di f;
- ☐ *d)* esiste la derivata seconda $f''(0)$.

---

7) Il limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} x + \cos \frac{1}{x}\right)$

- ☐ *a)* è uguale a 0;
- ☐ *b)* è uguale a 1;
- ☐ *c)* è uguale a $+\infty$;
- ☐ *d)* non esiste.

---

8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} x^5 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + a & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è iniettiva;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha minimo assoluto;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali f_a è continua nel punto $x_0 = 1$;
- ☐ *d)* esistono valori di a per i quali f_a ha punti di minimo locale.

---

9) L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+(x+1)^2}\, \mathrm{d}x$

- ☐ *a)* non esiste;
- ☐ *b)* è uguale a $\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8}$;
- ☐ *c)* è uguale a $\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{8} \log \frac{1}{2}$;
- ☐ *d)* è uguale a $+\infty$.

---

10) Quali tra le seguenti funzioni definite in $[-1,1]$ verificano le ipotesi del teorema di Lagrange:

$$(1)\quad f_1(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^3 & \text{se } x \in \,]0,1] \end{cases} \quad , \quad (2)\quad f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x^3 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x^2 & \text{se } x \in \,]0,1] \end{cases} \quad ,$$

$$(3)\quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in \,]0,1] \end{cases} \quad , \quad (4)\quad f_4(x) = |x| \cos x \quad ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (1), (2) e (3);
- ☐ *c)* (1), (2) e (4);
- ☐ *d)* (1) e (4).

---

11) L'integrale $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{e}^{\,x}\, \mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* $\mathrm{e} - 2$;
- ☐ *b)* $\mathrm{e} - 1$;
- ☐ *c)* $5\mathrm{e} - 2$;
- ☐ *d)* 0.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani)
Prova d'Esame del giorno 4 ottobre 2013
Seconda prova scritta (compito A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *convergente* se ... , *divergente* se ... , *non regolare* se ... (completare le definizioni).

2) Data una funzione $f :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a -1 è uguale a* 2" vuol dire che ... (completare la definizione).

3) Si chiama funzione $\operatorname{arctg} x$ la funzione ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Ogni successione limitata ha una sottosuccessione ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

2) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione prodotto fg.

3) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}\right) .$$

2) Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{0} \frac{|x+1|}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}\,x .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log\left|\frac{x}{x+4}\right|^3$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 15 NOVEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\log(|x+5|-2)}{\sqrt{x^2+9x+20}}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $]-\infty,-7[\,\cup\,]-3,+\infty[$;
- ☐ *b)* $]-\infty,-5[\,\cup\,]-4,+\infty[$;
- ☐ *c)* $[-7,-5]\cup[-4,-3]$;
- ☐ *d)* $]-\infty,-7[\,\cup\,]-5,-4[\,\cup\,]-3,+\infty[$.

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$. Dire che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto interno* a E equivale a dire che:

- ☐ *a)* $\inf\{|x-x_0| \,:\, x \in \mathbb{R}\setminus E\} > 0$;
- ☐ *b)* ogni successione di punti di E possiede una sottosuccessione convergente a x_0;
- ☐ *c)* $\sup\{|x-x_0| \,:\, x \in E\} < +\infty$;
- ☐ *d)* x_0 non è un punto interno a $\mathbb{R}\setminus E$.

---

3) La derivata della funzione $\operatorname{arctg} x^x$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{x^x}{1+x^{2x}} + x^x(1+\log x)\operatorname{arctg} x^x$;
- ☐ *b)* $e^{x\log x}\,\frac{1+\log x}{1+x^{2x}}$;
- ☐ *c)* $\frac{x^x}{1+x^{2x}}\operatorname{arctg} x^{x-1}$;
- ☐ *d)* $\frac{x^x}{1+x^{2x}}(x+\log x)$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n+1}\right) \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad , \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-\frac{\pi}{3}} \quad , \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)^{-\frac{3}{\pi}}\ ?$$

- ☐ *a)* (1), (3) e (4);
- ☐ *b)* (3) e (4);
- ☐ *c)* (2), (3) e (4);
- ☐ *d)* (2) e (3).

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2}-(n+1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è crescente;
- ☐ *b)* è decrescente, ma non è strettamente decrescente;
- ☐ *c)* è decrescente e divergente;
- ☐ *d)* è decrescente e convergente.

---

6) Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^{\operatorname{tg} 2x}-2^{\operatorname{arctg} 3x}}{\operatorname{sen} 2x}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* $\frac{2}{3}\log 3-\frac{3}{2}\log 2$;
- ☐ *c)* $\log\frac{3}{\sqrt{8}}$;
- ☐ *d)* $-\infty$.

---

7) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x)=\begin{cases}2^{ax} & \text{se } x\le 0\\ 1-x & \text{se } 0<x<1\\ a-\log x & \text{se } x\ge 1\end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0=1$ è di massimo locale per f_a ;
- ☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva soltanto se $a\le -\log 2$;
- ☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0=0$.

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=\frac{\sqrt{4x+1}}{x}$ è vera ?

- ☐ *a)* la funzione f è strettamente monotona in tutto il suo dominio ;
- ☐ *b)* f non è iniettiva ;
- ☐ *c)* f ha massimo assoluto ;
- ☐ *d)* la retta di equazione $12(y-\frac{3}{2})=-5(x-2)$ è tangente al grafico della funzione f .

---

9) L'integrale $\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* -1 ;
- ☐ *b)* $-\log 4$;
- ☐ *c)* $-\frac{8}{3}\log 2$;
- ☐ *d)* $-\frac{7}{6}$.

---

10) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} 2x}{(1+\cos 2x)^3}\,\mathrm{d}x$ è uguale a

- ☐ *a)* 1 ;
- ☐ *b)* $-\frac{3}{4}$;
- ☐ *c)* $\frac{3}{4}$;
- ☐ *d)* $\frac{3}{16}$.

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x)=\int_\pi^{\sqrt{x}}\operatorname{sen}^2 t^2\,\mathrm{d}t$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\sqrt{x}}$;
- ☐ *b)* $\frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{2\sqrt{x}}$;
- ☐ *c)* $\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}4t\operatorname{sen} t^2\cos t^2\,\mathrm{d}t$;
- ☐ *d)* $\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 15 NOVEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \dfrac{\sqrt{2^{x^2+9x+22}-4}}{1+\log^2(2-|x+5|)}$ è l'insieme

☐ *a)* $[-7,-5] \cup [-4,-3]$;

☐ *b)* $]-7,-5] \cup [-4,-3[$;

☐ *c)* $]-\infty,-7[\cup]-5,-4[\cup]-3,+\infty[$;

☐ *d)* $]-\infty,-5[\cup]-4,+\infty[$.

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$. Dire che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto interno* a E equivale a dire che:

☐ *a)* esistono infiniti intorni circolari di x_0 contenuti in E ;

☐ *b)* x_0 non è un punto di accumulazione per $\mathbb{R} \setminus E$;

☐ *c)* x_0 non è un punto interno a $\mathbb{R} \setminus E$;

☐ *d)* ogni successione di punti di $\mathbb{R} \setminus E$ ha una sottosuccessione convergente ad un punto $\overline{x}$ diverso da x_0 .

---

3) La derivata della funzione $\operatorname{arcsen} x^x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{x^x}{\sqrt{1-x^{2x}}} + x^x(1+\log x)\operatorname{arcsen} x^x$;

☐ *b)* $\frac{x^x}{\sqrt{1-x^{2x}}}(x+\log x)$;

☐ *c)* $\frac{x^x}{\sqrt{1-x^x}} \frac{1+\log x}{\sqrt{1+x^x}}$;

☐ *d)* $\frac{1}{\sqrt{1-x^{2x}}} x \operatorname{arcsen} x^{x-1}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad , \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n}}{2} \quad , \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n} \ ?$$

☐ *a)* (1) e (2) ;

☐ *b)* (2) e (3) ;

☐ *c)* (3) e (4) ;

☐ *d)* (2) e (4) .

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2}-(n+1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è crescente ed il suo minimo è uguale a $\sqrt{2}-1$;

☐ *b)* è decrescente ed il suo estremo superiore è uguale a 0 ;

☐ *c)* è decrescente ed il suo estremo inferiore è uguale a -1 ;

☐ *d)* non è monotòna .

---

6) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^{x^2} - 2^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} 2x}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* $\log \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- ☐ *c)* $\frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x \le 0 \\ 1-x & \text{se } 0 < x < 1 \\ a - \log x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha massimo assoluto ;
- ☐ *c)* per qualunque $a \in \mathbb{R}$ l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo ;
- ☐ *d)* $f_a''(-1) = \frac{a^2 \log^2 2}{2^a}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ è vera ?

- ☐ *a)* f ha massimo assoluto ;
- ☐ *b)* f ha punti di massimo locale ;
- ☐ *c)* f ha minimo assoluto ;
- ☐ *d)* la retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$ ha equazione $y = 4(x-1)$.

---

9) L'integrale $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$;
- ☐ *b)* $\log \left(\frac{2}{3}\right)^5$;
- ☐ *c)* $\log \frac{256}{243}$;
- ☐ *d)* $-3 \log 2$.

---

10) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* 1 ;
- ☐ *b)* $\frac{2}{3}(1 - 2\sqrt{2})$;
- ☐ *c)* $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;
- ☐ *d)* $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$ è uguale a

- ☐ *a)* e^{x^2} ;
- ☐ *b)* $2x\, e^{x^4}$;
- ☐ *c)* $2x\, e^{x^2}$;
- ☐ *d)* e^{x^4} .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 15 NOVEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\log(2-|x+5|)}{\sqrt{9-3^{x^2+9x+22}}}$ è l'insieme

☐ *a)* $]-7,-3[$;

☐ *b)* $]-\infty,-7[\, \cup\,]-5,-4[\, \cup\,]-3,+\infty[$;

☐ *c)* $[-7,-5] \cup [-4,-3]$;

☐ *d)* $]-5,-4[$.

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$. Dire che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto interno* a E equivale a dire che:

☐ *a)* x_0 non è un punto di frontiera per E ;

☐ *b)* x_0 non è né un punto di accumulazione per E né un punto isolato di E ;

☐ *c)* x_0 esistono infinite successioni di punti di E convergenti a x_0 ;

☐ *d)* non esiste alcuna successione di punti di $\mathbb{R} \setminus E$ convergente a x_0 .

---

3) La derivata della funzione $\sqrt{1+x^x}$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{1}{\sqrt{1+x^{2x}}}\; x^x\,(1+\log x)$;

☐ *b)* $\mathrm{e}^{x\log x + \log\frac{1}{2}}\; \frac{1+\log x}{\sqrt{1+x^x}}$;

☐ *c)* $\frac{x^x}{2\sqrt{1+x^x}} + x^x\,(1+\log x)\sqrt{1+x^x}$;

☐ *d)* $\frac{1}{2\sqrt{1+x^x}}\; x\,\sqrt{1+x^{x-1}}$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2}\ ,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\ ,\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}\ ,\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)^{n}\ ?$$

☐ *a)* (2) e (3) ;

☐ *b)* (1) e (4) ;

☐ *c)* (2) e (4) ;

☐ *d)* (2), (3) e (4) .

---

5) La successione $\left\{\sqrt{n^2+2}-(n+1)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è divergente a $+\infty$;

☐ *b)* è decrescente e convergente a -2 ;

☐ *c)* è limitata inferiormente ;

☐ *d)* non è regolare .

---

6) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^{\operatorname{sen}^3 x}}{\operatorname{sen}^3 2x}$ è uguale a

☐ *a)* 0 ;
☐ *b)* $\frac{1}{8}\log\frac{3}{2}$;
☐ *c)* $\log\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$;
☐ *d)* $+\infty$.

---

7) Per ogni $a\in\mathbb{R}$ sia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x\le 0 \\ 1-x & \text{se } 0<x<1 \\ a-\log x & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* per qualunque $a\in\mathbb{R}$ la derivata $f'_a(x)$ esiste soltanto se $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$;
☐ *b)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0=0$ è di massimo assoluto per f_a ;
☐ *c)* qualunque sia $a\in\mathbb{R}$ nessuna retta tangente al grafico di f_a è parallela alla retta di equazione $y=2x$;
☐ *d)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0=1$ è di massimo locale per f_a .

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x)=\frac{\sqrt{4x-1}}{x}$ è vera ?

☐ *a)* f è derivabile in ogni punto del suo dominio ;
☐ *b)* f ha massimo assoluto ;
☐ *c)* f non ha minimo assoluto ;
☐ *d)* il grafico di f ha un asintoto verticale .

---

9) L'integrale $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-7x+12}\,dx$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$;
☐ *b)* $12\log\frac{3}{2}$;
☐ *c)* $\log\frac{3^{12}}{2^{19}}$;
☐ *d)* $-5\log 3$.

---

10) L'integrale $\int_0^{\log\sqrt{5}} e^{2x}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{1}{8}$;
☐ *b)* $\frac{8}{3}$;
☐ *c)* $\frac{4}{3}$;
☐ *d)* 10 .

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x)=\int_0^{x^2}\operatorname{sen}^2 t^2\,dt$ è uguale a

☐ *a)* $\operatorname{sen}^2 x^4$;
☐ *b)* $2x\operatorname{sen}^2 x^4$;
☐ *c)* $2x\operatorname{sen}^2 x^4\cdot 2\operatorname{sen} x^2\cos x^2$;
☐ *d)* $2x\operatorname{sen}^2 x^2\cos^2 x^2$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corso di Analisi Matematica I (A-E) (Prof. A. Villani e F. Faraci)
Prova d'Esame del giorno 15 novembre 2013
Seconda prova scritta (compito B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Data una funzione $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ è uguale a -2*" vuol dire che ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è *derivabile* in un punto $x_0 \in I$ se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il *teorema dell'esistenza degli zeri*.

2) Enunciare e dimostrare il *teorema di derivazione della funzione prodotto fg*.

3) Se F è una primitiva di f nell'intervallo I, allora tutte e sole le primitive di f in I sono le funzioni del tipo ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{(n+1)!} - \frac{\sqrt{n^3+1}}{2n^2+3} \right) .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1} \right)^{\sqrt{n^5 + \operatorname{sen} n}} .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log |x^2 - 5x + 6|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 DICEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9x+20}}{1+\log^2(|x+5|-2)}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $]-\infty,-7[\ \cup\ ]-3,+\infty[$;
- ☐ *b)* $]-\infty,-5]\ \cup\ [-4,+\infty[$;
- ☐ *c)* $[-7,-5[\ \cup\ ]-4,-3]$;
- ☐ *d)* $]-\infty,-7[\ \cup\ [-5,-4]\ \cup\ ]-3,+\infty[$.

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di $\mathbb{R}$. La condizione

$$\inf\{|x-x_0| \ :\ x \in \mathbb{R}\setminus E\} > 0$$

- ☐ *a)* è necessaria e sufficiente ;
- ☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente ;
- ☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria ;
- ☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente

affinché il punto x_0 sia un *punto interno* a E.

---

3) La derivata della funzione arctg $\left(x^{2x}\right)$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{x^{2x}}{1+x^{4x}} + 2x^{2x}(1+\log x)\operatorname{arctg}\left(x^{2x}\right)$;
- ☐ *b)* $2x^{2x}\frac{1+\log x}{1+x^{4x}}$;
- ☐ *c)* $\frac{x^{2x}}{1+x^{4x}}\operatorname{arctg}\left(x^{2x-1}\right)$;
- ☐ *d)* $\frac{2x^{2x}}{1+x^{4x}}(x+\log x)$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n+1}\right)\ ,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ ,\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-\frac{\pi}{4}}\ ,\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)^{-\frac{4}{\pi}}\ ?$$

- ☐ *a)* (1), (3) e (4) ;
- ☐ *b)* (3) e (4) ;
- ☐ *c)* (2), (3) e (4) ;
- ☐ *d)* (2) e (4) .

---

5) La successione $\left\{n-\sqrt{n^2+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è decrescente ;
- ☐ *b)* è crescente, ma non è strettamente crescente ;
- ☐ *c)* è crescente e divergente ;
- ☐ *d)* è crescente e convergente .

---

6) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{\operatorname{tg} 2x} - 3^{3x}}{\operatorname{sen} 2x}$ è uguale a

☐ *a)* 0 ;
☐ *b)* $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\log 3$;
☐ *c)* $\log \frac{2}{\sqrt{27}}$;
☐ *d)* $-\infty$.

---

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x \leq 0 \\ 1+x & \text{se } 0 < x < 1 \\ a + \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

☐ *a)* esistono valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di massimo locale per f_a ;
☐ *b)* esiste un unico valore di a per cui f_a è continua in $\mathbb{R}$;
☐ *c)* la funzione f_a è iniettiva soltanto se $a \geq 2$;
☐ *d)* esistono valori di a per cui f_a è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{x}$ è vera ?

☐ *a)* la funzione f è strettamente monotona in tutto il suo dominio ;
☐ *b)* f è iniettiva ;
☐ *c)* f ha punti di minimo locale ;
☐ *d)* la retta di equazione $6(y - \frac{3}{2}) = -5(x-2)$ è tangente al grafico della funzione f .

---

9) L'integrale $\int_{-1}^{0} \frac{5x+1}{x^2+x-2}\, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{3}{2}$;
☐ *b)* $\frac{3}{2}\log 2$;
☐ *c)* $\log 2$;
☐ *d)* $\log \frac{2}{3}$.

---

10) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{(1+\cos 3x)^3}\, \mathrm{d}x$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{3}{4}$;
☐ *b)* 1 ;
☐ *c)* $\frac{1}{8}$;
☐ *d)* $-\frac{1}{8}$.

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_{\pi}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}^3 t^2\, \mathrm{d}t$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{2\sqrt{x}}$;
☐ *b)* $\frac{\operatorname{sen}^3 x^2}{2\sqrt{x}}$;
☐ *c)* $\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} 6t \operatorname{sen}^2 t^2 \cos t^2\, \mathrm{d}t$;
☐ *d)* $\operatorname{sen}^3 \sqrt{x}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/ 2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 DICEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO B)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \dfrac{\log^2(2-|x+5|)}{\sqrt{2^{x^2+9x+22}-4}}$ è l'insieme

- ☐ *a)* $[-7,-5[\,\cup\,]-4,-3]$;
- ☐ *b)* $]-7,-5[\,\cup\,]-4,-3[$;
- ☐ *c)* $]-\infty,-7[\,\cup\,[-5,-4]\,\cup\,]-3,+\infty[$;
- ☐ *d)* $]-\infty,-5]\,\cup\,[-4,+\infty[$.

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di $\mathbb{R}$. La condizione "Esistono infinite successioni di punti di E convergenti a x_0"

- ☐ *a)* è necessaria e sufficiente;
- ☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente;
- ☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria;
- ☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente

affinché il punto x_0 sia un *punto interno* a E.

---

3) La derivata della funzione arcsen $\left(x^{2x}\right)$ è uguale a

- ☐ *a)* $\frac{x^{2x}}{\sqrt{1-x^{4x}}} + 2x^{2x}(1+\log x)\,\text{arcsen}\left(x^{2x}\right)$;
- ☐ *b)* $\frac{2x^{2x}}{\sqrt{1-x^{4x}}}(x+\log x)$;
- ☐ *c)* $\frac{2x^{2x}}{\sqrt{1-x^{2x}}}\,\frac{1+\log x}{\sqrt{1+x^{2x}}}$;
- ☐ *d)* $\frac{2x}{\sqrt{1-x^{4x}}}\,\text{arcsen}\left(x^{2x-1}\right)$.

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}\right)\ ,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ ,\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n}}{\mathrm{e}^{-n}}\ ,\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\ ?$$

- ☐ *a)* (1) e (2);
- ☐ *b)* (2) e (3);
- ☐ *c)* (1) e (3);
- ☐ *d)* (2) e (4).

---

5) La successione $\left\{n-\sqrt{n^2+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- ☐ *a)* è decrescente ed il suo minimo è uguale a $-\sqrt{2}$;
- ☐ *b)* è crescente ed il suo estremo superiore è uguale a 0;
- ☐ *c)* è crescente ed il suo estremo superiore è uguale a $-\frac{1}{2}$;
- ☐ *d)* non è monotòna.

---

6) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2} - 3^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} 2x}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0;
- ☐ *b)* $\log \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- ☐ *c)* $\frac{1}{2} \log \frac{2}{3}$;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x \leq 0 \\ 1+x & \text{se } 0 < x < 1 \\ a + \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* esistono valori di a per i quali f_a è continua in $\mathbb{R}$;
- ☐ *b)* esistono valori di a per i quali f_a ha minimo assoluto;
- ☐ *c)* esistono valori di a per i quali l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo ;
- ☐ *d)* esistono valori di a per i quali f_a è convessa in $\mathbb{R}$.

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{5x^2+3}{x^2+1}$ è vera ?

- ☐ *a)* f ha massimo assoluto;
- ☐ *b)* f ha punti di massimo locale;
- ☐ *c)* f ha minimo assoluto;
- ☐ *d)* la retta tangente al grafico di f nel punto $(1,4)$ ha equazione $y - 4 = 4(x-1)$.

---

9) L'integrale $\int_{-2}^{0} \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $-\frac{4}{3}$;
- ☐ *b)* $-\log 3$;
- ☐ *c)* $\log 3$;
- ☐ *d)* $-\log \frac{2}{3}$.

---

10) L'integrale $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* 1;
- ☐ *b)* $\sqrt{2} - 1$;
- ☐ *c)* $1 - \sqrt{2}$;
- ☐ *d)* $-\frac{2}{\sqrt{2}} + 1$.

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_{0}^{x^3} e^{t^3}\, dt$ è uguale a

- ☐ *a)* e^{x^3};
- ☐ *b)* $3x^2 e^{x^9}$;
- ☐ *c)* $3x^2 e^{x^3}$;
- ☐ *d)* e^{x^9}.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 DICEMBRE 2013
PRIMA PROVA SCRITTA (COMPITO C)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il punteggio viene attribuito nel modo seguente: **punti 20** se vi sono almeno cinque risposte corrette; **punti 2** per ciascuna risposta esatta in aggiunta alle prime cinque; **punti -1** per ciascuna risposta errata; **punti 0** per ogni risposta non data. Tempo disponibile: **90 minuti**.

1) Il dominio della funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\sqrt{9-3^{x^2+9x+22}}}{4+\log^2(2-|x+5|)}$ è l'insieme

☐ *a)* $]-7,-3[\,;$

☐ *b)* $]-\infty,-7[\ \cup\ [-5,-4]\ \cup\ ]-3,+\infty[\,;$

☐ *c)* $[-7,-5[\ \cup\ ]-4,-3]\,;$

☐ *d)* $[-5,-4]\,.$

---

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $E \neq \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di $\mathbb{R}$. La condizione "x_0 non è né un punto di accumulazione per E né un punto isolato di E"

☐ *a)* è necessaria e sufficiente;

☐ *b)* è necessaria ma non sufficiente;

☐ *c)* è sufficiente ma non necessaria;

☐ *d)* non è né necessaria né sufficiente

affinché il punto x_0 sia un *punto interno* a E.

---

3) La derivata della funzione $\sqrt{1+x^{2x}}$ è uguale a

☐ *a)* $\frac{1}{\sqrt{1+x^{4x}}}\ x^{2x}\,(1+\log x)\,;$

☐ *b)* $\mathrm{e}^{2x\log x}\ \frac{1+\log x}{\sqrt{1+x^{2x}}}\,;$

☐ *c)* $\frac{x^{2x}}{2\sqrt{1+x^{2x}}} + x^{2x}\,(1+\log x)\sqrt{1+x^{2x}}\,;$

☐ *d)* $\frac{x^{2x}}{\sqrt{1+x^{2x}}}\ (x+\log x)\ .$

---

4) Quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2}\quad,\quad(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\quad,\quad(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^3}\quad,\quad(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{1+\mathrm{e}}\right)^{n}\ ?$$

☐ *a)* (2) e (3);

☐ *b)* (1) e (4);

☐ *c)* (2) e (4);

☐ *d)* (2), (3) e (4).

---

5) La successione $\left\{n-\sqrt{n^2+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

☐ *a)* è divergente a $-\infty$;

☐ *b)* è crescente e convergente a -1;

☐ *c)* è infinitesima;

☐ *d)* non è regolare.

---

6) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^{\operatorname{sen}^3 x}}{\operatorname{sen}^3 2x}$ è uguale a

- ☐ *a)* 0 ;
- ☐ *b)* $\frac{1}{8}\log\frac{2}{3}$;
- ☐ *c)* $\log\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$;
- ☐ *d)* $+\infty$.

---

7) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente: $f_a(x) = \begin{cases} 2^{ax} & \text{se } x \le 0 \\ 1 + x & \text{se } 0 < x < 1 \\ a + \log x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$.

Quali delle seguenti affermazioni è falsa ?

- ☐ *a)* per qualunque $a \in \mathbb{R}$ la derivata $f_a'(x)$ esiste soltanto se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
- ☐ *b)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 1$ è di minimo assoluto per f_a ;
- ☐ *c)* per ogni $a \le 2$ l'insieme immagine $f_a(\mathbb{R})$ è un intervallo ;
- ☐ *d)* esistono infiniti valori di a per i quali il punto $x_0 = 0$ è di minimo locale per f_a .

---

8) Quali delle seguenti affermazioni riguardanti la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{\sqrt{4x-1}}{x}$ è vera ?

- ☐ *a)* f è derivabile in ogni punto del suo dominio ;
- ☐ *b)* f non ha massimo assoluto ;
- ☐ *c)* f ha minimo assoluto ;
- ☐ *d)* f è iniettiva .

---

9) L'integrale $\int_{-2}^{1} \frac{4x+11}{x^2+x-20}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* $-\frac{2}{3}$;
- ☐ *b)* $\log\frac{1}{4}$;
- ☐ *c)* $\log 4$;
- ☐ *d)* $2\log 3 - 3\log 6$.

---

10) L'integrale $\int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, dx$ è uguale a

- ☐ *a)* 3 ;
- ☐ *b)* $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$;
- ☐ *c)* 1 ;
- ☐ *d)* $\frac{1}{2}$.

---

11) La derivata della funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^2 t^3\, dt$ è uguale a

- ☐ *a)* $\operatorname{sen}^2 x^9$;
- ☐ *b)* $3x^2 \operatorname{sen}^2 x^9$;
- ☐ *c)* $3x^2 \operatorname{sen}^2 x^9 \cdot 2 \operatorname{sen} x^3 \cos x^3$;
- ☐ *d)* $3x^2 \operatorname{sen}^2 x^3 \cos^2 x^3$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)
PROVA D'ESAME DEL GIORNO 13 DICEMBRE 2013
SECONDA PROVA SCRITTA (COMPITO A)

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se ... . Se l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si chiama *estremo superiore* dell'insieme X ... (completare le definizioni).

2) Data una funzione $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a -2 è uguale a $-\infty$*" vuol dire che ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è *continua* in un punto $x_0 \in E$ se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Enunciare e dimostrare il *criterio di convergenza di Cauchy* per le successioni.

2) Enunciare e dimostrare il *teorema di derivazione delle funzioni composte.*

3) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia G una primitiva di f in $[a, b]$. Allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ è uguale a ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione)

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3} \right) \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+1} \right)^{\sqrt{n^2+\cos n}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log|x^2 - 9|$$

e disegnarne il grafico.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	
Anno Accademico 2012/ 2013	
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale	
Corsi di Analisi Matematica I (Proff. A. Villani e F. Faraci)	
Prova d'Esame del giorno 13 dicembre 2013	
Seconda prova scritta (compito C)	

COGNOME e NOME:	
FIRMA:	
MATRICOLA:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula prima di avere consegnato definitivamente il compito. Si possono consegnare **al massimo due fogli a quadri in bella copia**; in entrambi devono essere apposti nome e cognome a stampatello e la firma del candidato. Alla fine della prova **il presente foglio deve essere riconsegnato** debitamente compilato.

Rispondere ai seguenti quesiti. Il **requisito minimo** per superare la prova, con la conferma del voto della prima prova scritta quale voto finale dell'esame, è di rispondere in maniera corretta ad un quesito di tipo **D** e ad uno di tipo **T**. Le ulteriori risposte corrette, se valutate positivamente, comportano un incremento del voto finale dell'esame fino ad un massimo di tre punti. Tempo disponibile: **90 minuti**.

Quesiti di tipo D (*definizioni*)

1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che un punto $c \in \mathbb{R}$ è *di accumulazione* per l'insieme E se ... (completare la definizione).

2) Data una funzione $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, dire che "*il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ è uguale a -2*" vuol dire che ... (completare la definizione).

2) Si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è *derivabile* in un punto $x_0 \in I$ se ... (completare la definizione).

Quesiti di tipo T (*teoremi*)

1) Ogni successione limitata ha una sottosuccessione ... (completare l'enunciato e svolgere la dimostrazione).

2) Enunciare e dimostrare il *teorema di derivazione della funzione reciproca* $\frac{1}{g}$.

3) Mostrare un esempio di funzione reale $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata ma non integrabile secondo Riemann.

Quesiti di tipo E (*esercizi*)

1) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+3}}{(2n^2-9)^3} \quad .$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{5-x}} \quad .$$

3) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right|$$

e disegnarne il grafico.

SOLUZIONI DEI QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

8 febbraio 2013

Compito A: ***1*** *c*; ***2*** *d*; ***3*** *b*; ***4*** *a*; ***5*** *d*; ***6*** *b*; ***7*** *b*; ***8*** *d*; ***9*** *d*; ***10*** *d*; ***11*** *c*.

Compito B: ***1*** *b*; ***2*** *c*; ***3*** *a*; ***4*** *c*; ***5*** *c*; ***6*** *a*; ***7*** *c*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *c*; ***11*** *b*.

Compito C: ***1*** *b*; ***2*** *b*; ***3*** *c*; ***4*** *a*; ***5*** *c*; ***6*** *d*; ***7*** *c*; ***8*** *b*; ***9*** *a*; ***10*** *c*; ***11*** *d*.

22 febbraio 2013

Compito A: ***1*** *d*; ***2*** *d*; ***3*** *d*; ***4*** *b*; ***5*** *c*; ***6*** *c*; ***7*** *d*; ***8*** *d*; ***9*** *c*; ***10*** *c*; ***11*** *b*.

Compito B: ***1*** *d*; ***2*** *c*; ***3*** *a*; ***4*** *d*; ***5*** *b*; ***6*** *a*; ***7*** *b*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *d*; ***11*** *c*.

Compito C: ***1*** *d*; ***2*** *c*; ***3*** *b*; ***4*** *c*; ***5*** *a*; ***6*** *c*; ***7*** *c*; ***8*** *d*; ***9*** *a*; ***10*** *d*; ***11*** *d*.

8 marzo 2013

Compito A: ***1*** *c*; ***2*** *d*; ***3*** *c*; ***4*** *d*; ***5*** *a*; ***6*** *d*; ***7*** *a*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *c*; ***11*** *c*.

Compito B: ***1*** *c*; ***2*** *c*; ***3*** *b*; ***4*** *a*; ***5*** *d*; ***6*** *c*; ***7*** *d*; ***8*** *c*; ***9*** *a*; ***10*** *c*; ***11*** *d*.

Compito C: ***1*** *b*; ***2*** *d*; ***3*** *b*; ***4*** *a*; ***5*** *a*; ***6*** *b*; ***7*** *d*; ***8*** *b*; ***9*** *b*; ***10*** *a*; ***11*** *a*.

19 aprile 2013

Compito A: ***1*** *b*; ***2*** *d*; ***3*** *c*; ***4*** *a*; ***5*** *d*; ***6*** *c*; ***7*** *a*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *c*; ***11*** *d*.

Compito B: ***1*** *c*; ***2*** *d*; ***3*** *c*; ***4*** *a*; ***5*** *a*; ***6*** *b*; ***7*** *a*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *a*; ***11*** *a*.

Compito C: ***1*** *c*; ***2*** *c*; ***3*** *b*; ***4*** *a*; ***5*** *a*; ***6*** *b*; ***7*** *d*; ***8*** *c*; ***9*** *a*; ***10*** *a*; ***11*** *a*.

21 giugno 2013

Compito A: ***1*** *a*; ***2*** *b*; ***3*** *d*; ***4*** *b*; ***5*** *c*; ***6*** *a*; ***7*** *b*; ***8*** *b*; ***9*** *c*; ***10*** *d*; ***11*** *b*.

19 luglio 2013

Compito A: ***1*** *a*; ***2*** *d*; ***3*** *c*; ***4*** *d*; ***5*** *c*; ***6*** *b* oppure *d*; ***7*** *d*; ***8*** *d*; ***9*** *c*; ***10*** *c*; ***11*** *b*.

13 settembre 2013

Compito A: ***1*** *c*; ***2*** *b*; ***3*** *d*; ***4*** *c*; ***5*** *a*; ***6*** *c*; ***7*** *c*; ***8*** *c*; ***9*** *d*; ***10*** *c*; ***11*** *a*.

4 ottobre 2013

Compito A: ***1*** *b*; ***2*** *d*; ***3*** *a*; ***4*** *a*; ***5*** *a*; ***6*** *d*; ***7*** *b*; ***8*** *b*; ***9*** *b*; ***10*** *a*; ***11*** *a*.

15 novembre 2013

Compito A: ***1*** *a*; ***2*** *a*; ***3*** *b*; ***4*** *c*; ***5*** *d*; ***6*** *c*; ***7*** *c*; ***8*** *d*; ***9*** *c*; ***10*** *d*; ***11*** *a*.

Compito B: ***1*** *b*; ***2*** *a*; ***3*** *c*; ***4*** *b*; ***5*** *c*; ***6*** *b*; ***7*** *c*; ***8*** *c*; ***9*** *c*; ***10*** *d*; ***11*** *b*.

Compito C: ***1*** *d*; ***2*** *d*; ***3*** *b*; ***4*** *c*; ***5*** *c*; ***6*** *d*; ***7*** *a*; ***8*** *b*; ***9*** *c*; ***10*** *b*; ***11*** *b*.

13 dicembre 2013

Compito A: ***1*** *a*; ***2*** *a*; ***3*** *b*; ***4*** *d*; ***5*** *d*; ***6*** *c*; ***7*** *a*; ***8*** *b*; ***9*** *c*; ***10*** *c*; ***11*** *a*.

Compito B: ***1*** *b*; ***2*** *b*; ***3*** *c*; ***4*** *a*; ***5*** *b*; ***6*** *b*; ***7*** *d*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *b*; ***11*** *b*.

Compito C: ***1*** *d*; ***2*** *d*; ***3*** *b*; ***4*** *a*; ***5*** *c*; ***6*** *d*; ***7*** *a*; ***8*** *c*; ***9*** *b*; ***10*** *c*; ***11*** *b*.