Relazioni

1. Il prodotto cartesiano.

Definizione 1. (*Prodotto cartesiano di due insiemi*). Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama *prodotto cartesiano* dell'insieme A per l'insieme B, e si indica con il simbolo $A \times B$, l'insieme che ha come elementi tutte le *coppie ordinate* (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B \stackrel{\text{def.}}{=} \{(a, b) \ : \ a \in A \, , \, b \in B\} \ .$$

Per semplicità assumiamo come primitivo il concetto di coppia ordinata ([1]); tale concetto è precisato dalla seguente definizione di *uguaglianza di due coppie ordinate*:

$$(a, b) \ = \ (a', b') \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \ a = a' \ \text{ e } \ b = b'$$

(pertanto in generale si ha $(a, b) \neq (b, a)$; l'uguaglianza $(a, b) = (b, a)$ si ha soltanto se $a = b$).

L'elemento a si chiama *prima coordinata* o *prima componente* o anche *primo elemento* della coppia ordinata (a, b), mentre b prende il nome di *seconda coordinata* (o *seconda componente* o *secondo elemento*).

Esempi 1. *a*) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 1\}$, allora

$$A \times B = \{(1, -1) \, , \, (1, 1) \, , \, (2, -1) \, , \, (2, 1) \, , \, (3, -1) \, , \, (3, 1)\} \ .$$

b) Invece

$$B \times A = \{(-1, 1) \, , \, (-1, 2) \, , \, (-1, 3) \, , (1, 1) \, , \, (1, 2) \, , \, (1, 3)\} \ .$$

Quando uno dei due insiemi A e B è vuoto si assume, per definizione, che il prodotto cartesiano $A \times B$ sia l'insieme vuoto.

Per indicare il prodotto cartesiano $A \times A$ di un insieme A per se stesso si scrive anche A^2 e si parla di *quadrato cartesiano* di A.

Il prodotto cartesiano di più insiemi. In maniera del tutto analoga al prodotto $A \times B$ si definisce il prodotto cartesiano $A \times B \times C$ di tre insiemi A, B e C come l'insieme avente per elementi tutte le *terne ordinate* (a, b, c), con $A \in A$, $b \in B$ e $c \in C$:

$$A \times B \times C \stackrel{\text{def.}}{=} \{(a, b, c) \ : \ a \in A \, , \, b \in B \, , \, c \in C\}$$

e, in generale, il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ di n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ come l'insieme di tutte le *n-uple ordinate* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $a_1 \in A_1 \, , \, a_2 \in A_2 \, , \, \ldots \, , \, a_n \in A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \stackrel{\text{def.}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1 \in A_1 \, , \, a_2 \in A_2 \, , \, \ldots \, , \, a_n \in A_n\} \ .$$

Gli elementi a_1, a_2 e, in generale, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ si chiamano, rispettivamente, la prima, la seconda e la i-ma componente di $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Notiamo che anche i concetti di terna ordinata, quaterna ordinata e, in generale, di n-upla ordinata, che per semplicità acettiamo come primitivi e usiamo in maniera intuitiva, sono suscettibili di una definizione rigororsa.

([1]) In realtà il concetto di coppia ordinata può essere definito usando il concetto di insieme.

2. Relazioni tra insiemi.

Definizione 2. (*Relazione tra due insiemi*). Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama *relazione* tra l'insieme A e l'insieme B (o anche *relazione dall'insieme* A *nell'insieme* B, se si vuole evidenziare il fatto che l'insieme "di partenza" è A) ogni sottoinsieme non vuoto R del prodotto cartesiano $A \times B$

Se R è una relazione tra A e B per indicare che una coppia (a, b) appartiene a R si scrive aRb e si dice che "l'elemento a sta nella relazione R con b".

In maniera intuitiva si può pensare una relazione come un "registro" nel quale sono elencati tutti i possibili "legami" tra elementi di A ed elementi di B.

Esempio 2. Se A è l'insieme dei cittadini italiani e B è l'insieme dei cittadini degli Stati Uniti d'America si può definire una relazione R tra A e B nel modo seguente:

$$a\,R\,b \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad a \text{ è parente entro il quarto grado di } b.$$

Esempio 3. Se C è l'insieme delle cifre decimali, $C = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, si può definire una relazione T dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali nell'insieme C nel modo seguente:

$$x\,T\,c \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{la cifra } c \text{ figura almeno tre volte nella rappresentazione decimale di } x,$$

dove, nel caso di un numero decimale finito, si conviene di adottare la rappresentazione con periodo zero.

È chiaro dalla definizione, e i due esempi precedenti lo confermano, che, in generale, data una relazione R tra due insiemi A e B, preso un elemento $a \in A$, se si considera l'insieme degli elementi di B con i quali a è in relazione, cioè l'insieme

$$\{b \in B \;:\; a\ R\ b\}$$

questo può essere vuoto oppure no e, in questo secondo caso, può avere uno o più elementi.

La precedente osservazione suggerisce come sia possibile definire in maniera rigorosa il concetto di funzione tramite quello di relazione.

Definizione 3. (*Una definizione rigorosa di funzione*). Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama funzione dall'insieme A nell'insieme B una relazione f dall'insieme A nell'insieme B avente la proprietà che

$$\forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad \text{l'insieme } \{y \in B \;:\; x\,f\,y\} \text{ è unitario}$$

o, in altre parole,

$$\forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad \exists_1\ y \in B \;:\; x\,f\,y\ .$$

Se f è una funzione da A in B, per ogni elemento $x \in A$ l'unico elemento $y \in B$ tale che $x\,f\,y$ si chiama il corrispondente di x secondo la funzione f e si indica, come già sappiamo, con $f(x)$.

3. Relazioni in un insieme.

Nell'ambito delle relazioni tra insiemi hanno particolare importanza le relazioni da un insieme in se stesso, che sogliono essere chiamate relazioni in un insieme.

Definizione 4. (*Relazione in un insieme*). Sia A un insieme non vuoto. Si chiama *relazione nell'insieme* A ogni relazione tra l'insieme A e l'insieme A stesso.

Esempi 4. *a*) Se A è l'insieme dei cittadini italiani si può definire una relazione R in A esattamante con la stessa regola adoperata nell'Esempio 2:

$$a\,R\,a' \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ a \text{ è parente entro il quarto grado di } a'.$$

b) Un altro esempio di relazione R_1 che si può considerare nell'insieme A dei cittadini italiani è quella così definita:

$$a\,R_1\,a' \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ a \text{ è residente nella stessa regione di } a'.$$

Esempi 5. *a*) Si può definire una relazione V nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali nel modo seguente:

$$x\,V\,y \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ |x| = |y|\ .$$

b) Un altro esempio di relazione V_1 che si può considerare nell'insieme $\mathbb{R}$ è quella così definita:

$$x\,V_1\,y \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ |x| < |y|\ .$$

c) Un ulteriore esempio di relazione V_2 in $\mathbb{R}$ è dato da

$$x\,V_2\,y \ \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ |x| \le |y|\ .$$

Proprietà delle relazioni in un insieme. Le relazioni in un insieme A possono avere o meno certe importanti proprietà che elenchiamo nella definizone seguente.

Definizione 5. (*Proprietà notevoli delle relazioni in un insieme*). Sia R una relazione nell'insieme A.

Si dice che la relazione R è *riflessiva* (o anche che la relazione R ha la *proprietà riflessiva*) se accade che

$$a\,R\,a \qquad \forall\, a \in A$$

(ogni elemento di A sta nella relazione R con se stesso).

Si dice che la relazione R è *simmetrica* se accade che

$$a, b \in A\ ,\ a\,R\,b \implies b\,R\,a$$

(ogni qual volta che un elemento a sta nella relazione R con un elemento b allora è necessariamente vero che anche b sta nella relazione R con a).

Si dice che la relazione R è *antisimmetrica* se accade che

$$(*) \qquad a, b \in A\ ,\ a\,R\,b\ ,\ b\,R\,a \implies a = b$$

(ogni qual volta che succede che due elementi a e b stanno ognuno nella relazione R con l'altro allora è necessariamente vero che a e b sono lo stesso elemento).

Si dice che la relazione R è *transitiva* se accade che

$$a, b, c \in A\ ,\ a\,R\,b\ ,\ b\,R\,c \implies a\,R\,c$$

(ogni qual volta che un elemento a sta nella relazione R con un elemento b e, a sua volta, b sta nella relazione R con un elemento c allora è necessariamente vero che anche a sta nella relazione R con c).

Notiamo che il fatto che la relazione R sia antisimmetrica può anche esprimersi dicendo che due elementi distinti di A non possono stare entrambi nella relazione R l'uno con l'altro:

$$(**) \qquad \nexists\, a, b \in A \quad : \quad a \neq b \ , \ a\,R\,b \ , \ b\,R\,a \ .$$

Infatti, in maniera insiemistica, la (*) si traduce nell'inclusione

$$(\mathrm{o}) \qquad \{(a, b) \in R \,:\, aRb \ \text{ e } \ bRa\} \subseteq \Delta \quad ,$$

dove Δ è la *diagonale* di $A \times A$, cioè l'insieme

$$\Delta \ = \ \{(a, b) \in A \times A \ : \ b = a\} \ = \ \{(a, a) \ : \ a \in A\} \quad ,$$

mentre la (**) può scriversi

$$(\mathrm{oo}) \qquad \{(a, b) \in R \,:\, aRb \,,\, bRa \ \text{ e } \ a \neq b\} \ = \ \emptyset$$

ed è facile convincersi, ragionando per assurdo, che valgono entrambe le implicazioni

$$(\mathrm{o}) \Longrightarrow (\mathrm{oo}) \quad , \quad (\mathrm{oo}) \Longrightarrow (\mathrm{o}) \quad ,$$

dunque (o) e (oo), e conseguentemente anche (*) e (**), sono affermazioni equivalenti.

Osserviamo ancora che, in particolare, la (*) è vera se l'ipotesi " $a\,R\,b$ e $b\,R\,a$" non è mai verificata, cioè se l'insieme $\{(a, b) \in R \,:\, aRb \ \text{ e } \ bRa\}$ è vuoto.

Esempi 6. *a*) La relazione R dell'Esempio 4 è soltanto simmetrica; la R_1 è invece riflessiva, simmetrica e transitiva.

b) Anche la relazione V dell'Esempio 5 è riflessiva, simmetrica e transitiva. La V_1 è antisimmetrica (dato che l'insieme $\{(a, b) \in \mathbb{R} \,:\, aV_1b \ \text{ e } \ bV_1a\}$ è vuoto) e transitiva e la V_2 riflessiva e transitiva.

Una domanda che gli studenti formulano di frequente in aula è se una relazione R possa essere contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica. La risposta è "Sì, ma solo in casi particolarissimi", come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 1. (Relazioni che sono sia simmetriche che antisimmetriche). *Una relazione R in un insieme A è sia simmetrica che antisimmetrica se e soltanto se R è un sottoinsieme della diagonale Δ di $A \times A$.*

Dimostrazione. È evidente che se R è un sottoinsieme di Δ, cioè è costituita solo da coppie ordinate aventi entrambi gli elementi uguali, allora R è sia simmetrica che antisimmetrica. Viceversa, se R è sia simmetrica che antisimmetrica, allora, presa una qualunque coppia (a, b) appartenente a R, poiché R è simmetrica si ha pure $(b, a) \in R$ e conseguentemente, dato che R è anche antisimmetrica, deve essere $b = a$; pertanto ogni coppia elemento di R è del tipo (a, a), cioè appartiene a Δ. Ciò completa la dimostrazione.

Di particolare interesse tra le relazioni in un insieme sono quelle riflessive, simmetriche e transitive, che si chiamano *relazioni di equivalenza*, e quelle riflessive, antisimmetriche e transitive, che prendono il nome di *relazioni d'ordine*.

4. Relazioni d'ordine.

Definizione 6. (*Relazione d'ordine*). Una relazione R in un insieme A si dice *relazione d'ordine* (o anche *relazione di ordinamento parziale*) in A se R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esempi 7. *a*) Una relazione d'ordine nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'*ordinamento aritmetico*, cioè la relazione d'ordine M definita nel seguente modo:

$$x\,M\,y \overset{\text{def.}}{\iff} x \le y \quad .$$

Ovviamente l'ordinamento aritmetico può essere considerato non solo in $\mathbb{R}$ ma in un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$; questa constatazione rientra come un caso particolare nella successiva Osservazione 1, avente valenza generale.

b) Una relazione d'ordine nell'insieme $\mathbb{N}^+$ dei numeri interi positivi è la relazione "*essere divisore di*", cioè la relazione d'ordine D definita nel seguente modo:

$$m\,D\,n \overset{\text{def.}}{\iff} m \text{ è un divisore di } n \;\; \big[\iff \exists p \in \mathbb{N}^+ \;:\; mp = n \,\big] \quad .$$

c) In una qualunque famiglia non vuota di insiemi $\mathcal{F}$ una relazione d'ordine è l'*ordinamento per inclusione*, cioè la relazione d'ordine $\mathcal{R}$ definita nel seguente modo:

$$A\,\mathcal{R}\,B \overset{\text{def.}}{\iff} A \subseteq B \quad .$$

Osservazione 1. (*Restrizione di una relazione*). Se R è una relazione nell'insieme A e B è un sottoinsieme non vuoto di A, è evidente che l'insieme (di coppie ordinate) $R_B = R \cap (B \times B)$ è una relazione in B (che possiamo chiamare *restrizione* della R a B. È altresì evidente che se R ha una qualunque delle quattro proprietà elencate nella Definizione 5 anche la R_B ha la stessa proprietà.

Elementi confrontabili. Sia R una relazione d'ordine nell'insieme A. Considerati due elementi qualsiasi elementi $a, b \in A$, può accadere che si verifichi una delle due circostanze aRb o bRa ma è anche possibile che nessuno di questi fatti sia vero. Nel primo caso si dice che i due elementi $a, b \in S$ sono *confrontabili* secondo la relazione R.

Definizione 7. (*Elementi confrontabili*). Se R è una relazione d'ordine nell'insieme A si dice che due elementi $a, b \in S$ sono *confrontabili* secondo la relazione R se accade che aRb oppure bRa.

Esempi 8. *a*) Se consideriamo l'ordinamento aritmetico in $\mathbb{R}$ (Esempio 7, *a*)), rispetto a questa relazione d'ordine è vero che due qualsiasi elementi sono confrontabili.

b) Nella relazione d'ordine dell'Esempio 7, *b*) ci sono coppie di elementi confrontabili, ad es. 2 e 4, ma anche coppie di elementi non confrontabili, ad es. 2 e 5. Se si considera la restrizione di questa relazione all'insieme $B = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ allora è vero che due qualsiasi elementi sono confrontabili.

c) Nella relazione d'ordine dell'Esempio 7, *c*), dove $\mathcal{F}$ è uguale alla famiglia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, ci sono coppie di elementi confrontabili, ad es. gli insiemi $\{1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$, ma anche coppie di elementi non confrontabili, ad es. gli insiemi $\{1, 2\}$ e $\{1, 3\}$. Se si considera la restrizione di questa relazione alla famiglia $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \ldots, \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \ldots\}$ allora è vero che due qualsiasi insiemi sono confrontabili.

Definizione 8. (*Relazioni d'ordine totale*). Se dice che una relazione d'ordine R nell'insieme A è una *relazione d'ordine totale* se accade che due qualsiasi elementi $a, b \in S$ sono confrontabili secondo la R.

Le notazioni "con le disuguaglianze". Se R è una relazione d'ordine in un insieme A, per analogia con il caso dell'ordinamento aritmetico in $\mathbb{R}$ si fa spesso uso delle seguenti notazioni.

Dati due elementi $a, b \in A$, per indicare che è aRb si scrive $a \le_R b$ e si dice che "a precede (o è minore o uguale a) b secondo la relazione R". Si scrive inoltre $a <_R b$ e si dice che "a precede in senso stretto (o è strettamente minore di) b secondo la relazione R" per indicare che è aRb e $a \neq b$. In luogo di $a \leq_R b$ e di $a <_R b$, rispettivamente, si può anche scrivere $b \geq_R a$ ("b segue a") e $b >_R a$ ("b segue a in senso stretto").

Infine, molto spesso, quando non vi è possibilità di equivoco su quella che è la relazione d'ordine R che si sta considerando, si scrive semplicemente $a \leq b$, $a < b$ ecc. ecc., omettendo l'indice R.

A proposito delle notazioni con le disuguaglianze usate con una generica relazione d'ordine R è bene notare che la negazione di $a \leq b$, che si indica con $a \not\leq b$, non coincide necessariamente con l'affermazione che è $a > b$; infatti si ha:

$$a \not\leq b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{o } \textit{gli elementi } a \textit{ e } b \textit{ non sono confrontabili} \text{ oppure } a > b \quad .$$

Insiemi ordinati. Chiamiamo *insieme ordinato* (o anche *insieme parzialmente ordinato*) ogni struttura (S, R) costituita da un insieme non vuoto S e da una relazione d'ordine R su S. L'insieme S e la relazione d'ordine R si chiamano, rispettivamente, il *sostegno* e l'*ordinamento* dell'insieme ordinato (S, R). Se la relazione d'ordine R è totale diremo che (S, R) è un *insieme totalmente ordinato.*

Il termine "struttura", qui usato in senso intuitivo, non indica un nuovo concetto e può essere sostituito dal termine "coppia ordinata".

D'ora in avanti, nello svolgimento della teoria delle relazioni d'ordine, adoperemo, per comodità di esposizione, le notazioni con le disuguaglianze, quindi un generico insieme ordinato sarà indicato con $(S\,,\,\leq)$.

5. Maggioranti, minoranti; massimo, minimo; estremo superiore, estremo inferiore.

Definizioni 9. (*Insiemi limitati superiormente, insiemi limitati inferiormente; maggioranti, minoranti*). Sia $(S\,,\,\leq)$ un insieme ordinato.

Un insieme $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, si dice *limitato superiormente* se esiste almeno un elemento $b \in S$ tale che

$$x \leq b \qquad \forall x \in X \quad . \tag{1}$$

Se l'insieme X è limitato superiormente, ogni elemento $b \in S$ per cui è vera la (1) viene detto *maggiorante* dell'insieme X.

Analogamente, X si dice *limitato inferiormente* se esiste almeno un elemento $a \in S$ tale che

$$a \leq x \qquad \forall x \in X \quad ; \tag{2}$$

in questo caso ogni elemento $a \in S$ verificante la (2) viene chiamato *minorante* dell'insieme X.

Si dice che l'insieme X è *limitato* se X è limitato sia superiormente che inferiormente.

Dato che la relazione $\leq$ è transitiva, è chiaro che, se $b \in S$ è un maggiorante dell'insieme X, ogni altro elemento b' di S tale che $b \leq b'$ è pure un maggiorante di X. Un'osservazione analoga vale per i minoranti.

Osserviamo ancora che la negazione della (1), cioè l'affermazione che l'elemento b non è un maggiorante dell'insieme X, si scrive

$$\exists x \in X \,:\, x \not\leq b \quad , \tag{3}$$

dove, in generale, ricordiamo, la negazione $x \not\leq b$ significa che si verifica uno dei seguenti due fatti: o è $x > b$ oppure x non è confrontabile con b. Se però l'insieme $(S\,,\,\leq)$ è totalmente ordinato, allora la (3) diviene

$$\exists x \in X \,:\, x > b \quad . \tag{4}$$

Pertanto si ha, in generale,

$$X \text{ non è limitato superiormente} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall b \in S \;\; \exists x \in X \, : \, x \not\leq b$$

e, nel caso che $(S\,,\,\leq)$ sia totalmente ordinato,

$$X \text{ non è limitato superiormente} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall b \in S \;\; \exists x \in X \, : \, x > b \;\; .$$

Considerazioni del tutto analoghe valgono a proposito dei minoranti e della limitatezza inferiore.

Esempi 9. (*Alcuni esempi in* $(\mathbb{Q}\,,\,\leq)$). Consideriamo come insieme parzialmente ordinato $(S\,,\,\leq)$ l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali munito dell'ordinamento aritmetico.

a) L'insieme $\mathbb{Q}_0^- = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x \leq 0\}$ è limitato superiormente; infatti 0 è un maggiorante di $\mathbb{Q}_0^-$.

Possiamo anzi verificare che l'insieme dei maggioranti di $\mathbb{Q}_0^-$ è uguale all'insieme $\mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x \geq 0\}$. Infatti, dato che 0 è un maggiorante dell'insieme $\mathbb{Q}_0^-$, per un'osservazione fatta in precedenza posssiamo affermare che ogni elemento $b \in \mathbb{Q}$ tale che $b \geq 0$, cioè ogni elemento di $\mathbb{Q}_0^+$, è pure un maggiorante di $\mathbb{Q}_0^-$. Viceversa, se b è un qualunque maggiorante dell'insieme $\mathbb{Q}_0^-$, cioè se $b \in \mathbb{Q}$ è tale che $b \geq x \;\; \forall x \in \mathbb{Q}_0^-$, si ha, in particolare, $b \geq 0$, dunque b appartiene a $\mathbb{Q}_0^+$.

Invece $\mathbb{Q}_0^-$ non è limitato inferiormente. Infatti è chiaro che gli eventuali minoranti a dell'insieme $\mathbb{Q}_0^-$ vanno cercati tra i numeri razionali negativi; d'altra parte nessun numero razionale negativo a può essere un minorante di $\mathbb{Q}_0^-$, in quanto, fissato comunque un tale a, è sempre possibile trovare un elemento x di $\mathbb{Q}_0^-$ tale che $x < a$: basta considerare, ad esempio, $x = a - 1$.

b) Anche l'insieme $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x < 0\}$ è limitato superiormente (zero è un maggiorante), ma non inferiormente (si vede con lo stesso ragionamento adoperato per $\mathbb{Q}_0^-$). Inoltre l'insieme dei maggioranti di $\mathbb{Q}^-$ è di nuovo uguale all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$. Infatti è ovvio che ogni $b \in \mathbb{Q}_0^+$ è un maggiorante di $\mathbb{Q}^-$. Per provare l'inclusione insiemistica contraria, cioè che ogni maggiorante b dell'insieme $\mathbb{Q}^-$ appartiene a $\mathbb{Q}_0^+$, facciamo vedere che non vi possono essere maggioranti di $\mathbb{Q}^-$ appartenenti all'insieme $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^-$; e infatti, se $b \in \mathbb{Q}^-$, allora, considerando un qualunque numero razionale q tale che $b < q < 0$ (ad esempio $q = \frac{b}{2}$) si ha: $q \in \mathbb{Q}^-$ e $b < q$, dunque b non è un maggiorante di $\mathbb{Q}^-$.

c) In maniera del tutto analoga si ha che gli insiemi $\mathbb{Q}_0^+$ e $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x > 0\}$ sono entrambi limitati inferiormente, ma non superiormente, e per entrambi l'insieme dei minoranti è $\mathbb{Q}_0^-$.

d) L'insieme $C = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, 0 \leq x \leq 1\}$ è limitato (0 è un minorante e 1 è un maggiorante) e l'insieme dei minoranti è $\mathbb{Q}_0^-$, mentre l'insieme dei maggioranti è $B = \{b \in \mathbb{Q} \, : \, b \geq 1\}$ (in entrambi i casi la verifica della doppia inclusione insiemistica è immediata; si tratta di un ragionamento del tutto analogo a quello svolto per provare che l'insieme dei maggioranti di $\mathbb{Q}_0^-$ è $\mathbb{Q}_0^+$).

e) Anche l'insieme $D = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, 0 < x < 1\}$ è limitato e gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti sono gli stessi di quelli dell'insieme C. (Per provare che ogni maggiorante b di D appartiene a B si prova che nessun elemento di $\mathbb{Q} \setminus B = \{b \in \mathbb{Q} \, : \, b < 1\}$ è un maggiorante di D. Ciò è ovvio se è $b \leq 0$. Se è $b > 0$, e quindi $0 < b < 1$, allora, considerato un numero razionale q tale che $b < q < 1$, si ha che q appartiene a D, dunque, essendo $b < q$, b non è un maggiorante di D.)

f) Analogamente, anche gli insiemi $E = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, 0 < x \leq 1\}$ e $F = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, 0 \leq x < 1\}$ sono limitati e per entrambi gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti sono gli stessi di quelli di C.

g) Infine, gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ non sono limitati né superiormente né inferiormente.

Per provare che $\mathbb{Q}$ non è limitato superiormente basta osservare che un qualunque $c \in \mathbb{Q}$ non è né un maggiorante né un minorante di $\mathbb{Q}$ dato che vi sono sia elementi $q_1 \in \mathbb{Q}$ tali che $c < q_1$ (ad es. $q_1 = c + 1$) che elementi $q_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $q_2 < c$ (ad es. $q_2 = c - 1$).

Per provare che $\mathbb{Z}$ non è limitato né superiormente né inferiormente basta osservare che un qualunque numero $c \in \mathbb{Q}$ non è né un maggiorante né un minorante di $\mathbb{Z}$ poiché vi sono in $\mathbb{Z}$ elementi sia strettamente maggiori che strettamente maggiori di c (infatti, considerando ad es. la rappresentazione decimale di c,

$$c \ = \sim \ M, C_1 C_2 \ldots c_n \ldots \quad ,$$

è chiaro che, qualunque sia sia il segno $\sim$, gli interi $n_1 = M+2$ e $n_2 = -(M+2)$ sono tali che $n_2 < c < n_1$).

Notiamo che tra gli insiemi $\mathbb{Q}_0^-$ e $\mathbb{Q}^-$, entrambi limitati superiormente ed aventi lo stesso insieme dei maggioranti, vi è diversità di comportamento da parte dell'insieme nei riguardi dell'insieme dei suoi maggioranti; infatti *tra gli elementi di* $\mathbb{Q}_0^-$ *vi è uno dei suoi maggioranti* (lo zero), mentre $\mathbb{Q}^-$ *non contiene nessuno dei suoi maggioranti.* Nel primo caso si dice che l'insieme è dotato di massimo.

Definizioni 10. (*Massimo e minimo di un insieme*). Sia $(S\,, \leq)$ un insieme ordinato.

Dato un insieme $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, si dice che un elemento $M \in S$ è il *massimo* dell'insieme X se M appartiene a X ed è un maggiorante di X:

$$\text{i)}\ \ M \in X \quad ; \quad \text{ii)}\ \ M \geq x \quad \forall x \in X \quad .$$

Analogamente, si dice che un elemento $m \in S$ è il *minimo* dell'insieme X se m appartiene a X ed è un minorante di X:

$$\text{j)}\ \ m \in X \quad ; \quad \text{jj)}\ \ m \leq x \quad \forall x \in X \quad .$$

L'uso dell'articolo determinativo nelle precedenti definizioni è giustificato dal fatto che il massimo, o il minimo, di un insieme, quando esistono, sono unici.

Proposizione 2. (Unicità del massimo e del minimo di un insieme). *Sia* $(S\,, \leq)$ *un insieme ordinato e sia* X *un sottoinsieme non vuoto di* S. *Se l'insieme* X *è dotato di massimo* [risp. *minimo*]*, questo è unico.*

Dimostrazione. Proviamo che, se gli elementi $M, M' \in S$ sono entrambi massimi di X, allora è $M = M'$ (il ragionamento è del tutto analogo per quel che riguarda il minimo). E infatti, se M e M' sono entrambi massimi di X, valgono entrambe le coppie di condizioni:

$$\begin{array}{l} \text{i)}\ \ M \in X \quad ; \quad \text{ii)}\ \ M \geq x \quad \forall x \in X \quad , \\ \text{i}')\ \ M' \in X \quad ; \quad \text{ii}')\ \ M' \geq x \quad \forall x \in X \quad . \end{array}$$

Dalla i) e dalla ii$'$) segue, in particolare, $M' \geq M$. Analogamente dalla i$'$) e dalla ii) si ottiene $M \geq M'$, pertanto $M = M'$.

Per indicare il massimo, ovvero il minimo, di un insieme X si adopera la notazione $\max X$, ovvero $\min X$.

Esempi 10. (*Alcuni esempi in* $(\mathbb{Q}\,, \leq)$). Riprendiamo in esame i sottoinsiemi di $(\mathbb{Q}\,, \leq)$ considerati negli Esempi 9.

Abbiamo già osservato che dei due insiemi limitati superiormente, ma non inferiormente, $\mathbb{Q}_0^-$ e $\mathbb{Q}^-$ soltanto $\mathbb{Q}_0^-$ ha il massimo (che è zero). Analogamente, considerati i due insiemi limitati inferiormente, ma non superiormente, $\mathbb{Q}_0^+$ e $\mathbb{Q}^+$, soltanto $\mathbb{Q}_0^+$ ha il minimo (che è zero).

Per quanto riguarda i quattro insiemi limitati C, D, E e F abbiamo che l'insieme C ha sia il minimo che il massimo (che sono, rispettivamente, zero e uno), l'insieme E ha il massimo (uno) ma non il minimo, l'insieme F ha il minimo (zero) ma non il massimo, mentre l'insieme D non ha né il minimo né il massimo.

Consideriamo ancora, nell'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{Q}\,,\,\leq)$, l'insieme $\mathbb{Q}^-$, che, come abbiamo visto, è limitato superiormente, ma non ha il massimo, ed osserviamo che tra i maggioranti dell'insieme ve n'è uno, lo zero, che occupa una posizione privilegiata rispetto a quella degli altri maggioranti; infatti zero *è il minimo dell'insieme dei maggioranti.* Quando esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di un dato insieme si dice che questo è dotato di estremo superiore.

Definizioni 11. (*Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme*). Sia $(S\,,\,\leq)$ un insieme ordinato.

Se $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, è un insieme limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di X è dotato di minimo, tale minimo si chiama *estremo superiore* dell'insieme X e si indica con il simbolo $\sup X$.

Analogamente, se X è limitato inferiormente ed esiste il massimo dell'insieme dei minoranti di X, questo prende il nome di *estremo inferiore* dell'insieme X e viene denotato con il simbolo $\inf X$.

Le precedenti definizioni e la Proposizione 2 implicano, ovviamente, che l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme, quando esistono, sono unici.

Un'altra conseguenza immediata della definizione di estremo superiore è la

Proposizione 3. (Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore). *Siano* $(S\,,\,\leq)$ *un insieme ordinato,* X *un sottoinsieme non vuoto di* S *e* L *un elemento di* S.

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme X *sia limitato superiormente e risulti* $\sup X = L$ *è che l'elemento* L *abbia le seguenti due proprietà:*

1) $L \geq x \quad \forall x \in X \quad ;$
2) $L \leq b \quad \forall b \in S\,:\, b$ è un maggiorante di $X \quad .$

Dimostrazione. Infatti la condizione 1) dice che L è un maggiorante di X e, conseguentemente, la coppia di condizioni 1) e 2) dice che L è il minimo dell'insieme dei maggioranti di X.

Analogamente si ha la proposizione "gemella"

Proposizione 3′. (Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore). *Siano* $(S\,,\,\leq)$ *un insieme ordinato,* X *un sottoinsieme non vuoto di* S *e* ℓ *un elemento di* S.

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme X *sia limitato inferiormente e risulti* $\inf X = \ell$ *è che l'elemento* ℓ *abbia le seguenti due proprietà:*

I) $\ell \leq x \quad \forall x \in X \quad ;$
II) $\ell \geq a \quad \forall a \in S\,:\, a$ è un minorante di $X \quad .$

È immediato pure il confronto tra i due concetti di massimo e di estremo superiore e tra quelli di minimo e di estremo inferiore.

Proposizione 4. (Massimo ed estremo superiore, minimo ed estremo inferiore). *Sia* $(S\,,\,\leq)$ *un insieme ordinato e sia* X *un sottoinsieme non vuoto di* S.

Se l'insieme X *è dotato di massimo* [risp. *minimo*], *questo è anche l'estremo superiore* [risp. *inferiore*] *dell'insieme* X.

Dimostrazione. Infatti, se $M = \max X$, allora, per la definizione di massimo, M è un maggiorante di X e inoltre $M \in X$, da cui, per la definizione di maggiorante, segue che è pure

$$M \leq b \qquad \forall b \in S\,:\, b \text{ è un maggiorante di } X \quad ,$$

dunque M è il minimo dell'insieme dei maggioranti di X, cioè $M = \sup X$.

Analogamente si ragiona per il minimo.

Esempi 11. (*Alcuni esempi in* $(\mathbb{Q}\,,\,\leq)$).

Riprendiamo di nuovo in esame i sottoinsiemi di $(\mathbb{Q}\,,\,\leq)$ considerati negli Esempi 9 e 10 ed osserviamo che si ha:

$$\sup \mathbb{Q}_0^- = \sup \mathbb{Q}^- = 0 \quad , \quad \inf \mathbb{Q}_0^+ = \inf \mathbb{Q}^+ = 0 \quad ;$$

inoltre:

$$\sup C = \sup D = \sup E = \sup F = 1 \quad ,$$
$$\inf C = \inf D = \inf E = \inf F = 0 \quad .$$

Nei precedenti Esempi 11 tutti gli insiemi limitati superiormente hanno l'estremo superiore e tutti quelli limitati inferiormente hanno l'estremo inferiore. In generale però è possibile che un insieme limitato superiormente sia privo di estremo superiore e che un insieme limitato inferiormente non abbia l'estremo inferiore; questa possibilità è confermata dal seguente facile esempio.

Esempio 12. Prendiamo come insieme parzialmente ordinato $(S\,,\,\leq)$ l'insieme $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ dei numeri razionali diversi da zero munito dell'ordinamento aritmetico e consideriamo, in tale insieme parzialmente ordinato, i due sottoinsiemi $\mathbb{Q}^-$ e $\mathbb{Q}^+$. Essi sono, ovviamente, l'uno limitato superiormente (infatti gli elementi di $\mathbb{Q}^+$ sono tutti maggioranti di $\mathbb{Q}^-$) e l'altro limitato inferiormente (infatti gli elementi di $\mathbb{Q}^-$ sono tutti minoranti di $\mathbb{Q}^+$). Usando la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in sè ([2]) è poi facile provare che l'insieme dei maggioranti di $\mathbb{Q}^-$ è uguale a $\mathbb{Q}^+$, l'insieme dei minoranti di $\mathbb{Q}^+$ è uguale a $\mathbb{Q}^-$ e che $\mathbb{Q}^-$ non ha il massimo, mentre $\mathbb{Q}^+$ non ha il minimo. Ne segue che l'insieme $\mathbb{Q}^+$ non ha l'estremo inferiore e l'insieme $\mathbb{Q}^-$ non ha l'estremo superiore.

Osservazione 2. (*Altre formulazioni della seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore*). Spesso la seconda delle due condizioni caratteristiche, sia per l'estremo superiore che per quello inferiore, viene formulata in un altro modo. Infatti, riferendoci, per fissare le idee, all'estremo superiore, la 2) può scriversi anche:

$$\forall b \in S \,:\, b \text{ è un maggiorante di } X \implies b \geq L \quad ,$$

ovvero, considerando l'implicazione contraria tra le due negazioni,

$$\forall \beta \in S \,:\, \beta \not\geq L \implies \beta \text{ non è un maggiorante di } X \quad ,$$

vale a dire, per la (3),

$$2') \quad \forall \beta \in S \,:\, \beta \not\geq L \implies \exists x \in X \,:\, x \not\leq \beta \quad ;$$

se la relazione d'ordine è totale la $2')$ si semplifica e assume la forma:

$$2'') \quad \forall \beta \in S \,:\, \beta < L \implies \exists x \in X \,:\, x > \beta \quad ;$$

se poi l'insieme ordinato $(S, \leq)$ è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, munito dell'ordinamento aritmetico, allora, dato che i numeri reali β minori di L sono tutti e soli quelli del tipo $L - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, si preferisce scrivere la $2'')$ nella forma

$$2''') \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \,:\, \varepsilon > 0 \implies \exists x \in X \,:\, x > L - \varepsilon \quad .$$

([2]) cioè la proprietà che per ogni coppia a, b di numeri razionali tali che $a < b$ esistono infiniti numeri razionali q verificanti le disuguaglianze $a < q < b$.

Analogamente, per quanto riguarda l'estremo inferiore, una forma equivalente della proprietà II) è:

$$\text{II}'\text{)}\quad \forall \alpha \in S \,:\, \alpha \not\leq \ell \implies \exists x \in X \,:\, x \not\geq \alpha \quad ,$$

che, nel caso degli insiemi totalmente ordinati, diventa

$$\text{II}''\text{)}\quad \forall \alpha \in S \,:\, \alpha > \ell \implies \exists x \in X \,:\, x < \alpha$$

e questa per l'insieme $\mathbb{R}$, munito dell'ordinamento aritmetico, si scrive anche

$$\text{II}'''\text{)}\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \,:\, \varepsilon > 0 \implies \exists x \in X \,:\, x < \ell + \varepsilon \quad .$$

Per fare vedere che è possibile che in un insieme ordinato vi siano insiemi limitati superiormente privi di estremo superiore e insiemi limitati inferiormente privi di estremo inferiore abbiamo considerato (Esempio 12) l'insieme $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ dei numeri razionali diversi da zero munito dell'ordinamento aritmetico. In realtà anche nell'intero insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, munito dell'ordinamento aritmetico, si possono portare esempi di insiemi limitati superiormente privi di estremo superiore (e di insiemi limitati inferiormente privi di estremo inferiore).

Esempio 13. (*Un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ limitato superiormente ma privo di estremo superiore*). Consideriamo, nell'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{Q}\,,\, \leq)$, il sottoinsieme

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 < 2\}$$

e proviamo che tale insieme (il quale non è vuoto, poiché contiene, ad esempio, gli interi 0 e 1), pur essendo limitato superiormente, è privo di estremo superiore.

Per provare che X è limitato superiormente osserviamo che per ogni elemento $x \in X$, essendo $x^2 < 2$, si ha anche, a maggior ragione, $x^2 < 4 = 2^2$ e da questa disuguaglianza si deduce che è pure $x < 2$; infatti, se fosse $x \geq 2$, moltiplicando membro a membro la precedente disuguaglianza tra numeri positivi per se stessa, si otterrebbe la contraddizione $x^2 \geq 2^2$. Pertanto 2 è un maggiorante di X.

Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di X e proviamo che risulta

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \,:\, b > 0\,,\, b^2 > 2\} \quad .$$

Dimostriamo dapprima che vale l'inclusione $B \subseteq \{b \in \mathbb{Q} \,:\, b > 0\,,\, b^2 > 2\}$. Sia $b \in B$. La disuguaglianza $b > 0$ è vera poiché l'insieme X contiene numeri positivi. Per provare che vale pure la disuguaglianza $b^2 > 2$, supponiamo, per assurdo, che sia $b^2 \leq 2$, ovvero (dato che l'uguaglianza $b^2 = 2$ è impossibile, essendo b razionale) $b^2 < 2$, e facciamo vedere che tale ipotesi conduce all'esistenza di numeri $q \in \mathbb{Q}$ tali che $q > 0$ e $(b+q)^2 < 2$, circostanza, questa, assurda (si avrebbe infatti un elemento di X, il numero $b+q$, maggiore del maggiorante b). Per provare l'esistenza di q, osserviamo che è

$$(b+q)^2 < 2 \iff 2bq + q^2 < 2 - b^2 \quad ,$$

pertanto, se si impone a q di soddisfare, oltre alla disuguaglianza $q > 0$, anche la $q < 1$ e quindi pure la $q^2 < q$ (che si ottiene dalla precedente moltiplicandone entrambi i membri per q) , la disuguaglianza $(b+q)^2 < 2$, cioè $2bq + q^2 < 2 - b^2$, è certamente verificata se è $2bq + q < 2 - b^2$ cioè $q < \frac{2-b^2}{2b+1}$. A questo punto per avere il numero q cercato basta considerare il numero razionale positivo $\min\{1, \frac{2-b^2}{2b+1}\}$ e prendere un qualunque $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < q < \min\{1, \frac{2-b^2}{2b+1}\}$, che esiste per la densità di $\mathbb{Q}$ in sè.

Per verificare la validità dell'inclusione contraria $B \supseteq \{b \in \mathbb{Q} \,:\, b > 0\,,\, b^2 > 2\}$ osserviamo che, se b è un elemento dell'insieme al secondo membro, si ha, per ogni $x \in X$,

$$b^2 > 2 > x^2$$

e quindi, essendo $b, x \geq 0$, si ha pure $b > x$ (ciò si prova subito ragionando per assurdo; infatti, se fosse $b \leq x$, moltiplicando membro a membro questa disuguaglianza per se stessa si otterebbe la conclusione assurda $b^2 \leq x^2$); pertanto $b \in B$.

Per completare l'esempio, proviamo che l'insieme $B = \{b \in \mathbb{Q} \,:\, b > 0\,, b^2 > 2\}$ non ha il minimo, facendo vedere che per ogni $b \in B$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < q < b$ e $(b-q)^2 > 2$ (quindi $b-q$ è un elemento di B tale che $b - q < b$). Si ha infatti:

$$(b-q)^2 > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 - 2bq + q^2 > 2$$

e questa seconda disuguaglianza è certamente verificata se è $b^2 - 2bq > 2$ cioè $q < \frac{b^2-2}{2b}$; pertanto, dato che è $\frac{b^2-2}{2b} < \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2} < b$, per avere il numero q cercato basta prendere un qualunque $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < q < \frac{b^2-2}{2b}$ (si tenga presente che, essendo $b \in B$, il numero $\frac{b^2-2}{2b}$ è positivo).

Esercizio 1. Provare che nell'insieme ordinato $(\mathbb{Q}\,, \leq)$, il sottoinsieme

$$Y = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 > 2\}$$

è limitato inferiormente ma non ha estremo inferiore.

Abbiamo già visto che in generale l'estremo inferiore di un insieme non è necesssariamente il minimo dell'insieme. Vi è però un caso molto particolare in cui è lecito affermare senz'altro che l'estremo inferiore è anche minimo: ciò accade quando si ha a che fare con l'insieme dei maggioranti di un dato insieme.

Proposizione 5. *Sia $(S\,, \leq)$ un insieme ordinato e sia X un sottoinsieme non vuoto di S, limitato superiormente. Se l'insieme Y dei maggioranti di X è dotato di estremo inferiore ℓ_Y, questo è anche il minimo di Y, dunque ℓ_Y è l'estremo superiore dell'insieme X.*

Dimostrazione. Osserviamo che un qualunque elemento x dell'insieme X è, per la definizione di maggiorante, un minorante dell'insieme Y e quindi, essendo ℓ_Y il massimo dell'insieme dei minoranti di Y, si ha:

$$x \leq \ell_Y \ .$$

Abbiamo così provato che anche ℓ_Y è un maggiorante di X, cioè $\ell_Y \in Y$, quindi $\ell_Y = \min Y$, dunque ℓ_Y è l'estremo superiore di X.

Ovviamente vale anche la proposizione "gemella":

Proposizione 5′. *Sia $(S\,, \leq)$ un insieme ordinato e sia Y un sottoinsieme non vuoto di S, limitato inferiormente. Se l'insieme X dei minoranti di Y è dotato di estremo superiore L_X, questo è anche il massimo di X, dunque L_X è l'estremo inferiore dell'insieme Y.*

6. Insiemi ordinati completi.

Definizione 12. (*Insieme ordinato completo*). Si dice che un insieme ordinato $(S\,, \leq)$ è *completo* se valgono per esso le seguenti due proprietà:

a) *ogni insieme $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, limitato superiormente è dotato di estremo superiore*;

b) *ogni insieme $Y \subseteq S$, $Y \neq \emptyset$, limitato inferiormente è dotato di estremo inferiore.*

Dall'Esempio 13 segue che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, con l'ordinamento aritmetico, non è un insieme ordinato completo. Invece, per quanto riguarda l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali dimostreremo più avanti il seguente fondamentale teorema.

Teorema 1. *L'insieme ordinato* $(\mathbb{R}, \leq)$ *dei numeri reali, munito dell'ordinamento aritmetico, è completo.*

Osservazione 3. Osserviamo che, in effetti, la precedente Definizione 12 è ridondante. Infatti il verificarsi di una delle due condizioni a) e b) implica il verificarsi dell'altra. Proviamo, ad esempio, che dalla a) segue la b). Sia $Y \subseteq S$, $Y \neq \emptyset$, un insieme limitato inferiormente e sia X l'insieme dei minoranti di Y. Poiché X è limitato superiormente (infatti ogni elemento di Y è un maggiorante di X), per l'ipotesi a) esiste l'estremo superiore di X, ma questo, per la Proposizione 5, è anche l'estremo inferiore di Y.

Definizione 13. (*Insiemi separati. Elementi separatori*). Sia $(S\,,\,\leq)$ un insieme ordinato e siano X, Y due sottoinsiemi non vuoti di S.

Si dice che i due insiemi X e Y costituiscono una *coppia di insiemi separati*, con X *insieme minorante* e Y *insieme maggiorante*, se accade che:

$$x \leq y \qquad \forall x \in X\,,\, \forall y \in Y$$

(in altre parole, se ogni elemento $y \in Y$ è un maggiorante di X o, cosa del tutto equivalente, ogni elemento $x \in X$ è un minorante di Y).

Se X e Y costituiscono una coppia di insiemi separati (con X insieme minorante e Y insieme maggiorante), si chiama *elemento separatore* della coppia di insiemi separati X e Y ogni elemento $s \in S$ tale che

$$x \leq s \leq y \qquad \forall x \in X\,,\, \forall y \in Y$$

(cioè tale da essere sia maggiorante di X che minorante di Y).

Nel seguito, quando non vi sia possibilità di equivoco, diremo semplicemente "Gli insiemi X e Y sono separati" per significare che X e Y costituiscono una coppia di insiemi separati con X insieme minorante e Y insieme maggiorante; diremo inoltre "elemento separatore degli insiemi X e Y" invece di "elemento separatore della coppia di insiemi separati X e Y".

Notiamo subito che, dati due insiemi separati X e Y, può anche darsi che non esistano elementi separatori di X e Y.

Esempi 14. (*Insiemi separati privi di elementi separatori*).

a) Nell'insieme ordinato $(S\,,\,\leq) = (\mathbb{Q}\setminus\{0\}\,,\,\leq)$, considerato nell'Esempio 12, i due sottoinsiemi $X = \mathbb{Q}^-$ e $Y = \mathbb{Q}^+$ sono separati, ma non hanno elementi separatori; infatti nessun elemento $s \in S = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ può essere, al contempo, maggiorante di $\mathbb{Q}^-$ e minorante di $\mathbb{Q}^+$.

b) Nell'insieme ordinato $(\mathbb{Q}\,,\,\leq)$ ($\leq$ ordinamento aritmetico), i due sottoinsiemi

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 < 2\} \quad , \quad Y = \{y \in \mathbb{Q} \,:\, y \geq 0\,,\, y^2 > 2\}$$

sono separati (infatti, come abbiamo visto, Y è l'insieme dei maggioranti di X), ma non hanno elementi separatori; infatti un eventuale elemento separatore s dovrebbe essere un numero razionale positivo e quindi, dato che non può essere $s^2 = 2$, dovrebbe appartenere ad uno dei due insiemi X o Y, ma nessuna delle due circostanze è possibile, la prima perché l'insieme X non ha il massimo e la seconda perché l'insieme Y non ha il minimo.

In ciascuno dei due esempi precedenti l'insieme ordinato che si considera non è completo. Ciò non è casuale; infatti l'esistenza di elementi separatori per una qualunque coppia di insiemi separati caratterizza gli insiemi ordinati completi.

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme ordinato* $(S\,,\,\leq)$ *sia completo è che due qualsiasi sottoinsiemi di* S *separati abbiano elementi separatori.*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti, se $(S\,,\leq)$ è completo e X, Y sono due sottoinsiemi di S separati (con X insieme minorante e Y insieme maggiorante), allora, dato che X è limitato superiormente e Y è limitato inferiormente, per l'ipotesi di completezza esistono sia il $\sup X$ che l'$\inf Y$; inoltre, dato che Y è un sottoinsieme dell'insieme dei maggioranti di X, si ha, per la definizione di estremo superiore,

$$\sup X \leq y \qquad \forall y \in Y \ ,$$

da cui, per la definizione di estremo inferiore,

$$\sup X \leq \inf Y \ ,$$

dunque $\sup X$, $\inf Y$ e tutti gli elementi $s \in S$ tali che $\sup X \leq s \leq \inf Y$ sono elementi separatori di X e Y.

La condizione è sufficiente. Proviamo che un qualunque insieme $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, limitato superiormente è dotato di estremo superiore. Infatti, denotato con Y l'insieme dei maggioranti di X, si ha, evidentemente, che i due insiemi X e Y sono separati e quindi, per ipotesi, esiste almeno un elemento separatore $s \in S$:

$$x \leq s \leq y \qquad \forall x \in X\,,\ \forall y \in Y \ ;$$

dalla disuguaglianza di sinistra si ha che s è un maggiorante di X, da quella di destra segue che s è il minimo dell'insieme dei maggioranti di X, dunque esso è l'estremo superiore di X.

7. Relazioni di equivalenza.

Definizione 6. (*Relazione di equivalenza.*). Una relazione R in un insieme A si dice *relazione di equivalenza* in A se R è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempi 15. *a*) La relazione R_1 considerata nell'Esempio 4, *b*) è una relazione di equivalenza.

b) La relazione V considerata nell'Esempio 5, *a*) è una relazione di equivalenza.

L'esempio più banale di relazione di equivalenza è dato dalla relazione di eguaglianza (tra gli elementi di un dato insieme A ovvero tra gli insiemi di una data famiglia $\mathcal{A}$). Per questo motivo per indicare le relazioni di equivalenza si è soliti adoperare simboli del tipo $\equiv$, $\sim$, $\approx$ ecc. ecc.

Classi di equivalenza. Supponiamo che $\equiv$ sia una relazione di equivalenza in un insieme A. Per ogni elemento $a \in A$ possiamo considerare il seguente sottoinsieme di A:

$$C_a = \{x \in A \,:\, x \equiv a\} \ ;$$

esso prende il nome di *classe di equivalenza* dell'elemento a. Notiamo che tra gli elementi di C_a c'è a stesso (dato che la $\equiv$ è riflessiva).

Proposizione 6. *Sia $\equiv$ una relazione di equivalenza in un insieme A. La famiglia $\{C_a : a \in A\}$ ha la seguente proprietà:*

$$\forall\, a, b \in A \implies C_a \cap C_b = \emptyset \ \text{ oppure } \ C_a = C_b \ . \tag{6}$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ e dimostriamo che in tal caso si ha $C_a = C_b$. Infatti, dato che $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, esiste $z \in C_a \cap C_b$. Dalla definizione di C_a e C_b segue che è $z \equiv a$ e $z \equiv b$, da cui, essendo la relazione $\equiv$ simmetrica e transitiva, si deduce che $a \equiv b$. A questo punto è facile verificare che $C_a = C_b$. Infatti, preso un qualunque elemento $x \in C_a$, si ha

$$x \equiv a\,,\ a \equiv b \implies x \equiv b \ ,$$

cioè $x \in C_b$, dunque $C_a \subseteq C_b$. In maniera analoga, scambiando i ruoli degli elementi a e b si prova che è $C_b \subseteq C_a$, pertanto $C_a = C_b$.

Dalla Proposizione 6 segue immediatamente il

Teorema 3. *La famiglia* $\{C_a : a \in A\}$ *delle classi di equivalenza di una qualunque relazione di equivalenza* $\equiv$ *in un insieme* A *costitusce una* partizione *di* A*, cioè una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di* A*, a due a due disgiunti, la cui unione è uguale all'insieme* A*.*

Dimostrazione. Una qualunque classe di equivalenza C_a è ovviamente un sottoinsieme non vuoto di A (infatti si ha $a \in C_a$). Inoltre dalla (6) che due classi di equivalenza distinte tra loro sono insiemi disgiunti. Rimane da provare soltanto che è

$$\bigcup_{a \in A} C_a = A \ . \tag{7}$$

Poiché tutte le classi di equivalenza C_a sono sottoinsiemi di A è ovvio che è

$$\bigcup_{a \in A} C_a \subseteq A \ ;$$

d'altra parte preso un qualsiasi elemento $\overline{x} \in A$ si ha $\overline{x} \in C_{\overline{x}}$ e quindi $\overline{x} \in \bigcup_{a \in A} C_a$, quindi vale pure l'inclusione contraria

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} C_a$$

e conseguentemente è vera la (7).

Insieme quoziente. Se $\equiv$ è una relazione di equivalenza in un insieme A, la famiglia $\{C_a : a \in A\}$ delle classi di equivalenza si chiama anche l'*insieme quoziente* dell'insieme A rispetto alla relazione $\equiv$ e si indica con $A_{/\equiv}$.

Il concetto di insieme quoziente è utile, ad esempio, per costruire la struttura dei numeri razionali a partire dalla struttura dei numeri interi relativi.