Integrali indefiniti

Questo capitolo riguarda il cosiddetto "problema dell'*integrazione indefinita*" di una data funzione f e cioè il problema: "Trovare, se ve ne sono, tutte le funzioni che hanno come derivata la funzione f".

1. Definizioni.

Definizione 1.1. (*Primitiva di una funzione*). Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo I. Si chiama *funzione primitiva* (o, semplicemente, *primitiva*) della funzione f nell'intervallo I ogni funzione $f : I \to \mathbb{R}$ avente le seguenti proprietà:

i) la funzione F è derivabile in I;

ii) risulta $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$.

Per esempio, $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2 in $\mathbb{R}$; infatti $\frac{x^3}{3}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e risulta

$$D\,\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\,D\,x^3 = \frac{1}{3}\,3x^2 = x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

Analogamente, $\operatorname{arcsen} x$ è una primitiva di $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $]-1,1[$; $5e^x$ è una primitiva di $5e^x$ in $\mathbb{R}$, ma anche $5e^x + \frac{1}{2}$, $5e^x - 10$, $5e^x + 2014$ sono primitive di $5e^x$ in $\mathbb{R}$ (cfr. la successiva Osservazione 1.1).

Prima di procedere oltre con le definizioni, anticipiamo due fatti fondamentali sul problema dell'integrazione indefinita, che dimostreremo in seguito.

1. In generale, data una qualunque funzione $f : I \to \mathbb{R}$, non è detto che esistano primitive di f in I.

2. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua in I, allora esistono primitive di f in I (questa è una conseguenza di un importante teorema, il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, che studieremo in un altro capitolo).

Ritornando al concetto di funzione primitiva, facciamo le seguenti due osservazioni.

Osservazione 1.1. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in I, allora anche $F(x) + c$ (essendo c una qualsiasi costante reale) è una primitiva di $f(x)$ in I.

Infatti $F(x) + c$ è derivabile in I (somma di funzioni derivabili) e risulta

$$D\,[F(x) + c] = D\,F(x) + D\,c = f(x) + 0 = f(x) \qquad \forall x \in I \quad .$$

Osservazione 1.2. Se $F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe primitive di della stessa funzione $f(x)$ nell'intervallo I, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c \ \ \forall x \in I$.

Infatti la funzione $G(x) - F(x)$ è derivabile in I e risulta:

$$D\,[G(x) - F(x)] = D\,G(x) - D\,F(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in I \quad ;$$

di conseguenza, per uno dei corollari del teorema di Lagrange, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) - F(x) = c \ \ \forall x \in I$, cioè $G(x) = F(x) + c \ \ \forall x \in I$.

Definizione 1.2. (*Integrale indefinito*). Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo I. Si chiama *integrale indefinito* della funzione f (nell'intervallo I) l'insieme che ha come elementi tutte le funzioni primitive di f nell'intervallo I.

Per indicare l'integrale indefinito di f si adopera il simbolo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

(si legge: "Integrale indefinito di f"). A proposito del simbolismo vi sono due osservazioni da fare:

1) l'integrale indefinito è un insieme di funzioni che dipende dalla funzione f ma non dipende dal simbolo adoperato per indicare la variabile indipendente (pertanto i simboli $\int f(y)\,\mathrm{d}y$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(w)\,\mathrm{d}w$ ecc. hanno tutti lo stesso significato di (1));

2) il segno $\mathrm{d}x$, che figura nel simbolo di integrale indefinito, è presente solo per motivi "di tradizione", sui quali qui non ci soffermiamo, ma è in realtà superfluo; ciò nonostante noi ci adegueremo all'uso tradizionale.

Dalle cose dette in precedenza (fatti **1** e **2** ed Osservazioni 1.1 e 1.2) segue che per l'integrale indefinito di una data funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si hanno le seguenti due possibilità:

- o non esistono primitive di f in I, dunque

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \emptyset \quad ,$$

- oppure esiste almeno una primitiva F di f in I; in questo secondo caso l'integrale indefinito (cioè l'insieme delle primitive) è uguale all'insieme che ha come elementi tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \{F(x) + c \; : \; c \in \mathbb{R}\} \quad ; \tag{2}$$

infatti, ogni primitiva G di f in I appartiene all'insieme che figura al secondo membro della (2) (per l'Osservazione 1.2) e, viceversa, ogni funzione elemento dell'insieme al secondo membro è una primitiva di f (per l'Osservazione 1.1).

Nel caso in cui F è una (particolare) primitiva di f in I è consuetudine indicare il sussistere dell'uguaglianza insiemistica (2) mediante la notazione

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(x) + c \quad ,$$

dove si dà per inteso che c è una "costante arbitraria", cioè capace di assumere tutti i valori reali. Ad esempio, avendo constatato che $5\,\mathrm{e}^x$ è una primitiva di $5\,\mathrm{e}^x$ in $\mathbb{R}$, scriveremo

$$\int 5\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad = \quad 5\,\mathrm{e}^x + c$$

per indicare che le funzioni elementi dell'integrale indefinito sono tutte e sole le funzioni della forma $5\,\mathrm{e}^x + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

2. La tabella degli integrali indefiniti immediati.

Dall'elenco delle derivate delle funzioni elementari si ricava immediatamente il seguente elenco di integrali indefiniti (gli *integrali indefiniti immediati*). Ovviamente, per giustificare le uguaglianze (insiemistiche) che seguono, basta calcolare la derivata di una delle funzioni che figurano al secondo membro (che differiscono tra di loro per una costante) e constatare che come risultato si ottiene la funzione che figura sotto il segno di integrale (*funzione integranda*). Il significato di c è quello di un'arbitraria costante reale. Gli intervalli I di validità delle uguaglianze sono precisati di volta in volta.

$$\text{(a)} \qquad \int 0 \,\mathrm{d}x = c \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \;;$$

$$\text{(b)} \qquad \int 1 \,\mathrm{d}x = x + c \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \;;$$

$$\text{(c)} \qquad \int x^p \,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \qquad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$(\text{in ogni intervallo } I \subseteq \operatorname{dom} x^p) \;;$$

$$\text{(d)} \qquad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log |x| + c$$

$$(\text{sia in }]-\infty, 0[\text{ che in }]0, +\infty[) \;;$$

$$\text{(e)} \qquad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + c \qquad \forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$(\text{in } \mathbb{R}) \;,$$

in particolare

$$\text{(e}'\text{)} \qquad \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \;;$$

$$\text{(f)} \qquad \int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \quad , \quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + c \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \;;$$

$$\text{(g)} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$$

$$(\text{in ogni intervallo } I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + h\pi \,:\, h \in \mathbb{Z}\}) \;;$$

$$\text{(g}'\text{)} \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$(\text{in ogni intervallo } I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{h\pi \,:\, h \in \mathbb{Z}\}) \;;$$

$$\text{(h)} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + c \qquad (\text{in }]-1, 1[) \;;$$

$$\text{(i)} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c \qquad (\text{in } \mathbb{R}) \;.$$

3. Le regole di integrazione indefinita.

Nell'enunciare le regole di integrazione indefinita supporremo, per semplificare l'esposizione, che le funzioni integrande siano continue; in questo modo saremo sicuri che gli integrali indefiniti considerati non sono vuoti (cfr. il fatto **2** del n.1). Per gli enunciati nella forma più generale rinviamo all'Appendice al presente n. 3.

Proposizione 3.1. (Integrale di una somma). *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue in I, allora*

$$\int [f(x) + g(x)] \, \mathrm{d}x \; = \; \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x \quad . \tag{3}$$

Prima di dimostrare la Proposizione 3.1 occorre spiegare il significato della (3). La (3) è una uguaglianza insiemistica in cui il primo membro è l'insieme delle primitive di $f+g$ (che non è vuoto perché $f+g$ è continua in I) mentre il secondo membro (che, formalmente, appare scritto come la somma di due insiemi di funzioni) sta ad indicare l'insieme delle funzioni che si ottengono facendo la somma di uina funzione elemento di $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ e di una funzione elemento di $\int g(x) \, \mathrm{d}x$.

Dimostrazione della Proposizione 3.1. Supponiamo che $F(x)$ sia una (particolare) primitiva di $f(x)$ e che $G(x)$ sia una (particolare) primitiva di $g(x)$ ($F(x)$ e $G(x)$ esistono per la continuità di $f(x)$ e di $g(x)$). Poiché

$$D\,[F(x) + G(x)] \; = \; DF(x) + DG(x) \; = \; f(x) + g(x) \qquad\qquad \forall x \in I$$

si ha che $F(x) + G(x)$ è una (particolare) primitiva di $f(x) + g(x)$ in I. Di conseguenza l'insieme al primo membro della (3) è costituito dalle funzioni della forma $F(x) + G(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, mentre l'insieme al secondo membro è costituito dalle funzioni della forma $[F(x) + c_1]+[G(x) + c_2]$, con $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$. È adesso facile constatare l'uguaglianza dei due insiemi; infatti, un qualunque elemento dell'insieme al primo membro, cioè una funzione del tipo $F(x) + G(x) + c$, potendosi scrivere come $[F(x) + c] + [G(x) + 0]$, appartiene anche all'insieme al secondo membro; viceversa, un qualunque elemento dell'insieme al secondo membro, cioè $[F(x) + c_1] + [G(x) + c_2]$, potendosi scrivere come $F(x) + G(x) + (c_1 + c_2)$, appartiene anche all'insieme al primo membro.

Nella pratica, anziché la precedente Proposizione 3.1, si adopera la seguente variante di tale proposizione.

Proposizione 3.1′. *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue in I e F è una (particolare) primitiva di f allora*

$$\int [f(x) + g(x)] \, \mathrm{d}x \; = \; F(x) \; + \; \int g(x) \, \mathrm{d}x \quad . \tag{3′}$$

Questa volta il significato del secondo membro della (3′) è quello dell'insieme di tutte le funzioni che sono la somma di $F(x)$ e di una primitiva di $g(x)$.

La dimostrazione della Proposizione 3.1′ è analoga a quella della Proposizione 3.1 ed è lasciata come esercizio allo studente.

Per esempio, applicando la Proposizione 3.1′, abbiamo

$$\int \left(\operatorname{sen} x + x^5 \right) \, \mathrm{d}x \; = \; -\cos x + \int x^5 \, \mathrm{d}x \; = \; -\cos x + \frac{x^6}{6} + c \quad .$$

Osservazione 3.1. La Proposizione 3.1′ si estende, in modo ovvio, al caso di tre o più funzioni. Ad esempio, se $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue in I e F e G sono, rispettivamente, una primitiva di f ed una primitiva di g allora

$$\int [f(x) + g(x) + h(x)] \, \mathrm{d}x \; = \; F(x) \; + \; G(x) \; + \; \int h(x) \, \mathrm{d}x \quad .$$

Infatti, $F(x) + G(x)$ è una primitiva di $f(x) + g(x)$, dunque quanto asserito segue dalla Proposizione 3.1′.

Tenendo conto della precedente osservazione, abbiamo, per esempio,

$$\int \left(\operatorname{sen} x + \cos x + \mathrm{e}^x \right) \, \mathrm{d}x \; = \; -\cos x + \operatorname{sen} x + \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \; = \; -\cos x + \operatorname{sen} x + \mathrm{e}^x + c \quad .$$

Proposizione 3.2. (Integrale di kf). *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in I e k è una costante diversa da zero, allora*

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x \;=\; k\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

(dove il secondo membro sta ad indicare l'insieme delle funzioni che si ottengono moltiplicando una primitiva di f per la costante k).

Dimostrazione. Consideriamo una (particolare) primitiva $F(x)$ di $f(x)$ in I ed osserviamo che, per una delle regole di derivazione, la funzione $kF(x)$ risulta essere una primitva di $kf(x)$ in I. Conseguentemente, l'insieme al primo membro della (4) è costituito dalle funzioni del tipo $kF(x)+c$, con $c \in \mathbb{R}$, mentre l'insieme al secondo membro è formato dalle funzioni del tipo $k\,[F(x)+c_1]$, con $c_1 \in \mathbb{R}$. Poiché ogni funzione del tipo $kF(x)+c$ si può scrivere come $k\left[F(x)+\frac{c}{k}\right]$ e, viceversa, ogni funzione del tipo $k\,[F(x)+c_1]$ si può scrivere come $kF(x)+kc_1$, concludiamo che l'uguaglianza insiemistica (4) è vera.

Osservazione 3.2. Per $k = 0$ la (4) è falsa. Infatti in questo caso, mentre il primo membro è costituito dalle funzioni costanti in I, il secondo membro ha come unico elemento la funzione identicamente nulla in I.

Osservazione 3.3. Nella pratica, anziché la (4), si adopera l'osservazione (valida anche per $k = 0$) che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in I, allora $kF(x)$ è una primitiva di $kf(x)$ in I.

Ad esempio, per mezzo della precedente osservazione e della Proposizione 3.1′, abbiamo

$$\int \left(4x^7 - 6x^3 + 2x + 3\right)\,\mathrm{d}x \;=\; 4\,\frac{x^8}{8} - 6\,\frac{x^4}{4} + 2\,\frac{x^2}{2} + 3x + c \;=\; \frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{2}x^4 + x^2 + 3x + c \quad .$$

In maniera analoga si calcola un qualunque integrale indefinito del tipo $\int P(x)\,\mathrm{d}x$, con $P(x)$ polinomio.

Proposizione 3.3. (La prima formula di integrazione per sostituzione). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e sia $g : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo J. Supponiamo che $f(I) \subseteq J$* (in questo modo la funzione composta $g \circ f$ è definita e continua in I). *Supponimao inoltre che f sia derivabile in I e che la derivata f' sia una funzione continua in I. Allora si ha*

$$\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\int g(y)\,\mathrm{d}y\right]_{y=f(x)} \quad . \tag{5}$$

Il significato dei simboli nella (5) è il seguente: il primo membro è l'insieme delle funzioni primitive di $g(f(x))f'(x)$ (che non è vuoto perché tale funzione è continua in I), il secondo membro è l'insieme delle funzioni che si ottengono facendo la composizione $G(f(x))$ di una funzione $G(y)$, elemento dell'integrale indefinito $[\int g(y)\,\mathrm{d}y$, con la funzione $f(x)$.

Dimostrazione della Proposizione 3.3. Supponiamo che $G(y)$ sia una (particolare) primitiva di $g(y)$ in J; allora gli elementi dell'integrale indefinito $\int g(y)\,\mathrm{d}y$ sono le funzioni del tipo $G(y)+c$, $c \in \mathbb{R}$, quindi l'insieme al secondo membro della (5) ha come elementi le funzioni del tipo $G(f(x))+c$, $c \in \mathbb{R}$. D'altra parte, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha che $G(f(x))$ è derivabile in I e risulta

$$DG(f(x)) \;=\; G'(f(x))f'(x \;=\; g(f(x))f'(x)) \qquad \forall x \in I \quad ,$$

dunque $G(f(x))$ è una primitiva di $g(f(x))f'(x)$ in I e pertanto anche l'insieme al primo membro della (5) è costituito dalle funzioni del tipo $G(f(x))+c$, $c \in \mathbb{R}$; ciò completa la dimostrazione.

Esempio 3.1. Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int (\operatorname{sen} x + x)^5 (\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$

(poiché la funzione integranda è continua in $\mathbb{R}$ siamo certi dell'esistenza di sue primitiva in $\mathbb{R}$). Osserviamo che $(\operatorname{sen} x + x)^5$ è una funzione composta $g(f(x))$, con $f(x) = \operatorname{sen} x + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $g(y) = y^5 \quad \forall y \in \mathbb{R}$; si ha inoltre $f'(x) = \cos x + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sono verificate tutte le ipotesi della Proposizione 3.3; pertanto

$$\int (\operatorname{sen} x + x)^5 (\cos x + 1)\, \mathrm{d}x \;=\; \left[\int y^5\, \mathrm{d}y\right]_{y=\operatorname{sen} x + x} \;=\; \left[\frac{y^6}{6} + c\right]_{y=\operatorname{sen} x + x} \;=\; \frac{1}{6}(\operatorname{sen} x + x)^6 + c \quad .$$

Esempio 3.2. Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \mathrm{e}^{x^4} x^3\, \mathrm{d}x \quad .$$

Anche in questo caso nella funzione integranda figura una funzione composta: $\mathrm{e}^{x^4} = g(f(x))$, con $f(x) = x^4\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $g(y) = \mathrm{e}^y\ \forall y \in \mathbb{R}$; l'altro fattore della funzione integranda, cioè x^3, non è però uguale alla derivata di f; infatti $f'(x) = 4x^3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tuttavia è possibile fare figurare nella funzione integranda la derivata $f'(x) = 4x^3$: basta utilizzare l'artificio di moltiplicare e dividere per una stessa costante diversa da zero (in questo caso 4). In questo modo si ha:

$$\int \mathrm{e}^{x^4} x^3\, \mathrm{d}x \;=\; \int \mathrm{e}^{x^4} \cdot 4x^3 \cdot \frac{1}{4}\, \mathrm{d}x \;=$$

(applicando la Proposizione 3.2)

$$=\; \frac{1}{4} \int \mathrm{e}^{x^4} \cdot 4x^3\, \mathrm{d}x \;=$$

(per la Proposizione 3.3)

$$=\; \frac{1}{4}\left[\int \mathrm{e}^y\, \mathrm{d}y\right]_{y=x^4} \;=\; \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^y + c\right]_{y=x^4} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4} + \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4} + c_1 \quad ,$$

dove abbiamo posto $c_1 = \frac{1}{4}c$. Osserviamo a questo proposito che anche c_1, come c, è una costante arbitraria, cioè capace di assumere tutti i valori reali; infatti, se indichiamo con $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge $\varphi(c) = \frac{1}{4}c\ \forall c \in \mathbb{R}$, è chiaro che l'insieme immagine $\varphi(\mathbb{R})$ è tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 3.3. Calcoliamo

$$\int \operatorname{sen}(42x + 15)\, \mathrm{d}x \quad .$$

Si ha $\operatorname{sen}(42x + 15) = g(f(x))$ con $f(x) = 42x + 15$ (e quindi $f'(x) = 42$) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g(y) = \operatorname{sen} y\ \forall y \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora (facendo figurare la derivata di $42x + 15$ e applicando la Proposizione 3.2)

$$\int \operatorname{sen}(42x + 15)\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{42}\int \operatorname{sen}(42x + 15) \cdot 42\, \mathrm{d}x \;=$$

(per la Proposizione 3.3)

$$=\; \frac{1}{42}\left[\int \operatorname{sen} y\, \mathrm{d}y\right]_{y=42x+15} \;=\; \frac{1}{42}\left[-\cos y + c\right]_{y=42x+15} \;=$$

$$=\; -\frac{1}{42}\cos(42x + 15) + \frac{c}{42} = -\frac{1}{42}\cos(42x + 15) + c_1 \quad .$$

Esempio 3.4. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{7+x^2}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Cerchiamo di ricondurre il calcolo dell'integrale assegnato, tramite la Proposizione 3.3, all'integrale indefinito immediato $\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + c$. Procediamo nel modo seguente:

$$\int \frac{1}{7+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{7\left(1+\frac{x^2}{7}\right)}\,\mathrm{d}x \;=$$

(per la Proposizione 3.2)

$$=\; \frac{1}{7}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{7}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \;=$$

(poiché la funzione integranda è una funzione composta $g(f(x))$, con $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7}}$ e $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$, cerchiamo di far figurare la derivata $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{7}}$)

$$=\; \frac{1}{7}\sqrt{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{d}x \;=$$

(per la Proposizione 3.3)

$$=\; \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\frac{x}{\sqrt{7}}} \;=\; \frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{7}c \;=\; \frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + c_1 \quad .$$

In maniera del tutto analoga si procede per calcolare un qualunque integrale del tipo

$$\int \frac{1}{a+x^2}\,\mathrm{d}x$$

con $a > 0$.

Esempio 3.5. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Poichíl discriminante del trinomio x^2+3x+4 è negativo, il trinomio può essere scritto come somma del quadrato di un binomio di primo grado e di una costante positiva:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x \;=$$

(completando il quadrato)

$$=\; \int \frac{1}{x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x \;=$$

(procediamo adesso come nel caso dell'Esempio 3.4)

$$= \int \frac{1}{\frac{7}{4}\left[\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}}+1\right]}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{7}\int \frac{1}{\left[\frac{\frac{2x+3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right]^2+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{7}\int \frac{1}{\left[\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right]^2+1}\,\mathrm{d}x \;=$$

(facendo figurare la derivata $D\frac{2x+3}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$)

$$= \frac{4}{7}\,\frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{1}{\left[\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right]^2+1}\cdot D\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2\sqrt{7}}{7}\left[\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right]_{y=\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} \;=\; \frac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c_1 \quad .$$

In maniera del tutto analoga si procede per calcolare un qualunque integrale del tipo

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x \quad ,$$

dove il trinomio al denominatore ha il discriminate negativo.

Proposizione 3.4. (La formula di integrazione "per parti"). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo I. Supponiamo inoltre che le derivate f', g' siano funzioni continue nell'intervallo I. Allora si ha*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)g(x) \;-\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

(il secondo membro della (6) indica l'insieme delle funzioni che si ottengono sottraendo dalla funzione fg una primitiva della funzione fg').

Dimostrazione. Per la regola di derivazione di un prodotto si ha che la funzione fg è una primitiva di $f'g + fg'$. Pertanto:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \{[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)] - f(x)g'(x)\}\,\mathrm{d}x$$

(applicando la (3′) e la (4))

$$= \; f(x)g(x) \;-\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

La (6) è utile nel calcolo di un integrale indefinito

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x$$

quando la funzione integranda h può essere espressa come prodotto di due funzioni: $h(x) = \varphi(x)g(x)\ \forall x \in I$, in modo tale che:

i) si sappia trovare una primitiva f di φ (dunque $f'(x) = \varphi(x)\ \forall x \in I$), cioè si sappia calcolare l'integrale indefinito $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$;

ii) il calcolo dell'integrale indefinito $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ (quello che figura al secondo membro della (6)) riesca più agevole di quello dell'integrale di partenza $\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

È consuetudine adoperare la seguente terminologia per le due funzioni f' e g che figurano al primo membro della (6): g si chiama il *fattore finito* e f' il *fattore differenziale*.

Esempio 3.6. Calcoliamo

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad .$$

La funzione integranda è il prodotto di due funzioni, di ognuna delle quali sappiamo trovare una primitiva (quindi è soddisfatta la i)). Bisogna decidere quale delle due funzioni considerare fattore finito e quale fattore differenziale. Se prendiamo x come fattore differenziale, allora, dato che una primitiva di x è $\frac{x^2}{2}$, applicando la (6) otteniamo

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \left[D\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2}\,D\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad ,$$

ma ciò è di scarsa utilità in quanto l'integrale $\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ è più complicato di quello di partenza (l'esponente della potenza è aumentato di uno). Invece, prendendo e^x come fattore differenziale, otteniamo (dato che una primitiva di e^x è e^x)

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\int x\,D\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; x\,\mathrm{e}^x - \int (Dx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; x\,\mathrm{e}^x \,-\, \mathrm{e}^x + c \quad .$$

Esempio 3.7. Calcoliamo

$$\int \log|x|\,\mathrm{d}x \quad .$$

Scrivendo $\log|x|$ come $1\cdot\log|x|$ ed assumendo 1 come fattore differenziale, otteniamo:

$$\int \log|x|\,\mathrm{d}x \;=\; \int 1\cdot\log|x|\,\mathrm{d}x \;=\; \int (Dx)\log|x|\,\mathrm{d}x \;=$$

$$x\log|x| - \int xD\left(\log|x|\right)\,\mathrm{d}x \;=\; x\log|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; x\log|x| - x + c$$

(ovviamente il risultato ottenuto vale sia in $]-\infty,0[$ che in $]0,+\infty[$).

Talvolta occorre applicare varie volte la regola di integrazione per parti prima di arrivare al risultato.

Esempio 3.8. Calcoliamo

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad .$$

Prendendo e^x come fattore differenziale, abbiamo

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; x^3\,\mathrm{e}^x - \int 3x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=$$

(continuando ad applicare la (6) con e^x fattore differenziale)

$$=\; x^3\,\mathrm{e}^x - \left[3x^2\,\mathrm{e}^x - \int 6x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right] \;=\; x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + \int 6x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=\; x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6x\,\mathrm{e}^x - \int 6\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x + c \quad .$$

Talora, dovendo calcolare l'integrale $\int h(x)\,\mathrm{d}x$, capita di pervenire, dopo alcune applicazioni della formula di integrazione per parti, ad una uguaglianza del tipo

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \;=\; L(x) + K\int h(x)\,\mathrm{d}x \quad , \tag{7}$$

dove L è una funzione (definita nello stesso intervallo della funzione integranda) e K è una costante diversa da 0 e da 1. In questo caso è lecito trasportare l'addendo $K \int h(x)\,\mathrm{d}x$ al primo membro (ovviamente con il segno cambiato), a condizione di aggiungere al secondo membro una costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$; in altre parole, dalla (7) segue

$$(1-K)\int h(x)\,\mathrm{d}x \;=\; L(x)+c \quad ; \tag{7'}$$

infatti si ha

$$(1-K)\int h(x)\,\mathrm{d}x \;=$$

(Proposizione 3.2)

$$=\;\int (1-K)h(x)\,\mathrm{d}x \;=\int \left[h(x)-Kh(x)\right]\,\mathrm{d}x \;=$$

(Proposizione 3.1)

$$=\;\int h(x)\,\mathrm{d}x+\int -Kh(x)\,\mathrm{d}x \;=$$

(sostituendo a $\int h(x)\,\mathrm{d}x$ il valore dato dalla (7))

$$=\;L(x)+K\int h(x)\,\mathrm{d}x+\int -Kh(x)\,\mathrm{d}x \;=$$

(Proposizioni 3.2 e 3.1)

$$=\;L(x)+\int Kh(x)\,\mathrm{d}x+\int -Kh(x)\,\mathrm{d}x \;=\; L(x)+\int \left[Kh(x)-Kh(x)\right]\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=\;L(x)+\int 0\,\mathrm{d}x \;=\; L(x)+c \quad .$$

Una volta ottenuta la (7′) è chiaro che da questa segue

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{1-K}L(x)+c' \quad ,$$

dove $c' = \frac{c}{1-K}$ è una costante arbitraria.

Esempio 3.9. Calcoliamo

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \quad .$$

Applicando due volte la formula di integrazione per parti con e^x fattore differenziale otteniamo:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x-\int \mathrm{e}^x (D\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x-\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=\;\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x-\left[\mathrm{e}^x \cos x-\int \mathrm{e}^x\,(D\cos x)\,\mathrm{d}x\right] \;=\; \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x-\mathrm{e}^x \cos x+\int \mathrm{e}^x\,(-\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=\;\mathrm{e}^x(\operatorname{sen} x-\cos x)-\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \quad ,$$

quindi, ragionando nel modo precedentemente illustrato, abbiamo

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx \;=\; e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx \;=\; e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \;=\; \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c' \quad .$$

Proposizione 3.5. (La seconda formula di integrazione per sostituzione). *Siano* $f : I \to \mathbb{R}$ $(x \to f(x))$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$ $(y \to g(y))$ *due funzioni verificanti le ipotesi della* Proposizione 3.3. *Supponiamo inoltre che* f *sia iniettiva ed abbia come insieme immagine tutto l'intervallo* J*:* $f(I) = J$*. Allora si ha*

$$\int g(y)\, dy \;=\; \left[\int g(f(x)) f'(x)\, dx\right]_{x=f^{-1}(y)} \quad . \tag{8}$$

Il significato del secondo membro della (8) è quello consueto: si tratta dell'insieme delle funzioni che si ottengono considerando una funzione $H(x)$, elemento dell'integrale indefinito $\int g(f(x))f'(x)\, dx$, e facendo la composizione $H(f^{-1}(y)$ di H con la funzione inversa di f.

Dimostrazione della Proposizione 3.5. Essendo verificate le ipotesi della Proposizione 3.3, vale la (5). La (5) è un'uguaglianza tra due insiemi di funzioni (della variabile x, definite nell'intervallo I). Da tale uguaglianza segue che anche i due insiemi di funzioni (della variabile y, definite nell'intervallo J), ottenuti considerando la composizione delle precedenti funzioni con la $f^{-1}(y)$, sono uguali:

$$\left[\int g(f(x)) f'(x)\, dx\right]_{x=f^{-1}(y)} \;=\; \left[\left[\int g(y)\, dy\right]_{y=f(x)}\right]_{x=f^{-1}(y)} \quad . \tag{8'}$$

Adesso l'insieme che figura al secondo membro dalla (8′) è l'insieme delle funzioni che si ottengono nel modo seguente: si considera una funzione $G(y)$, elemento dell'integrale indefinito $\int g(y)\, dy$, si fa la composizione $G(f(x))$ di $G(y)$ con $f(x)$ e, infine, si fa la composizione della funzione $g(f(x))$ con $f^{-1}(y)$. Ma, essendo $f(f^{-1}(y) = y \; \forall y \in J$ (ed essendo la composizione di funzioni un'operazione associativa), si ha $G(f(f^{-1}(y))) = G(y) \; \forall y \in J$, dunque l'insieme al secondo membro della (8′) non è altro che $\int g(y)\, dy$. Scambiando il primo con il secondo membro si ootiene la (8). Ciò completa la dimostrazione.

La (8) è utile quando, volendo calcolare l'integrale $\int g(y)\, dy$, ci si accorge che, considerando un'opportuna funzione $f(x)$, verificante le ipotesi della Proposizione 3.5, il calcolo dell'integrale $\int g(f(x))f'(x)\, dx$ è più semplice di quello dell'integrale di partenza.

Esempio 3.10. Calcoliamo

$$\int \sqrt{9 - y^2}\, dy \quad .$$

La funzione integranda $\sqrt{9-y^2}$ è definita e continua nell'intervallo $J = [-3, 3]$. Volendo applicare la (8), ci dobbiamo procurare una funzione $f(x)$, definita in un intervallo I ed ivi dotata di derivata prima continua, iniettiva ed avente come insieme immagine $[-3, 3]$. La funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ possiede tali requisiti; si ha inoltre, per ogni $y \in [-3, 3]$,

$$f^{-1}(y) \;=\; \text{“unica } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ tale che } 3 \operatorname{sen} x = y\text{”} \;=$$

$$\text{“unica } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ tale che } \operatorname{sen} x = \tfrac{y}{3}\text{”} \;=\; \operatorname{arcsen} \frac{y}{3} \quad .$$

Vediamo se la sostituzione $y = 3\,\mathrm{sen}\,x$ è utile.

Applicando la (8) otteniamo:

$$\int \sqrt{9-y^2}\,\mathrm{d}y \;=\; \left[\int \sqrt{9-(3\,\mathrm{sen}\,x)^2}\,D(3\,\mathrm{sen}\,x))\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;=$$

$$= \left[\int \sqrt{9\,(1-\mathrm{sen}^2 x)}\,3\cos x\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;=\; \left[9\int \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;.$$

Calcoliamo a parte l'integrale

$$\int \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x \;;$$

si ha

$$\int \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \sqrt{\cos^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x \;=$$

(dato che $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos x \geq 0\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$$= \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right]\mathrm{d}x \;=$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)\,2\,\mathrm{d}x \;=$$

(poiché $2 = D(2x)$, applicando la (5))

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left[\int \cos z\,\mathrm{d}z\right]_{z=2x} \;=\; \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + c \;.$$

Ritornando all'integrale di partenza, abbiamo

$$\int \sqrt{9-y^2}\,\mathrm{d}y \;=\; \left[\frac{9}{2}x + \frac{9}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + c'\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;=$$

(poiché dobbiamo mettere $\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}$ al posto della variabile x conviene esprimere $\mathrm{sen}\,2x$ in funzione di $\mathrm{sen}\,x$ per potere semplificare)

$$= \left[\frac{9}{2}x + \frac{9}{4}\,2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + c'\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;=\; \left[\frac{9}{2}x + \frac{9}{2}\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x} + c'\right]_{x=\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}} \;=$$

(dato che $\mathrm{sen}\left(\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3}\right) \;=\; \frac{y}{3}\ \forall y \in [-3,3]$)

$$= \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3} + \frac{9}{2}\,\frac{y}{3}\sqrt{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2} + c' \;=\; \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{y}{3} + \frac{y}{2}\sqrt{9-y^2} + c' \;.$$

Osservazione 3.4 (*Primitive non esprimibili elementarmente*). In questo paragrafo abbiamo esposto vari metodi utili per la determinazione delle primitive di una funzione continua. È bene osservare esplicitamente che, data una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$, funzione che ammette sicuramente primitive (cfr. il punto **2** a pag. 1), non sempre è possibile "esprimere elementarmente" le primitve di f, cioè scrivere la legge di tali primitve mediante un'espressione analitica che coinvolga un numero finito di funzioni elementari (esponenziale, logaritmo, potenza, funzioni trigonometriche, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche) collegate tra loro da un numero finito di operazioni elementari (operazioni aritmentiche, composizione di funzioni, formazione della funzione inversa). Ad esempio si puoò dimostrare che le primitive della funzione e^{x^2}, che è continua in $\mathbb{R}$, non sono esprimibili elementarmente. Altri esempi di funzioni continue le cui primitive non sono esprimibili elementarmente sono $\operatorname{sen} x^2$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Appendice al n. 3.

La formulazione generale delle regole di integrazione indefinita.

Riproponiamo qui di seguito gli enunciati delle regole di integrazione indefinita, già incontrate nel n.3, in una formulazione più generale. Le relative dimostrazioni non si discostano da quelle precedentemente esposte per le funzioni continue, se non per il fatto che adesso occorre verificare preliminarmente, sulla scorta delle ipotesi adottate e delle regole di derivazione, che tutti gli integrali indefiniti che figurano nelle formule da dimostrare sono non vuoti.

Proposizione 3.1*. (Integrale di una somma). *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono entrambe funzioni dotate di primitive nell'intervallo I, allora anche la funzione somma $f + g$ è dotata di primitive in I e risulta*

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{3}$$

Inoltre, se F è una (particolare) primitiva di f in I, si ha pure

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) \;+\; \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{3'}$$

Proposizione 3.2*. (Integrale di kf). *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione dotata di primitive nell'intervallo I e k è una costante reale, allora anche la funzione kf è dotata di primitive in I e si ha, se $k \neq 0$,*

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x \;=\; k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{4}$$

Proposizione 3.3*. (La prima formula di integrazione per sostituzione). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo I e sia $g : J \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo J ed ivi dotata di primitive. Supponiamo che $f(I) \subseteq J$* (in questo modo la funzione composta $g \circ f$ risulta definita in I). *Supponiamo inoltre che f sia derivabile in I. Allora la funzione $g(f(x))f'(x)$ è dotata di primitive in I e risulta*

$$\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\int g(y)\,\mathrm{d}y\right]_{y=f(x)} \quad . \tag{5}$$

Proposizione 3.4*. (La formula di integrazione "per parti"). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo I. Se la funzione fg' è dotata di primitive nell'intervallo I, allora anche $f'g$ è dotata di primitive in I e si ha*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)g(x) \;-\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{6}$$

Proposizione 3.5*. (La seconda formula di integrazione per sostituzione). *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ $(x \to f(x))$ e $g : J \to \mathbb{R}$ $(y \to g(y))$ due funzioni verificanti le ipotesi della* Proposizione 3.3*. *Supponiamo inoltre che f sia iniettiva ed abbia come insieme immagine tutto l'intervallo J: $f(I) = J$. Allora si ha*

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \left[\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=f^{-1}(y)} \quad . \tag{8}$$

4. Due controesempi.

Esempio 4.1. (*Una funzione che non ha primitive*). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in]-\infty, 0] , \\ 1 & \text{se } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Dimostriamo che non esiste alcuna funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitiva di f in $\mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che una tale funzione esista. Ciò vuol dire che la funzione F è derivabile in $\mathbb{R}$ e risulta

$$F'(x) = -1 \quad \forall x \in]-\infty, 0] \quad , \quad F'(x) = 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad . \tag{4.1}$$

Poiché si ha $\int(-1)\,\mathrm{d}x = -x + c$ in tutto $\mathbb{R}$ e quindi, in particolare, nell'intervallo $]-\infty, 0]$, la prima delle (4.1) implica l'esistenza di una costante $c_1 \in \mathbb{R}$ tale da risultare

$$F(x) = -x + c_1 \qquad \forall x \in]-\infty, 0] \quad .$$

Analogamente, dalla seconda delle (4.1) segue l'esistenza di una costante $c_2 \in \mathbb{R}$ tale da aversi

$$F(x) = x + c_2 \qquad \forall x \in]0, +\infty[\quad .$$

Teniamo adesso presente che la funzione F, essendo derivabile in $\mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$ e, in particolare, è continua nel punto 0. Si ha quindi

$$\lim_{x \to 0+} F(x) \; = \; \lim_{x \to 0-} F(x) \; = \; F(0) \quad .$$

D'altra parte, effettuando i calcoli, risulta

$$\lim_{x \to 0+} F(x) \; = \; \lim_{x \to 0+} (x + c_2) \; = \; c_2 \quad , \quad F(0) \; = \; [-x + c_1]_{x=0} \; = \; c_1 \quad ,$$

dunque $c_1 = c_2$. Posssiamo allora scrivere la legge di F nel modo seguente

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1 & \text{se } x \in]-\infty, 0] , \\ x + c_1 & \text{se } x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

ovvero, adoperando il valore assoluto,

$$F(x) \; = \; |x| + c_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

da cui

$$|x| \; = \; F(x) - c_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

La precedente uguaglianza è però assurda. Infatti la funzione che figura al secondo membro è derivabile in $\mathbb{R}$, mentre la funzione $|x|$, come sappiamo, non è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

Il precedente esempio si inquadra nel seguente risultato di carattere generale.

Teorema 4.1 (Una condizione sufficiente affinché una funzione non abbia primitive). *Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, supponiamo che vi sia un punto x_0 dell'intervallo I per il quale almeno uno dei due limiti laterali*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

esista (finito o no) e sia diverso da $f(x_0)$. Allora la funzione f non ha primitive in I.

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che sia

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \; = \; L \in \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad L \neq f(x_0)$$

e supponiamo, per assurdo, che esista una primitiva $F(x)$ di $f(x)$ in I. Si ha allora

$$F'(x) \;=\; f(x) \qquad \forall x \in I$$

e, in particolare,

$$F'(x_0) \;=\; f(x_0) \quad ,$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \;=\; f(x_0) \quad . \tag{4.2}$$

D'altra parte, essendo la funzione F continua in I (in quanto derivabile) possiamo applicare alla funzione F il corollario del primo teorema di L'Hôpital sul rapporto incrementale al tendere di x a x_0 dalla sinistra. Otteniamo così

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \;=\; \lim_{x \to x_0-} F'(x) \;=\; \lim_{x \to x_0-} f(x) \;=\; L \quad ,$$

ma ciò contraddice la (4.2).

In particolare si ha il

Corollario 4.1. *Una funzione con punti di discontinuità di prima specie o eliminabile non ha primitive.*

Abbiamo già detto nel n.1 (fatto **2**) che una condizione sufficiente affinché esistano primitive di una data funzione f in un intervallo I è che f sia continua in I. Il successivo esempio mostra che tale condizione non è necessaria.

Esempio 4.2. (*Una funzione non continua che ha primitive*). Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha

$$F'(x) \;=\; 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \;+\; x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \;+\; \cos \frac{1}{x} \qquad \forall \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e inoltre

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \;=\; \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \;=\; 0 \quad ,$$

dunque la derivata $F'(0)$ esiste ed è uguale a zero. Pertanto la funzione

$$f(x) \;=\; F'(x) \;=\; \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \;+\; \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è dotata di primitive in $\mathbb{R}$. Tale funzione però non è continua nel punto $x_0 = 0$ dato che il limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste; infatti, se si considerano, ad esempio, i due insiemi $A = \left\{\frac{1}{2n\pi} \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ e $B = \left\{\frac{1}{\pi + 2n\pi} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$, si ha $0 \in DA$, $0 \in DB$ e le due restrizioni $f|_A$, $f|_B$ hanno limiti diversi al tendere di x a 0:

$$\lim_{x \to 0} f|_A(x) \;=\; \lim_{x \to 0} -1|_A \;=\; -1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0} f|_B(x) \;=\; \lim_{x \to 0} 1|_B \;=\; 1 \quad .$$