FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. L'affermazione "f è continua in E", ovverossia "Per ogni $x_0 \in E$ la funzione f è continua nel punto x_0", può scriversi, usando il "linguaggio degli ε e dei δ", nel modo seguente:

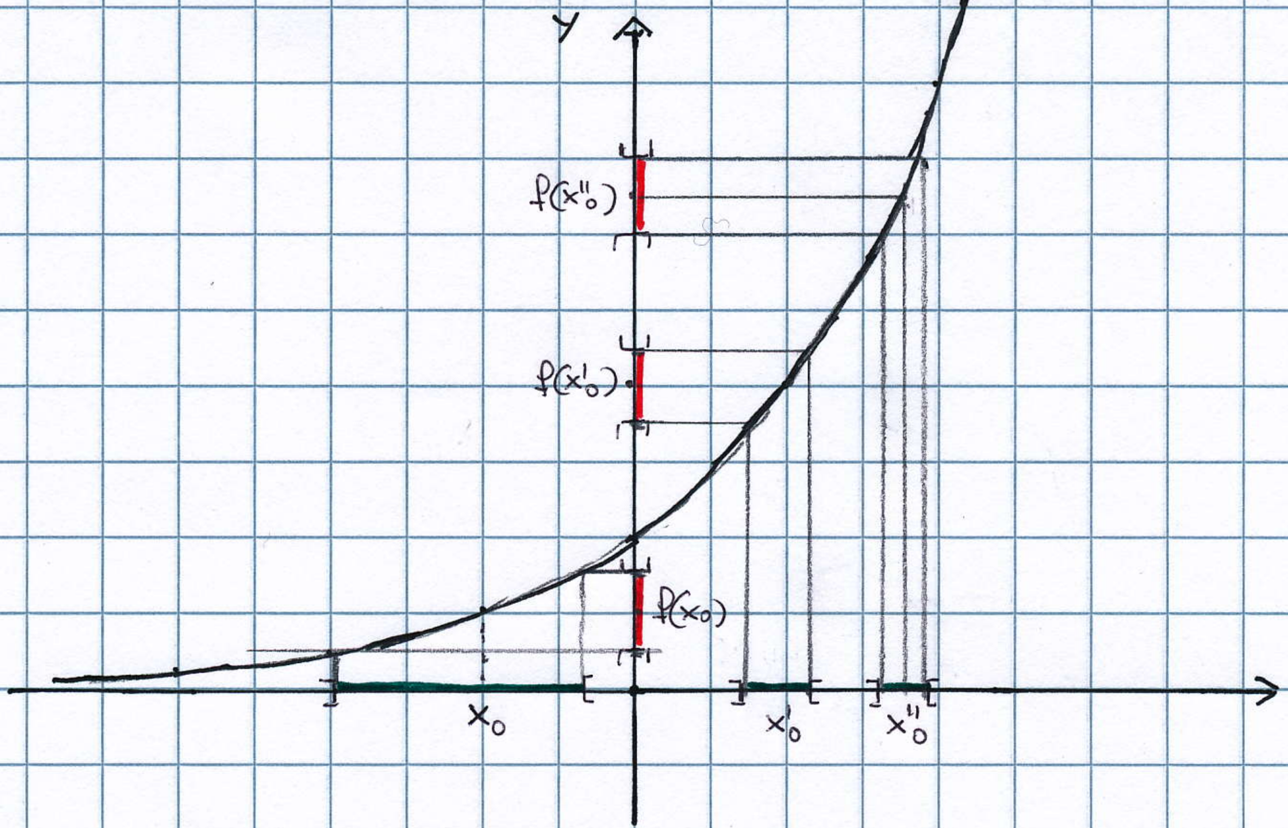
$$(1) \quad \forall x_0 \in E \Rightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right].$$

Dalla (1) appare chiaro che la determinazione del raggio $\delta > 0$ per cui è vera l'implicazione

$$(2) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

è condizionata sia dal valore di $\varepsilon > 0$ che dalla scelta del punto $x_0 \in E$ (in breve si suole dire che "Il δ dipende sia dall'ε che dal punto x_0") e che, in generale, per un dato $\varepsilon > 0$ non è possibile trovare un $\delta > 0$ "universale", cioè che "vada bene" (nel senso di garantire la validità della (2)) per qualunque $x_0 \in E$.

Per renderci meglio conto di questo fatto consideriamo l'esempio della funzione $f(x) = 2^x$ ($E = \mathbb{R}$). La forma del grafico, la cui pendenza aumenta oltre ogni limite all'aumentare di x_0, fa capire



che per un dato $\varepsilon > 0$ l'intervallo delle soluzioni della disequazione $|2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$ ha una lunghezza che decresce al crescere di x_0 e tende a zero per $x_0 \to +\infty$, per cui non è possibile trovare un $\delta > 0$ "universale" (nella figura sono indicati, per $\varepsilon = \frac{1}{4}$, sull'asse delle y, in rosso, gli intervalli $]2^{x_0} - \varepsilon, 2^{x_0} + \varepsilon[$, $]2^{x'_0} - \varepsilon, 2^{x'_0} + \varepsilon[$ e $]2^{x''_0} - \varepsilon, 2^{x''_0} + \varepsilon[$, e sull'asse delle x, in verde, gli intervalli delle soluzioni delle corrispondenti disequazioni $|2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$, $|2^x - 2^{x'_0}| < \varepsilon$ e $|2^x - 2^{x''_0}| < \varepsilon$).

Possiamo giustificare quanto asserito facendo alcuni semplici calcoli.

Fissati il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed il numero $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione

$$(3) \qquad |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon ,$$

cioè il sistema $2^{x_0}-\varepsilon < 2^x < 2^{x_0}+\varepsilon$.

Per la disequazione $2^{x_0}-\varepsilon < 2^x$ si hanno i seguenti risultati:

1) se $\varepsilon \geq 2^{x_0}$ la disequazione è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$;

2) se $\varepsilon < 2^{x_0}$ si ha:

$$2^{x_0}-\varepsilon < 2^x \iff 2^{\log_2(2^{x_0}-\varepsilon)} < 2^x \iff \log_2(2^{x_0}-\varepsilon) < x .$$

Per la disequazione $2^x < 2^{x_0}+\varepsilon$ si ha:

$$2^x < 2^{x_0}+\varepsilon \iff 2^x < 2^{\log_2(2^{x_0}+\varepsilon)} \iff x < \log_2(2^{x_0}+\varepsilon) .$$

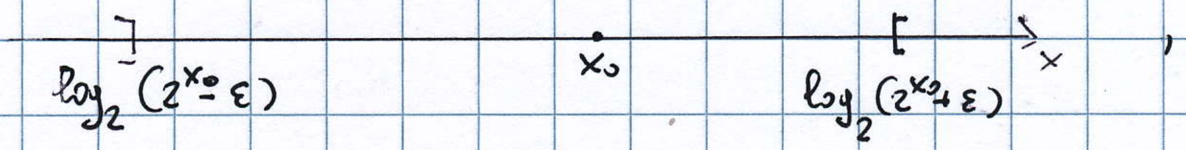
In conclusione l'insieme delle soluzioni della (3) è

- l'intervallo $]-\infty, \log_2(2^{x_0}+\varepsilon)[$ se $\varepsilon \geq 2^{x_0}$

ovvero

- l'intervallo $]\log_2(2^{x_0}-\varepsilon), \log_2(2^{x_0}+\varepsilon)[$ se $\varepsilon < 2^{x_0}$.

Notiamo ancora che nel secondo caso ($\varepsilon < 2^{x_0}$), quando l'insieme delle soluzioni della (3) è l'intervallo



,

la distanza del punto x_0 dall'estremo destro $\log_2(2^{x_0}+\varepsilon)$ è minore di quella dall'estremo sinistro $\log_2(2^{x_0}-\varepsilon)$.

Infatti, effettuando il confronto tra le due distanze, si ha:

$$x_0 - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) \lesseqgtr \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0 \iff$$

$$\iff \log_2 2^{x_0} - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) \lesseqgtr \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - \log_2 2^{x_0} \iff$$

$$\iff \log_2 \frac{2^{x_0}}{2^{x_0} - \varepsilon} \lesseqgtr \log_2 \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} \iff$$

$$\iff \frac{2^{x_0}}{2^{x_0} - \varepsilon} \lesseqgtr \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} \iff 2^{2x_0} \lesseqgtr 2^{2x_0} - \varepsilon^2$$

e quindi, dato che nell'ultima disuguaglianza vale il segno $>$, si conclude che è

$$x_0 - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) > \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0 .$$

A questo punto è chiaro che, per un dato $x_0 \in \mathbb{R}$ ed un dato $\varepsilon > 0$, il massimo valore di $\delta > 0$ per cui è vera l'implicazione

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$$

(ovvero il massimo valore di $\delta > 0$ per cui l'intorno circolare $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ è contenuto nell'intervallo delle soluzioni della (3)) è il numero

$$\delta_{\varepsilon, x_0} = \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0 = \log_2 \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}}\right).$$

È chiaro anche che la risposta alla domanda se sia possibile trovare, per un dato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ "universole" avrà risposta affermativa o negativa a seconda che risulti:

$$\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 \quad \text{oppure} \quad \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} = 0 \ .$$

Nel nostro caso, essendo la funzione (della variabile x_0)

$$\mathbb{R} \ni x_0 \longrightarrow \delta_{\varepsilon, x_0} = \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}}\right)$$

una funzione decrescente in $\mathbb{R}$, si ha (per il teorema sui limiti delle funzioni monotone)

$$\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} = \lim_{x_0 \to +\infty} \delta_{\varepsilon, x_0} = \lim_{x_0 \to +\infty} \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}}\right) = 0,$$

quindi la risposta è "No, qualunque sia $\varepsilon > 0$".

Se però, invece di considerare la funzione 2^x in $\mathbb{R}$, consideriamo la sua restrizione $2^x|_{]-\infty, h]}$ ad un qualunque intervallo $]-\infty, h]$, $h \in \mathbb{R}$, e riproponiamo la stessa domanda, la risposta diventa "Sì, per qualunque valore di $\varepsilon > 0$". Infatti, qualunque sia $\varepsilon > 0$, se consideriamo il numero

$$\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon, h} = \inf_{x_0 \in]-\infty, h]} \delta_{\varepsilon, x_0} \ ,$$

abbiamo che l'implicazione

$$x \in]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[\implies |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon \ ,$$

e quindi, a maggior ragione, l'implicazione

$$x \in]x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon[\cap]-\infty, h] \Rightarrow |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon,$$

è vera per qualunque $x_0 \in]-\infty, h]$. Queste circostanze (cioè la possibilità di trovare un $\delta>0$ "universale" per ogni $\varepsilon>0$) viene espressa dicendo che "La funzione 2^x è uniformemente continua in $]-\infty, h]$". Invece "2^x non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$".

Ritornando al caso generale di una funzione $f: E\ (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, diremo che f è uniformemente continua in E se per ogni $\varepsilon>0$ è possibile determinare un $\delta>0$ per il quale l'implicazione (2) sia verificata per ogni $x_0 \in E$; in simboli:

$$(4) \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x_0 \in E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap E \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon].$$

Notiamo che la (4) può anche scriversi:

$$(4') \quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ tale che}$$
$$\forall x_0, x \in E : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Notiamo inoltre che nella (4') il ruolo di x_0 e x è perfettamente simmetrico. È preferibile quindi, nel formalizzare la definizione di funzione uniformemente continua, indicare i punti x_0 e x con simboli che abbiano "pari dignità".

DEFINIZIONE 1. Si dice che una funzione reale di variabile reale $f: E \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua nell'insieme E se

(5) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

Dalla precedente discussione si ha ovviamente che una funzione uniformemente continua in un insieme E è anche continua in E, mentre il viceversa non è vero, come mostra l'esempio della funzione 2^x in $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 1. Un ragionamento più spedito, rispetto alle considerazioni svolte in precedenza, per dimostrare che 2^x non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$ è il seguente.

Supponiamo per assurdo che 2^x sia uniformemente continua in $\mathbb{R}$, cioè che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |2^{x_1} - 2^{x_2}| < \varepsilon .$$

Ne segue, in particolare, prendendo $x_1 = x \in \mathbb{R}$ e $x_2 = x + \frac{\delta}{2}$, che è

$$|2^x - 2^{x+\frac{\delta}{2}}| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ma ciò è assurdo poiché

$$\lim_{x \to +\infty} |2^x - 2^{x+\frac{\delta}{2}}| = \lim_{x \to +\infty} 2^x \left(2^{\frac{\delta}{2}} - 1\right) = +\infty .$$

Un caso particolarmente importante in cui è vera l'implicazione

$$f \text{ continua} \Rightarrow f \text{ uniformemente continua}$$

è quello in cui il dominio di f è un insieme sequenzialmente compatto.

TEOREMA 1 (Teorema di HEINE-CANTOR).
<u>Sia</u> $f : K \to \mathbb{R}$ <u>una funzione reale di variabile reale continua in un insieme sequenzialmente compatto</u> K. <u>Allora</u> f <u>è uniformemente continua in</u> K.

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 1. Lo studente interessato compirà un utile esercizio (anche al fine di acquisire maggiore dimestichezza con la nozione di insieme sequenzialmente compatto) leggendo la dimostrazione riportata nel testo BERTSCH - DAL PASSO - GIACOMELLI.

Prima di procedere oltre con la teoria mostriamo altri esempi di funzioni uniformemente continue e di funzioni che non sono uniformemente continue.

ESEMPIO 1. Ogni polinomio $p(x) = ax + b$, di grado non superiore a uno, è una funzione uniformemente continua in $\mathbb{R}$. Infatti si ha, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$|p(x_1)-p(x_2)| = |ax_1+b-(ax_2+b)| = |a|\,|x_1-x_2|$$

e quindi, per verificare la definizione di funzione uniformemente continua, per ogni $\varepsilon>0$ basta prendere $\delta>0$ in modo $|a|\delta<\varepsilon$ (cosa certamente possibile).

ESEMPIO 2. La funzione $\operatorname{sen} x$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$. Infatti si ha, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| = \left| 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| = |x_1-x_2|$$

e quindi, fissato $\varepsilon>0$, basta prendere $\delta\leq\varepsilon$.

Analogamente si ha

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1-x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

e quindi anche $\cos x$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 3. La funzione $\frac{1}{x}\Big|_{]0,1]}$ non è uniformemente continua in $]0,1]$. Supponiamo, per assurdo, che lo sia:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in]0,1] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon .$$

In particolare, fissato un punto $\bar{x} \in]0,1]$ tale che $\bar{x} \leq \delta$, si ha che la disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right| < \varepsilon$$

è vera per ogni $x \in]0, \bar{x}]$, ma ciò è assurdo poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right| = +\infty .$$

ESEMPIO 4. La funzione $\frac{1}{x}$ è uniformemente continua in $[h, +\infty[$ $(h > 0)$. Infatti per ogni $x_1, x_2 \in [h, +\infty[$ si ha

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1||x_2|} \leq \frac{1}{h^2} |x_2 - x_1|$$

e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta > 0$ in modo che $\frac{\delta}{h^2} \leq \varepsilon$.

OSSERVAZIONE 2. Ricordiamo che in $\mathbb{R}$ "sequenzialmente compatto" equivale a dire "chiuso e limitato". Gli esempi delle funzioni $\frac{1}{x}$ in $]0,1]$ e 2^x in $\mathbb{R}$ mostrano che nessuna delle due ipotesi "chiuso" e "limitato" può essere omessa nel teorema di Heine - Cantor.

Terminiamo presentando alcune altre condizioni (necessarie o sufficienti) di uniforme continuità, utili per le applicazioni, delle quali omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 2. Siano f, g due funzioni reali continue nell'intervallo chiuso $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$, "asintotiche" per $x \to +\infty$, cioè tali che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 .$$

Se una delle due funzioni è uniformemente continua in $[a, +\infty[$, allora lo è pure l'altra.

Poiché i polinomi $p(x) = ax + b$ sono funzioni uniformemente continue in $\mathbb{R}$ si ha il seguente

COROLLARIO 1. Se f è una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ ed il grafico di f è dotato di asintoto (orizzontale o obliquo) per $x \to +\infty$, allora f è uniformemente continua in $[a, +\infty[$.

Sulla scorta del precedente corollario possiamo ad esempio affermare che le funzioni $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

$x + \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x + e^{-x}$ sono uniformemente continue in $[h, +\infty[$ $(h>0)$.

Ovviamente il precedente teorema ed il successivo corollario continuano a valere, con le ovvie modifiche, nel caso dell'intervallo $]-\infty, b]$.

TEOREMA 3 ("Saldatura" di funzioni uniformemente continue). Siano $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[b,c)\to\mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue nei loro intervalli di definizione e tali che $f(b)=g(b)$. Allora la funzione $h:(a,c)\to\mathbb{R}$, definita ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\in(a,b], \\ g(x) & \text{se } x\in[b,c), \end{cases}$$

è uniformemente continua in (a,b).

Ad esempio la funzione $h:]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge

$$h(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x\in\,]-\infty,0], \\ x^4-x^2+1 & \text{se } x\in[0,1], \end{cases}$$

è uniformemente continua in $]-\infty,1]$ (perché 2^x è uniformemente continua in $]-\infty,0]$ e x^4-x^2+1 è uniformemente continua in $[0,1]$ per il teorema di Heine-Cantor).

Anche se è del tutto ovvio è utile osservare esplicitamente che

PROPOSIZIONE 1. <u>La restrizione di una funzione uniformemente continua $f: E \to \mathbb{R}$ ad un qualunque sottoinsieme di E è uniformemente continua.</u>

ESEMPIO 5. Proviamo che la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$. Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ il Corollario 1 implica che $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è uniformemente continua in $[h, +\infty[$, $h > 0$. Poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ la funzione $g: [0, h] \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \in]0, h], \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $[0, h]$ e quindi, per il teorema di Heine-Cantor, uniformemente continua in $[0, h]$. La Proposizione 1 implica allora che $g|_{]0,h]}$ è uniformemente continua, cioè $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, h]$. A questo punto, grazie al Teorema 3, possiamo concludere che $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$.

Per quanto riguarda il prolungamento di funzioni uniformemente continue si ha il seguente

TEOREMA 4. <u>Sia $f: E \to \mathbb{R}$ una funzione uni-</u>

formemente continua in E. Allora esiste, ed è unica, una funzione $\bar{f} : \bar{E} \to \mathbb{R}$ ($\bar{E}$ chiusura di E) che prolunga la f ed è uniformemente continua in $\bar{E}$.

COROLLARIO 2. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua in E e sia $c \in DE \setminus E$. Allora il limite $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste finito.

Per esempio, grazie al precedente corollario usato "in negativo", possiamo affermare che $\frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $]0,1]$ (dato che $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$). Analogamente neanche $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è uniformemente continua in $]0,1]$ (dato che il $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non esiste).

COROLLARIO 3. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua in un insieme limitato E. Allora f è limitata in E.

Infine, per quanto riguarda la uniforme continuità in un intervallo non limitato, si ha la seguente condizione (necessaria) di crescita.

TEOREMA 5. Sia f è una funzione uniformemente continua in un intervallo non limitato I. Allora esistono due costanti A e B tali che

$$|f(x)| \leq A|x| + B \qquad \forall x \in I.$$

Per il Teorema 5 abbiamo che la funzione x^p con $p > 1$ (che è un infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$) non è uniformemente continua in $]0, +\infty[$. Per lo stesso motivo neanche $x \log x$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$.

Quando si vuole smentire la uniforme continuità di una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ in base alla definizione occorre tenere presente che la negazione della (5) è:

$$\exists \varepsilon > 0 : \left[\forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \text{ e } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \right],$$

quindi occorre mostrare l'esistenza di coppie di punti $x_1, x_2 \in E$ con distanza tra loro arbitrariamente piccola, ma tali che la distanza delle loro immagini sia maggiore o uguale di un opportuno $\varepsilon > 0$.

ESEMPIO 6. Proviamo che la funzione $\operatorname{sen} x^2$ non è uniformemente continua in $\mathbb{R}$. Poiché l'insieme immagine di $[2n\pi, 2n\pi + 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, mediante la funzione $\operatorname{sen} t$ è $[-1, 1]$, si ha che l'insieme immagine di $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2n\pi + 2\pi}]$ mediante la funzione $\operatorname{sen} x^2$ è ancora $[-1, 1]$. Ma l'ampiezza dell'intervallo $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2n\pi + 2\pi}]$ tende a zero per $n \to \infty$ (facile verifica), quindi, preso $0 < \varepsilon \leq 2$, vi sono coppie di punti arbitrariamente vicini le cui immagini hanno distanza $\geq \varepsilon$.

FUNZIONI LIPSCHITZIANE.

DEFINIZIONE 2. Si dice che una funzione reale di variabile reale $f : E \to \mathbb{R}$ è *lipschitziana* in E se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$(6) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E.$$

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di funzioni lipschitziane: le funzioni $p(x) = ax+b$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ in $\mathbb{R}$ (Esempi 1 e 2) e la funzione $\frac{1}{x}$ in $[h, +\infty[$ $(h>0)$ (Esempio 4).
Con lo stesso ragionamento adottato a proposito di tali funzioni si prova che, in generale, vale il

TEOREMA 6. *Ogni funzione $f : E \to \mathbb{R}$ lipschitziana in E è anche uniformemente continua in E.*

Dimostrazione. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, se si prende, come è certamente possibile, un qualunque $\delta > 0$ tale che $\delta L < \varepsilon$ (essendo L la costante che figura nella (6)), si ha che per ogni $x_1, x_2 \in E$ tali che $|x_1 - x_2| < \delta$ risulta

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \leq L\delta < \varepsilon \; ;$$

ciò prova la uniforme continuità di f.

A questo punto è naturale chiedersi se la lipschitzianità sia una condizione, oltre che sufficiente, anche necessaria per la uniforme continuità. L'esempio seguente mostra che la risposta è negativa.

ESEMPIO 7. (Una funzione uniformemente continua che non è lipschitziana). La funzione $\sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0,1]$ per il teorema di Heine-Cantor. Tale funzione non è però lipschitziana. Supponiamo per assurdo che lo sia, cioè che esiste $L \geq 0$ tale da aversi

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1],$$

da cui, in particolare ($x_1 = x \in [0,1]$, $x_2 = 0$),

$$\sqrt{x} \leq Lx \quad \forall x \in [0,1]$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq L \quad \forall x \in]0,1],$$

il che è assurdo dato che $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

OSSERVAZIONE 3. Se $f: E \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana in E e $L \geq 0$ è una costante per cui è verificata la (6), si dice che L è <u>una costante di Lipschitz</u> della funzione f. L'uso dell'articolo indeterminativo è dovuto al fatto che vi sono infinite costanti di Lipschitz (tutti i numeri maggiori di una costante di Lipschitz sono a loro volta costanti di Lipschitz). È facile però dimostrare che esiste sempre la "migliore" (cioè la minima) costante di Lipschitz. Infatti, se indichiamo con $\mathcal{L}$ l'insieme delle costanti di Lipschitz della funzione f e poniamo $L^* = \inf \mathcal{L}$, allora, per le proprietà dell'estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $L_n \in \mathcal{L}$ tale che

$$L^* \leq L_n < L^* + \frac{1}{n} \quad ;$$

essendo $L_n \in \mathcal{L}$ si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_n |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L^* |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

dunque anche L^* è una costante di Lipschitz.

Notiamo che una formulazione perfettamente equivalente della (6) è

$$(6') \qquad \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L \qquad \forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 .$$

L'argomento del valore assoluto al primo membro è il valore che la funzione rapporto incrementale della f di punto iniziale x_2 prende nel punto x_1. Per l'arbitrarietà di x_2 e x_1 la (6') dice allora che tutte le funzioni rapporto incrementale della funzione f (al variare del punto iniziale) sono maggiorate, in valore assoluto, da una medesima costante L. Ne segue subito che, se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione definita in un intervallo I e verificante le ipotesi del teorema di Lagrange, seconda forma (f continua in I e derivabile in $\mathring{I}$), si ha la seguente caratterizzazione della lipschitzianità:

$$f \text{ è lipschitziana in } I \iff f' \text{ è limitata in } \mathring{I}.$$

Infatti, se f è lipschitziana in I, cioè esiste $L \geq 0$ tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq L \quad \forall\, x_0, x \in I : x \neq x_0,$$

allora, $\underbrace{\text{passando}}_{\text{supposto } x_0 \in \mathring{I}}$ al limite per $x \to x_0$ nella precedente disuguaglianza, si ottiene

$$|f'(x_0)| \leq L \qquad \forall x_0 \in \mathring{I},$$

dunque f' è limitata in $\mathring{I}$.

Viceversa, se f' è limitata in $\mathring{I}$, cioè esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f'(x)| \leq L \qquad \forall x \in \mathring{I},$$

allora, per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, si ha, applicando il teorema di Lagrange nella seconda forma,

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(\xi)| \leq L$$

(essendo ξ un opportuno punto interno all'intervallo di estremi x_1 e x_2) dunque f e' lipschitziana in I.

Per maggiore ordine formalizziamo il risultato appena dimostrato.

TEOREMA 7. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e derivabile in $\mathring{I}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia lipschitziana in I è che f' sia limitata in $\mathring{I}$.

ESEMPIO 8. Dal Teorema 7 si deduce che per $0<p<1$ la funzione x^p e' uniformemente continua in $[h, +\infty[$, $h>0$. Ne segue, applicando il teorema di Heine-Cantor ed il Teorema 3, che il prolungamento continuo di x^p a $[0, +\infty[$, cioe' la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^p & \text{se } x \in]0, +\infty[, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

è uniformemente continua in $[0,+\infty[$. In particolare $\sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0,+\infty[$.

UNIFORME CONTINUITÀ E LIPSCHITZIANITÀ PER FUNZIONI TRA SPAZI METRICI.

I concetti di uniforme continuità e di lipschitzianità si estendono alle funzioni tra spazi metrici. Precisamente, dati due spazi metrici (S, d) e (S_1, d_1) si hanno le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1'. Si dice che una funzione $f: E(\subseteq S) \to S_1$ è uniformemente continua in E se

(5') $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in E : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

DEFINIZIONE 2'. Si dice che una funzione $f: E(\subseteq S) \to S_1$ è lipschitziana in E se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

(6') $d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq L\, d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in E.$

I Teoremi 1 e 6 sono ancora validi in questo ambito più generale.