

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. L'affermazione " f è continua in E ", ovvero "Per ogni $x_0 \in E$ la funzione f è continua nel punto x_0 ", può scriverci, usando il "linguaggio degli ε e dei δ ", nel modo seguente:

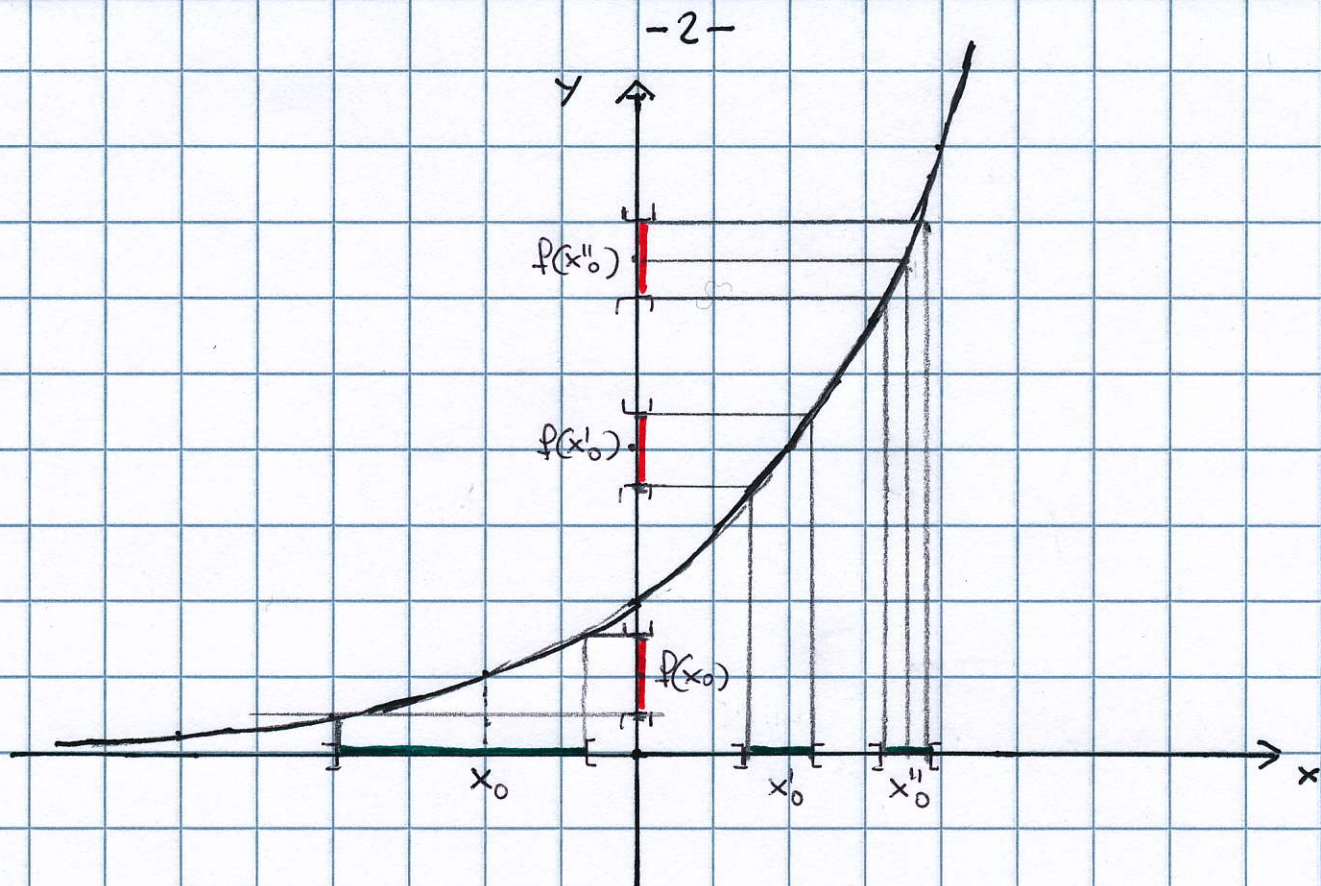
$$(1) \quad \forall x_0 \in E \Rightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right].$$

Dalla (1) appare chiaro che la determinazione del reggio $\delta > 0$ per cui è vera l'implicazione

$$(2) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

è condizionata sia dal valore di $\varepsilon > 0$ che dalla scelta del punto $x_0 \in E$ (in breve si suole dire che "Il δ dipende sia dall' ε che dal punto x_0 ") e che, in generale, per un dato $\varepsilon > 0$ non è possibile trovare un $\delta > 0$ "universale", cioè che "vede bene" (nel senso di garantire la validità delle (2)) per qualunque $x_0 \in E$.

Per renderci meglio conto di questo fatto consideriamo l'esempio della funzione $f(x) = 2^x$ ($E = \mathbb{R}$). Le forme del grafico, la cui pendenza aumenta oltre ogni limite all'aumentare di x_0 , le curve



che per un dato $\varepsilon > 0$ l'intervallo delle soluzioni della disuguaglianza $|2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$ ha una lunghezza che decresce al crescere di x_0 e tende a zero per $x_0 \rightarrow +\infty$, per cui non è possibile trovare un $\delta > 0$ "universale" (nelle figure sono indicati, per $\varepsilon = \frac{1}{4}$, sull'asse delle y , in rosso, gli intervalli $]2^{x_0} - \varepsilon, 2^{x_0} + \varepsilon[$, $]2^{x'_0} - \varepsilon, 2^{x'_0} + \varepsilon[$ e $]2^{x''_0} - \varepsilon, 2^{x''_0} + \varepsilon[$, e sull'asse delle x , in verde, gli intervalli delle soluzioni delle corrispondenti disuguaglianze $|2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$, $|2^x - 2^{x'_0}| < \varepsilon$ e $|2^x - 2^{x''_0}| < \varepsilon$).

Possiamo giustificare quanto appena facendo alcuni semplici calcoli.

Fixato il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed il numero $\varepsilon > 0$, risolviamo la disuguaglianza

$$(3) \quad |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon,$$

cioè il sistema $2^{x_0} - \varepsilon < 2^x < 2^{x_0} + \varepsilon$.

Per la disequazione $2^{x_0} - \varepsilon < 2^x$ si hanno i seguenti risultati:

1) se $\varepsilon \geq 2^{x_0}$ la disequazione è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$;

2) se $\varepsilon < 2^{x_0}$ si ha:

$$2^{x_0} - \varepsilon < 2^x \Leftrightarrow 2^{\log_2(2^{x_0} - \varepsilon)} < 2^x \Leftrightarrow \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) < x.$$

Per la disequazione $2^x < 2^{x_0} + \varepsilon$ si ha:

$$2^x < 2^{x_0} + \varepsilon \Leftrightarrow 2^x < 2^{\log_2(2^{x_0} + \varepsilon)} \Leftrightarrow x < \log_2(2^{x_0} + \varepsilon).$$

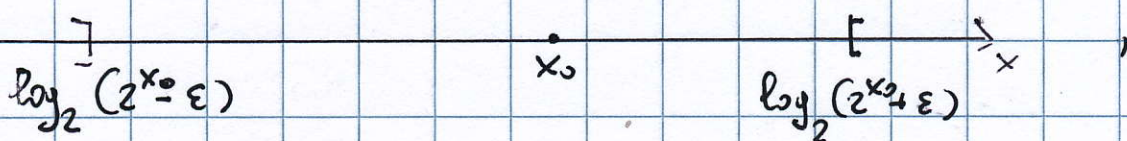
In conclusione l'insieme delle soluzioni delle (3) è:

- l'intervallo $]-\infty, \log_2(2^{x_0} + \varepsilon)[$ se $\varepsilon \geq 2^{x_0}$

ovvero

- l'intervallo $]\log_2(2^{x_0} - \varepsilon), \log_2(2^{x_0} + \varepsilon)[$ se $\varepsilon < 2^{x_0}$.

Notiamo ancora che nel secondo caso ($\varepsilon < 2^{x_0}$), quando l'insieme delle soluzioni delle (3) è l'intervallo



La distanza del punto x_0 dall'estremo destro $\log_2(2^{x_0} + \varepsilon)$ è minore di quella dall'estremo sinistro $\log_2(2^{x_0} - \varepsilon)$.

Inoltre, effettuando il confronto tra le due distanze, si ha:

$$x_0 - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) \stackrel{<}{>} \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{x_0} - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) \stackrel{<}{>} \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - \log_2 2^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2^{x_0}}{2^{x_0} - \varepsilon} \stackrel{<}{>} \log_2 \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{x_0}}{2^{x_0} - \varepsilon} \stackrel{<}{>} \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} \Leftrightarrow 2^{2x_0} \stackrel{<}{>} 2^{2x_0} - \varepsilon^2$$

e quindi, dato che nell'ultima disuguaglianza vale il segno $>$, si conclude che è

$$x_0 - \log_2(2^{x_0} - \varepsilon) > \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0.$$

A questo punto è chiaro che, per un dato $x_0 \in \mathbb{R}$ ed un dato $\varepsilon > 0$, il massimo valore di $\delta > 0$ per cui è vera l'implicazione

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$$

(ovvero il massimo valore di $\delta > 0$ per cui l'intorno circolare $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ è contenuto nell'intervallo delle soluzioni delle (3)) è il numero

$$\delta_{\varepsilon, x_0} = \log_2(2^{x_0} + \varepsilon) - x_0 = \log_2 \frac{2^{x_0} + \varepsilon}{2^{x_0}} = \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}}\right).$$

È chiaro anche che la risposta alle domande se sia possibile trovare, per un dato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ "univer-

solo "avrà" risposte affermative o negative a seconda che risulta:

$$\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 \quad \text{oppure} \quad \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} = 0.$$

Nel nostro caso, essendo la funzione (della variabile x_0)

$$\mathbb{R} \ni x_0 \rightarrow \delta_{\varepsilon, x_0} = \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \right)$$

una funzione decrescente in \mathbb{R} , si ha (per il teorema sui limiti delle funzioni monotone)

$$\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \delta_{\varepsilon, x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \delta_{\varepsilon, x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \right) = 0,$$

quindi le risposte è "No, qualunque sia $\varepsilon > 0$ ".

Se però, invece di considerare la funzione 2^x in \mathbb{R} , consideriamo la sua restrizione $2^x|_{]-\infty, h]}$ ad un qualunque intervallo $]-\infty, h]$, $h \in \mathbb{R}$, e rispondiamo le stesse domande, la risposta diventa "Sì, per qualunque valore di $\varepsilon > 0$ ". Infatti, qualunque sia $\varepsilon > 0$, se consideriamo il numero

$$\delta_{\varepsilon} = \delta_{\varepsilon, h} = \inf_{x_0 \in]-\infty, h]} \delta_{\varepsilon, x_0},$$

abbiamo che l'implicazione

$$x \in]x_0 - \delta_{\varepsilon}, x_0 + \delta_{\varepsilon}[\Rightarrow |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon,$$

e quindi, a maggior ragione, l'implicazione

$$x \in]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[\cap]-\infty, h] \Rightarrow |2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon,$$

è vera per qualunque $x_0 \in]-\infty, h]$. Queste circostanze (cioè la possibilità di trovare un $\delta > 0$ "universale" per ogni $\varepsilon > 0$) viene espressa dicendo che "La funzione 2^x è uniformemente continua in $]-\infty, h]$ ". Invece " 2^x non è uniformemente continua in \mathbb{R} ".

Ritornando al caso generale di una funzione $f: E (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, otterremo che f è uniformemente continua in E se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ per il quale l'implicazione (2) sia verificata per ogni $x_0 \in E$; in simboli:

$$(4) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in E \Rightarrow \\ \Rightarrow [\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Notiamo che la (4) può anche scriversi:

$$(4') \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che} \\ \forall x_0, x \in E : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Notiamo inoltre che nelle (4') il ruolo di x_0 e x è perfettamente simmetrico. È preferibile quindi, nel formalizzare la definizione di funzione uniformemente continua, indicare i punti x_0 e x con simboli che abbiano "per dignità".

DEFINIZIONE 1. Si dice che una funzione reale di variabile reale $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua nell'insieme E se

(5) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Dalla precedente discussione si ha ovviamente che una funzione uniformemente continua in un insieme E è anche continua in E , mentre il viceversa non è vero, come mostra l'esempio della funzione 2^x su \mathbb{R} .

OSSERVAZIONE 1. Un ragionamento più spedito, rispetto alle considerazioni svolte in precedenza, per dimostrare che 2^x non è uniformemente continua in \mathbb{R} è il seguente.

Supponiamo per assurdo che 2^x sia uniformemente continua in \mathbb{R} , cioè che:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |2^{x_1} - 2^{x_2}| < \varepsilon.$$

Ne segue, in particolare, prendendo $x_1 = x \in \mathbb{R}$ e $x_2 = x + \frac{\delta}{2}$, che è

$$|2^x - 2^{x + \frac{\delta}{2}}| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ma ciò è assurdo poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |2^x - 2^{x + \frac{\delta}{2}}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x (2^{\frac{\delta}{2}} - 1) = +\infty.$$

Un caso particolarmente importante in cui è
vera l'implicazione

f continua $\Rightarrow f$ uniformemente continua
è quello in cui il dominio di f è un insieme
sequenzialmente compatto.

TEOREMA 1 (Teorema di HEINE-CANTOR).

Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale continua su un insieme sequenzialmente compatto K . Allora f è uniformemente continua in K .

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 1. Lo studente interessato compirà un utile esercizio (anche al fine di acquisire maggiore dimestichezza con la nozione di insieme sequenzialmente compatto) leggendo la dimostrazione riportata nel testo BERTSCH - DAL PASSO - GIACOMELLI.

Prima di procedere oltre con la teoria mostriamo altri esempi di funzioni uniformemente continue e di funzioni che non sono uniformemente continue.

ESEMPIO 1. Ogni polinomio $p(x) = ax + b$, di grado non superiore a uno, è una funzione uniformemente continua in \mathbb{R} . Infatti si ha, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$|p(x_1) - p(x_2)| = |ax_1 + b - (ax_2 + b)| = |a| |x_1 - x_2|$$

e quindi, per verificare la definizione di funzione uniformemente continua, per ogni $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta > 0$ in modo che $|a|\delta < \varepsilon$ (cosa certamente possibile).

ESEMPIO 2. La funzione $\sin x$ è uniformemente continua in \mathbb{R} . Infatti si ha, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\sin x_1 - \sin x_2| &= \left| 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = \\ &= 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta \leq \varepsilon$. Analogamente si ha

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

e quindi anche $\cos x$ è uniformemente continua in \mathbb{R} .

ESEMPIO 3. La funzione $\frac{1}{x} \Big|_{]0,1]}$ non è uniformemente continua in $]0,1]$. Supponiamo,

per assurdo, che lo sia:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in]0, 1]: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon.$$

In particolare, fissato un punto $\bar{x} \in]0, 1]$ tale che $\bar{x} \leq \delta$, si ha che le disuguaglianze

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right| < \varepsilon$$

è vera per ogni $x \in]0, \bar{x}]$, ma ciò è assurdo perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right| = +\infty.$$

ESEMPIO 4. La funzione $\frac{1}{x}$ è uniformemente continua in $[h, +\infty[$ ($h > 0$). Infatti per ogni $x_1, x_2 \in [h, +\infty[$ si ha

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1| |x_2|} \leq \frac{1}{h^2} |x_2 - x_1|$$

e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta > 0$ in modo che $\frac{\delta}{h^2} \leq \varepsilon$.

OSSERVAZIONE 2. Ricordiamo che in \mathbb{R} "sequenzialmente compatto" equivale a dire "chiuso e limitato". Gli esempi delle funzioni $\frac{1}{x}$ in $]0, 1]$ e 2^x in \mathbb{R} mostrano che nessuna delle due

ipotesi "chiuso" e "limitato" può essere omessa nel teorema di Heine - Cantor.

Terminiamo presentando alcune altre condizioni (necessarie o sufficienti) di uniformità di continuità, utili per le applicazioni, delle quali omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 2. Sieno f, g due funzioni reali continue nell'intervallo chiuso $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$), "asintotiche" per $x \rightarrow +\infty$, cioè tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Se una delle due funzioni è uniformemente continua in $[a, +\infty[$, allora lo è pure l'altra.

Poiché i polinomi $p(x) = ax + b$ sono funzioni uniformemente continue in \mathbb{R} e lo è la seguente

COROLLARIO 1. Se f è una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) ed il grafico di f è dotato di asintoto (orizzontale o obliquo) per $x \rightarrow +\infty$, allora f è uniformemente continua in $[a, +\infty[$.

Sulle scorte del precedente corollario possiamo ad esempio affermare che le funzioni $\sin \frac{1}{x}$,

$x + \sin \frac{1}{x}$, $x + e^{-x}$ sono uniformemente continue in $[h, +\infty[$ ($h > 0$).

Ovviamente il precedente teorema ed il successivo vanno collati continuamente e valere, con le dovute modifiche, nel caso dell'intervallo $]-\infty, b]$.

TEOREMA 3 ("Saldatura" di funzioni uniformemente continue). Siano $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue nei loro intervalli di definizione e tali che $f(b) = g(b)$. Allora la funzione $h: (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$, definita per

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a, b], \\ g(x) & \text{se } x \in [b, c), \end{cases}$$

è uniformemente continua in (a, c) .

Ad esempio la funzione $h:]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definita mediante la legge

$$h(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \in]-\infty, 0], \\ x^4 - x^2 + 1 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases},$$

è uniformemente continua in $]-\infty, 1]$ (perché 2^x è uniformemente continua in $]-\infty, 0]$ e $x^4 - x^2 + 1$ è uniformemente continua in $[0, 1]$ per il teorema di Heine - Cantor).

Anche se è del tutto ovvio è utile osservare esplicitamente che

PROPOSIZIONE 1. La restrizione di una funzione uniformemente continua $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ad un qualunque sottoinsieme di E è uniformemente continua.

ESEMPIO 5. Proviamo che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ il Teorema 1 implica che $\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua in $[h, +\infty[$, $h > 0$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ la funzione $g: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in]0, h], \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $[0, h]$ e quindi, per il teorema di Heine-Cantor, uniformemente continua in $[0, h]$.

La Proposizione 1 implica allora che $g|_{]0, h]}$ è uniformemente continua, cioè $\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, h]$. A questo punto, grazie al Teorema 3, possiamo concludere che $\frac{\sin x}{x}$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$.

Per quanto riguarda il prolungamento di funzioni uniformemente continue si ha il seguente

TEOREMA 4. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uni-

Formalmente continua in E . Allora esiste, ed è unica, una funzione $\bar{f}: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ (\bar{E} chiusura di E) che prolunga f ed è uniformemente continua in \bar{E} .

COROLLARIO 2. Sive $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua in E e se $c \in Df \setminus E$. Allora il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ esiste finito.

Per esempio, grazie al precedente corollario usato "in negativo", possiamo affermare che $\frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $]0, 1]$ (dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$). Analogamente neanche $\sin \frac{1}{x}$ è uniformemente continua in $]0, 1]$ (dato che il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ non esiste).

COROLLARIO 3. Sive $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua in un insieme limitato E . Allora f è limitata in E .

In fine, per quanto riguarda le uniformi continue' in un intervallo non limitato, vale la seguente conclusione (necessaria) di crescita.

TEOREMA 5. Sia f è una funzione uniformemente continua in un intervallo non limitato I . Allora esistono due costanti A e B tali che

$$|f(x)| \leq A|x| + B \quad \forall x \in I.$$

Per il Teorema 5 abbiamo che la funzione x^p con $p > 1$ (che è un infinito di ordine superiore a x per $x \rightarrow +\infty$) non è uniformemente continua in $]0, +\infty[$. Per lo stesso motivo neanche $x \log x$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$.

Quando si vuole smentire la uniforme continuità di una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ in base alla definizione occorre tenere presente che la negazione della (5) è:

$$\exists \varepsilon > 0 : \left[\forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \text{ e } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \right],$$

quindi occorre mostrare l'esistenza di coppie di punti $x_1, x_2 \in E$ con distanze tra loro arbitrariamente piccole, ma tali che le distanze delle loro immagini siano maggiore o uguale di un opportuno $\varepsilon > 0$.

ESEMPIO 6. Proviamo che la funzione $\sin x^2$ non è uniformemente continua in \mathbb{R} . Poiché l'immagine di $[n\pi, (n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, mediante la funzione $\sin t$ è $[-1, 1]$, si ha che l'immagine di $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2(n+1)\pi}]$ mediante la funzione $\sin x^2$ è ancora $[-1, 1]$. Ma l'ampiezza dell'intervallo $[\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2(n+1)\pi}]$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$ (facile verificare), quindi, preso $0 < \varepsilon \leq 2$, vi sono coppie di punti arbitrariamente vicine le cui immagini hanno distanza $\geq \varepsilon$.

FUNZIONI LIPSCHITZIANE.

DEFINIZIONE 2. Si dice che una funzione reale di variabile reale $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana in E se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$(6) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E.$$

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di funzioni lipschitziane: le funzioni $p(x) = ax + b$, $\sin x$ e $\cos x$ in \mathbb{R} (Esempi 1 e 2) e la funzione $\frac{1}{x}$ in $[h, +\infty[$ ($h > 0$) (Esempio 4).

Con lo stesso ragionamento adottato e proposto da tali funzioni si prova che, in generale, vale il

TEOREMA 6. Ogni funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana in E è anche uniformemente continua in E .

Dimostrazione. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, se si prende, come è certamente possibile, un qualunque $\delta > 0$ tale che $\delta L \leq \varepsilon$ (essendo L la costante che figura nelle (6)), si ha che per ogni $x_1, x_2 \in E$ tali che $|x_1 - x_2| < \delta$ risulta

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \leq L\delta < \varepsilon;$$

ciò prova la uniforme continuità di f .

A questo punto è naturale chiedersi se la Lipschitzianità sia una condizione, oltre che sufficiente, anche necessaria per la uniforme continuità. L'esempio seguente mostra che la risposta è negativa.

ESEMPIO 7. (Una funzione uniformemente continua che non è Lipschitziana). La funzione \sqrt{x} è uniformemente continua in $[0, 1]$ per il teorema di Heine-Cantor. Tale funzione non è però Lipschitziana. Supponiamo per assurdo che lo sia, cioè che esista $L \geq 0$ tale da essere

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1],$$

da cui, in particolare ($x_1 = x \in [0, 1]$, $x_2 = 0$),

$$\sqrt{x} \leq Lx \quad \forall x \in [0, 1]$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq L \quad \forall x \in]0, 1],$$

il che è assurdo dato che $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

OSSERVAZIONE 3. Se $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitziana in E e $L \geq 0$ è una costante per cui è verificata la (6), si dice che L è una costante di Lipschitz della funzione f . L'uso dell'articolo indeterminativo è dovuto al fatto

che vi sono infinite costanti di Lipschitz (tutti i numeri maggiori di una costante di Lipschitz sono a loro volta costanti di Lipschitz). È facile però dimostrare che esiste sempre la "migliore" (cioè la minima) costante di Lipschitz. Infatti, se indichiamo con \mathcal{L} l'insieme delle costanti di Lipschitz della funzione f e poniamo $L^* = \inf \mathcal{L}$, allora, per la proprietà dell'estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $L_n \in \mathcal{L}$ tale che

$$L^* \leq L_n < L^* + \frac{1}{n} ;$$

essendo $L_n \in \mathcal{L}$ si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_n |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L^* |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

dimostrando anche che L^* è una costante di Lipschitz.

Notiamo che una formulazione perfettamente equivalente della (6) è

$$(6') \quad \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L \quad \forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2.$$

L'argomento del valore assoluto al primo membro è il valore che la funzione rapporto incrementale della f di punto iniziale x_2 prende nel punto x_1 . Per

l'attribuzione di x_2 e x_1 , la (6') dice allora che tutte le funzioni rispetto incrementale della funzione f (al vedere del punto iniziale) sono maggiorate, in valore assoluto, da una medesima costante L . Ne segue subito che, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definita in un intervallo I e verificante le ipotesi del teorema di Lagrange, secondo forma (f continua in I e derivabile in $\overset{\circ}{I}$), si ha la seguente caratterizzazione delle Lipschitziane:

f è Lipschitziana in $I \Leftrightarrow f'$ è limitata in $\overset{\circ}{I}$.

Infatti, se f è Lipschitziana in I , esiste $L \geq 0$ tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq L \quad \forall x_0, x \in I : x \neq x_0,$$

Supposto $x_0 \in \overset{\circ}{I}$

allora, passando al limite per $x \rightarrow x_0$ nella precedente disuguaglianza, si ottiene

$$|f'(x_0)| \leq L \quad \forall x_0 \in \overset{\circ}{I},$$

da cui f' è limitata in $\overset{\circ}{I}$.

Viceversa, se f' è limitata in $\overset{\circ}{I}$, esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \overset{\circ}{I},$$

allora, per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, si ha, applicando il teorema di Lagrange nella seconda forma,

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(\xi)| \leq L$$

(essendo ξ un opportuno punto interno all'intervallo di estremi x_1 e x_2) dunque f è lipschitziana in I .

Per maggiore ordine formalizziamo il risultato appena dimostrato.

TEOREMA 7. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e derivabile in $\overset{\circ}{I}$.
Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia lipschitziana in I è che f' sia limitata in $\overset{\circ}{I}$.

ESEMPIO 8. Dal Teorema 7 si deduce che per $0 < p < 1$ la funzione x^p è uniformemente continua in $[h, +\infty[$, $h > 0$. Ne segue, applicando il teorema di Heine-Canter ed il Teorema 3, che il prolungamento continuo di x^p è $[0, +\infty[$, cioè la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^p & \text{se } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

è uniformemente continua in $[0, +\infty[$. In particolare \sqrt{x} è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

UNIFORME CONTINUITÀ' E LIPSCHITZIANITÀ PER FUNZIONI TRA SPAZI METRICI.

I concetti di uniformemente continua e di Lipschitziana si estendono alle funzioni tra spazi metrici. Precisamente, dati due spazi metrici (S, d) e (S_1, d_1) si hanno le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1'. Si dice che una funzione $f: E (\subseteq S) \rightarrow S_1$ è uniformemente continua in E se

(5') $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in E : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

DEFINIZIONE 2'. Si dice che una funzione $f: E (\subseteq S) \rightarrow S_1$ è Lipschitziana in E se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$(6') \quad d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in E.$$

I Teoremi 1 e 6 sono ancora validi in questo ambito più generale.