LA MONOTONIA IN UN PUNTO.

Per una funzione reale di variabile reale $f: E \to \mathbb{R}$ la proprietà di essere monotona [nel suo dominio] è una proprietà di tipo globale. Infatti per poter dire, ad esempio, che f è crescente [nell'insieme E] occorre verificare che

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

dunque si devono confrontare i valori $f(x_1)$, $f(x_2)$ che la f prende in due qualsiasi punti del suo dominio.

La monotonia in un punto è invece una proprietà di tipo locale; questa volta si tratta di confrontare il valore che la funzione prende nel punto x_0 considerato con i valori presi in tutti gli altri punti x di un opportuno intorno di x_0

DEFINIZIONI 1. Si dice che una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) è crescente [risp. decrescente] nel punto $x_0 \in I$ se

$$(1) \quad \exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ \quad e \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

$$\left[\text{risp.} \quad \exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ \text{e} \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases} \right].$$

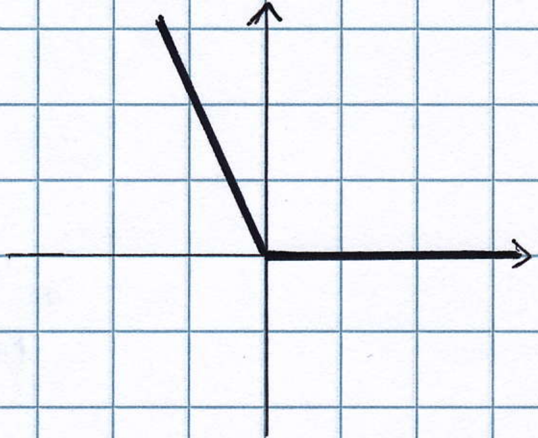
Si dice che f è <u>strettamente crescente</u> [risp. <u>strettamente decrescente</u>] <u>nel punto</u> x_0 se

$$\exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ \text{e} \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

$$\left[\text{risp.} \quad \exists \delta > 0 : \begin{matrix} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ \text{e} \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{matrix} \right].$$

ESEMPIO 1. La funzione $f(x) = |x| - x$, cioè

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \in]-\infty, 0], \\ 0 & \forall x \in [0, +\infty[, \end{cases}$$

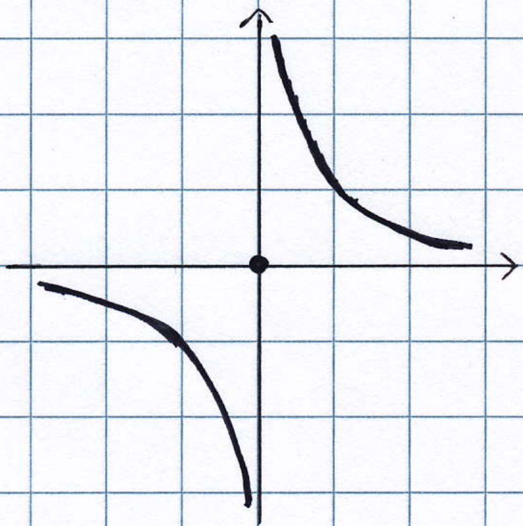


- è strettamente decrescente in ogni punto $x_0 < 0$ (si verifica la definizione con un qualunque $\delta > 0$);
- è decrescente, ma non strettamente decrescente, nel punto $x_0 = 0$ (si verifica la definizione con un qualunque $\delta > 0$);
- è sia decrescente (si verifica la definizione con

in qualunque $\delta > 0$) che crescente (si verifica la definizione con $0 < \delta \leq x_0$) in ogni punto $x_0 > 0$.

ESEMPIO 2. La funzione

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx^2+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



- è strettamente decrescente in qualunque punto $x_0 \neq 0$ (basta prendere $\delta \leq |x_0|$);
- è strettamente crescente nel punto $x_0 = 0$ (si verifica la definizione con un qualunque $\delta > 0$).

OSSERVAZIONE 1. Notiamo che una ovvia condizione sufficiente affinché f sia crescente in x_0 (e analogamente per gli altri tipi di monotonia) è che esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che la restrizione $f|_{U\cap I}$ sia una funzione crescente [in $U \cap I$]. Tale condizione non è però necessaria: la funzione dell'esempio precedente è strettamente crescente nel punto $x_0 = 0$ ma non esiste alcun intorno U di 0 tale che $f|_U$ sia crescente, anzi non esiste alcun intorno U di 0 tale che $f|_U$ sia monotona (infatti se $x_1, x_2 \in U$ sono tali che $x_1 < x_2 < 0$ oppure $0 < x_1 < x_2$

risulta $f(x_1) > f(x_2)$, mentre se $x_1 < 0 < x_2$ allora si ha $f(x_1) < f(x_2)$).

OSSERVAZIONE 2. La definizione di funzione crescente in un punto x_0 può essere equivalentemente riformulata, in modo da unificare le due implicazioni che figurano nella (1), adoperando il rapporto incrementale. Infatti se è verificata la (1) si ha:

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow f(x)-f(x_0) \leq 0 \text{ e } x-x<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad ,$$

$$\forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow f(x)-f(x_0) \geq 0 \text{ e } x-x_0>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad ,$$

dunque è vero che:

$$(2) \quad \exists \delta>0 \; : \; \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 .$$

Viceversa, se è verificata la (2), distinguendo i due casi $x < x_0$ e $x > x_0$, si ottiene subito che è verificata (1).

Abbiamo così dimostrato la

PROPOSIZIONE 1. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ sia crescente nel punto $x_0 \in I$ è che sia vera la (2).

OSSERVAZIONE 2'. È chiaro che considerazioni del tutto analoghe a quelle precedentemente svolte a proposito della crescenza in x_0 valgono per gli altri tipi di monotonia. Conseguentemente si ha la

PROPOSIZIONE 1'. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ sia decrescente [oppure strettamente crescente oppure strettamente decrescente] nel punto $x_0 \in I$ è che sia vera la condizione che si ottiene dalla (2) sostituendo il segno $\geq$ della disuguaglianza con $\leq$ [oppure $>$ oppure $<$].

TEOREMA 1 (Condizione sufficiente per la stretta monotonia in un punto). Supponiamo che la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) sia derivabile nel punto $x_0 \in I$ e che risulti $f'(x_0) > 0$ [risp. $f'(x_0) < 0$]. Allora f è strettamente crescente [risp. strettamente decrescente] nel punto x_0.

Dimostrazione. Esaminiamo il caso $f'(x_0) > 0$. Per ipotesi si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0 ,$$

dunque, per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 ,$$

pertanto (Proposizione 1') f è strettamente crescente nel punto x_0.

OSSERVAZIONE 3. Notiamo che la precedente condizione sufficiente per la stretta monotonia in un punto non è necessaria. Infatti una funzione può essere monotona in un punto senza essere continua, e quindi neanche derivabile, in quel punto (cfr. l'Esempio 2). Inoltre, anche se ci si mette nell'ambito delle funzioni derivabili, non è vero che "f strettamente crescente in x_0" $\Rightarrow f'(x_0) > 0$. Un controesempio in tal senso è dato dalla funzione x^3, la quale è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e quindi strettamente crescente in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, in particolare nel punto $x_0 = 0$, mentre la sua derivata $3x^2$ si annulla nel punto $x_0 = 0$.

Una condizione necessaria per la monotonia in un punto, nell'ambito delle funzioni derivabili, è data dal seguente

TEOREMA 2 (Condizione necessaria per la monotonia in un punto). Supponiamo che la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ sia derivabile nel punto $x_0 \in I$. Condizione necessaria affinché f sia crescente [risp. decrescente] nel punto x_0 è che risulti $f'(x_0) \geq 0$ [risp. $f'(x_0) \leq 0$].

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente in x_0. Risulta allora (Proposizione 1)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{definitivamente per } x \to x_0,$$

da cui la tesi applicando il teorema del passaggio al limite nelle disuguaglianze.

Completiamo l'argomento con l'enunciato di un teorema che mette in relazione la monotonia in un punto e la monotonia in un intervallo.

TEOREMA 3 (Monotonia in un punto e monotonia in un intervallo). Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ sia crescente (oppure decrescente oppure strettamente crescente oppure strettamente decrescente) nell'intervallo I è che f sia crescente (oppure decrescente oppure strettamente crescente oppure strettamente decrescente) in ogni punto $x_0 \in I$.

PUNTI DI ESTREMO LOCALE

Data una funzione reale $f: E \to \mathbb{R}$, abbiamo convenuto di chiamare <u>massimo della funzione</u> f (nell'insieme E) il massimo dell'insieme immagine $f(E)$, se questo esiste; abbiamo anche detto che in questo caso si suole parlare di <u>massimo assoluto</u> per distinguere questo concetto da un altro, quello di massimo relativo, che dobbiamo ancora introdurre.

Ovviamente l'esistenza o meno del massimo assoluto è una proprietà globale della funzione f. Se $M = \max_E f$ ogni punto $x^* \in E$ tale che $f(x^*) = M$ viene detto <u>punto di massimo assoluto</u> per f; in altre parole un punto $x^* \in E$ è un punto di massimo assoluto per f se

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in E .$$

Naturalmente, mentre il massimo M è unico, i punti di massimo assoluto possono essere più di uno; basti pensare, in proposito, alla funzione $\operatorname{sen} x$, il cui massimo assoluto, 1, viene preso in infiniti punti di $\mathbb{R}$: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Considerazioni del tutto analoghe valgono a proposito del concetto di minimo assoluto.

Possiamo adesso ad occuparci dei punti di estremo locale.

DEFINIZIONI 2. Sia $f: E \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale ($E \subseteq \mathbb{R}$). Si dice che un punto $x_0 \in E$ è un <u>punto di massimo relativo</u> (o anche un <u>punto di massimo locale</u>) per la funzione f se esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che

(3) $$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap E$$

(cioè x_0 è di massimo assoluto per la restrizione $f|_{U \cap E}$).

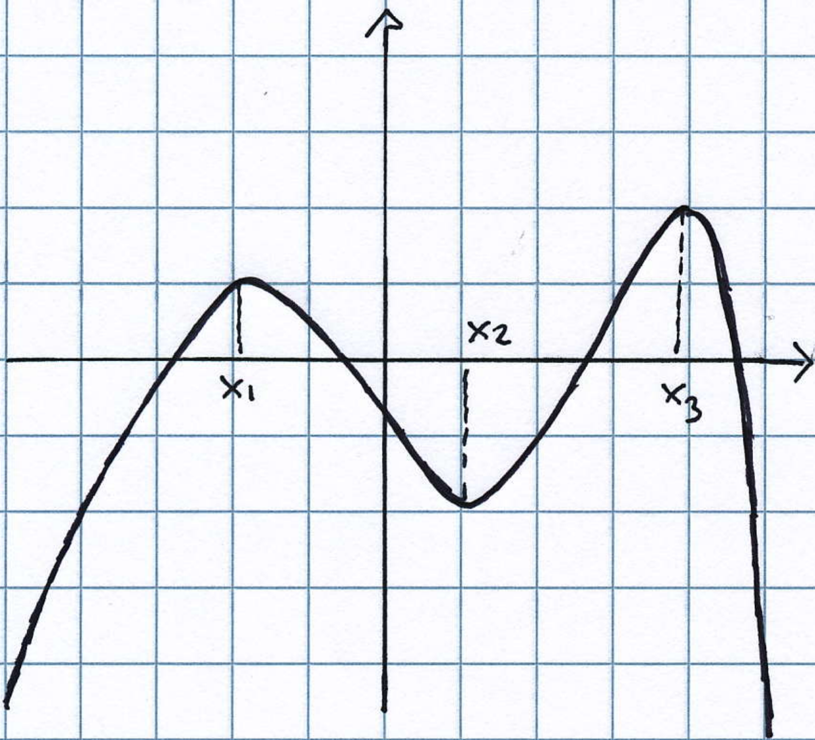
Analogamente, si dice che $x_0 \in E$ è un <u>punto di minimo relativo</u> per f se esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che

(3') $$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap E.$$

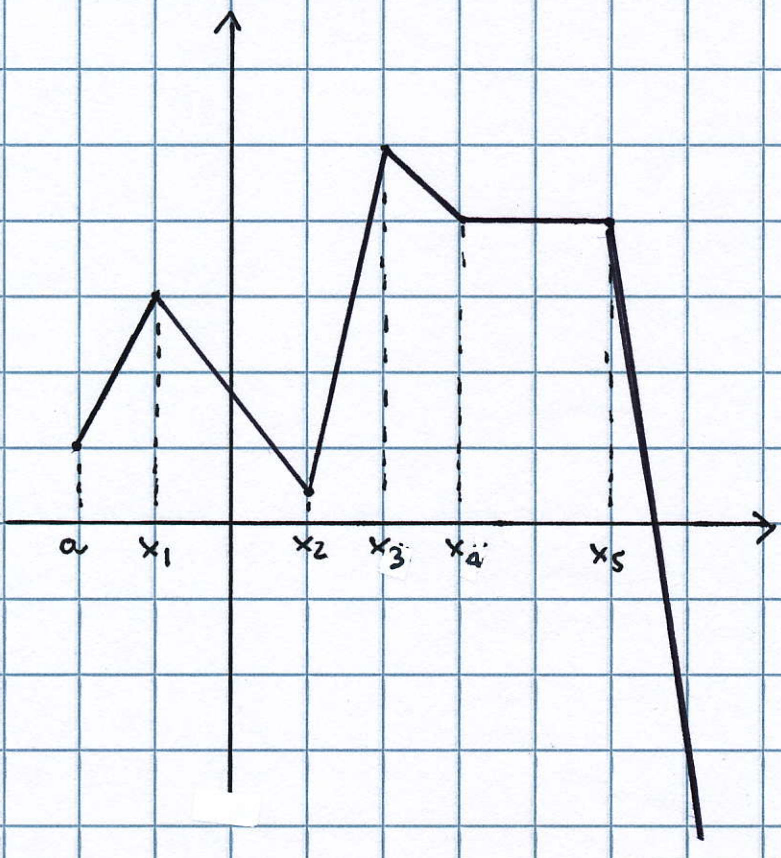
Un punto x_0, di massimo [risp. minimo] relativo per f, si dice <u>punto di massimo</u> [risp. <u>minimo</u>] <u>relativo proprio</u> se l'intorno $U \in \mathcal{U}(x_0)$ per cui è verificata la (3) [risp. la (3')] può essere scelto in modo tale che l'uguaglianza $f(x) = f(x_0)$ si abbia solamente quando $x = x_0$. In altre parole x_0 è un punto di massimo [risp. minimo] relativo proprio per f se esiste $V \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in V \cap E \setminus \{x_0\} \quad [\text{risp. } f(x) > f(x_0) \ \forall x \in V \cap E \setminus \{x_0\}].$$

È evidente che se x_0 è un punto di estremo (cioè di massimo o di minimo) assoluto per f, allora x_0 è anche un punto di estremo relativo per f (per verificare la definizione basta prendere $U = \mathbb{R}$) mentre, in generale, un punto di estremo relativo per f non è necessariamente un punto di estremo assoluto.



Ad esempio, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione il cui grafico è quello della figura accanto, i punti x_1 e x_3 sono entrambi di massimo relativo, ma solo x_3 è punto di massimo assoluto; il punto x_2 è un punto di minimo relativo, ma non di minimo assoluto (la funzione non ha punti di minimo assoluto in quanto non è limitata inferiormente).



ESEMPIO 3. Allo scopo di chiarire la differenza tra punto di estremo relativo proprio e non proprio e di mostrare che, secondo le definizioni date, una funzione può anche essere monotona in un punto di estremo relativo consideriamo la funzione $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ il cui grafico è mostrato accanto.

I punti di estremo relativo proprio sono: a e x_2 (punti di minimo relativo proprio); x_1 e x_3 (punti di massimo relativo proprio). I punti di estremo relativo, ma non di estremo relativo proprio, sono: x_4 (minimo), x_5 (massimo) e tutti i punti $c \in]x_4, x_5[$, i quali sono sia di massimo che di minimo relativo. Notiamo che x_3 è anche punto di massimo assoluto, mentre non vi sono punti di minimo assoluto.

Osserviamo ancora che vi sono alcuni punti di estremo relativo nei quali f è monotona, precisamente: il punto a, in cui f è strettamente crescente; i punti x_4 e x_5, nei quali f è decrescente (non strettamente); tutti i punti $c \in]x_4, x_5[$, nei quali f è sia crescente che decrescente.

ESERCIZIO 1. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathring{I}$. È possibile che f sia strettamente monotona in x_0 e, nel contempo, x_0 sia un punto di estremo relativo per f?

Anche i punti di estremo relativo, come quelli nei quali f è monotona, possono essere caratterizzati usando il rapporto incrementale. In questo caso però invece di semplificare le cose, passando da due condizioni a una sola, faremo il contrario. Ciò non di meno la caratterizzazione si rivelerà molto utile.

PROPOSIZIONE 2. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) abbia in $x_0 \in I$ un punto di massimo [risp. minimo] relativo è che esiste $\delta > 0$ tale che

$$(4)\quad \begin{cases} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \\ e \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\text{risp.} \quad (4') \quad \begin{cases} \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\cap I \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \\ \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\cap I \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{cases} \right].$$

Possiamo adesso dimostrare un'importante condizione necessaria affinché un punto x_0, interno all'intervallo I, sia di estremo relativo.

TEOREMA 4 (Teorema di FERMAT). Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$, supponiamo che $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ e che f sia derivabile nel punto x_0. Se x_0 è un punto di estremo relativo per f, allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Poiché il punto x_0 è interno all'intervallo I abbiamo che la derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è sia limite sinistro che limite destro, per $x \to x_0$, del rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Supponiamo, per fissare le idee, che il punto x_0 sia di massimo relativo per f. Esiste allora $\delta>0$ per cui è verificata la condizione (4). Passando al limite nelle due disuguaglianze della (4) otteniamo

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 ,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 ,$$

dunque concludiamo che è $f'(x_0)=0$.

OSSERVAZIONE 4. La condizione necessaria espressa dal Teorema 4 non è sufficiente; controesempio: la funzione x^3 è tale che $[Dx^3]_{x=0}=0$, ma il punto $x_0=0$ non è di estremo relativo.

OSSERVAZIONE 5. È utile osservare esplicitamente che il fatto che x_0 sia un punto di estremo relativo per f non implica nulla relativamente alla continuità di f in x_0. Controesempio: la funzione di Dirichlet $D(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ è discontinua in ogni punto $x_0\in\mathbb{R}$, pur avendo in x_0 un punto di estremo relativo (di minimo se $x_0\in\mathbb{Q}$, di massimo se $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

I TEOREMI DI ROLLE, DI CAUCHY E DI LAGRANGE.

Si tratta di tre teoremi importanti, soprattutto per le loro conseguenze, dell'Analisi Matematica. In ognuno di essi le funzioni considerate sono definite in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$.

TEOREMA 5 (Teorema di Rolle). <u>Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Supponiamo che f sia continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Supponiamo inoltre che sia $f(a)=f(b)$. Allora esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.</u>

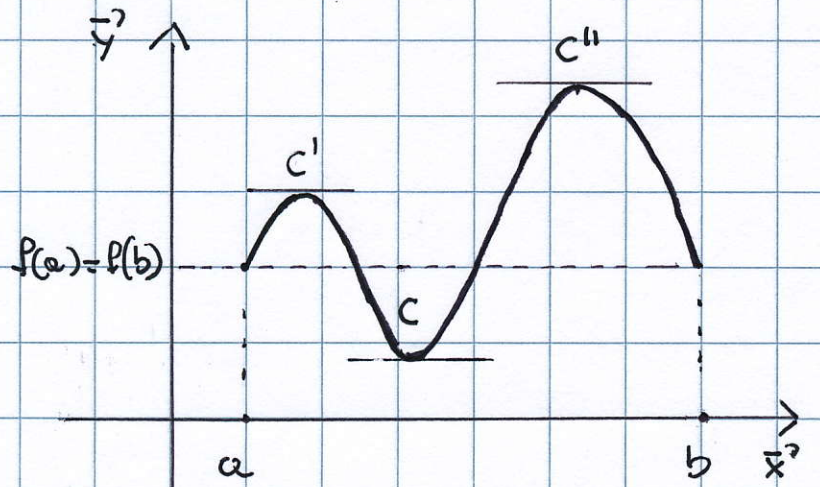
<u>Dimostrazione.</u> Come prima cosa notiamo che per il teorema di Weierstrass la funzione f, essendo continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, è dotata di minimo e di massimo assoluti. Esistono quindi $\bar{x},\bar{\bar{x}}\in[a,b]$ tali che

$$f(\bar{x})\leq f(x)\leq f(\bar{\bar{x}}) \qquad \forall x\in[a,b].$$

Premesso ciò, distinguiamo due casi.

1) <u>La funzione f è costante</u>. In questo caso si ha $f'(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$, quindi la tesi è verificata da qualunque punto $c\in]a,b[$.

2) <u>La funzione f non è costante</u>. Ne segue che è $f(\bar{x}) \neq f(\bar{\bar{x}})$ e quindi, per l'ipotesi $f(a) = f(b)$, almeno uno dei punti $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ deve appartenere all'intervallo aperto $]a,b[$. Supponiamo che sia $\bar{x} \in]a,b[$. Il punto $\bar{x}$ è allora un punto di minimo assoluto (e quindi di minimo relativo) interno all'intervallo $[a,b]$, nel quale la funzione f è derivabile. Sono così verificate, relativamente al punto $\bar{x}$, le ipotesi del teorema di Fermat. Ne segue che $f'(\bar{x}) = 0$, dunque la tesi è verificata con $c = \bar{x}$.



Il teorema di Rolle ha la seguente interpretazione geometrica: poiché $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto $C = (c, f(c))$, il teorema asserisce che, nelle ipotesi dichiarate, c'è almeno un punto $C = (c, f(c))$ del grafico, con $c \in]a,b[$, nel quale la retta tangente è parallela all'asse $\vec{x}$ (nel caso del grafico della figura di tali punti ve ne sono tre: C, C', C''; C e C'' sono quelli che si ottengono dalla precedente dimostrazione).

TEOREMA 6 (Teorema di Cauchy). <u>Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni definite in uno stesso intervallo chiuso e</u>

limitato $[a,b]$, entrambe continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Allora esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che

(5) $$[f(b)-f(a)]\,g'(c)=[g(b)-g(a)]\,f'(c).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$F(x)=[f(b)-f(a)]\,g(x)-[g(b)-g(a)]\,f(x)\quad\forall x\in[a,b].$$

Poiché F è una combinazione lineare delle due funzioni f e g, anche F è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e si ha:

$$F'(x)=[f(b)-f(a)]\,g'(x)-[g(b)-g(a)]\,f'(x)\quad\forall x\in]a,b[.$$

Risulta inoltre $F(a)=F(b)$ (eseguendo i calcoli e semplificando si trova infatti che

$$F(a)=f(b)\,g(a)-g(b)\,f(a)=F(b)).$$

La funzione F verifica pertanto le ipotesi del teorema di Rolle, dunque esiste $c\in]a,b[$ tale che $F'(c)=0$, cioè

$$[f(b)-f(a)]\,g'(c)-[g(b)-g(a)]\,f'(c)=0,$$

da cui la (5).

È utile esprimere la tesi del teorema di Cauchy in una forma in cui gli incrementi $f(b)-f(a)$ e $g(b)-g(a)$ stiano da una parte e le derivate $f'(c)$ e $g'(c)$ dall'altra. Bisogna allora imporre delle ipotesi che permettano di poter dividere la (5) per $g'(c)[g(b)-g(a)]$.

TEOREMA 6' (Seconda forma del teorema di Cauchy). Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Supponiamo inoltre che sia $g(b) \neq g(a)$ e che non vi sia alcun punto $\tilde{x} \in]a,b[$ tale che $f'(\tilde{x}) = g'(\tilde{x}) = 0$. Allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che [$g'(c) \neq 0$ e]

$$(5') \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 6 esiste $c \in]a,b[$ per cui è verificata la (5). Osserviamo che in tale punto c si ha necessariamente $g'(c) \neq 0$; infatti, se fosse $g'(c) = 0$, dato che $g(b)-g(a) \neq 0$, dalla (5) si ricaverebbe $f'(c) = 0$ e con ciò sarebbe contraddetta l'ipotesi che il sistema $f'(x) = g'(x) = 0$ non ha soluzioni. Possiamo quindi dividere la (5') per $g'(c)[g(b)-g(a)]$ ottenendo così la (5).

OSSERVAZIONE 6. Le ipotesi aggiuntive del Teorema 6' rispetto al Teorema 6 (cioè $g(b) \neq g(a)$

e $\nexists\ \tilde{x} \in]a,b[: f'(\tilde{x}) = g'(\tilde{x}) = 0$) sono certamente verificate se è $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a,b[$; infatti in questo caso non può essere $g(b) = g(a)$ perché altrimenti il teorema di Rolle implicherebbe l'esistenza di un punto $x^* \in]a,b[$ tale che $g'(x^*) = 0$.

TEOREMA 7 (Teorema di Lagrange). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che

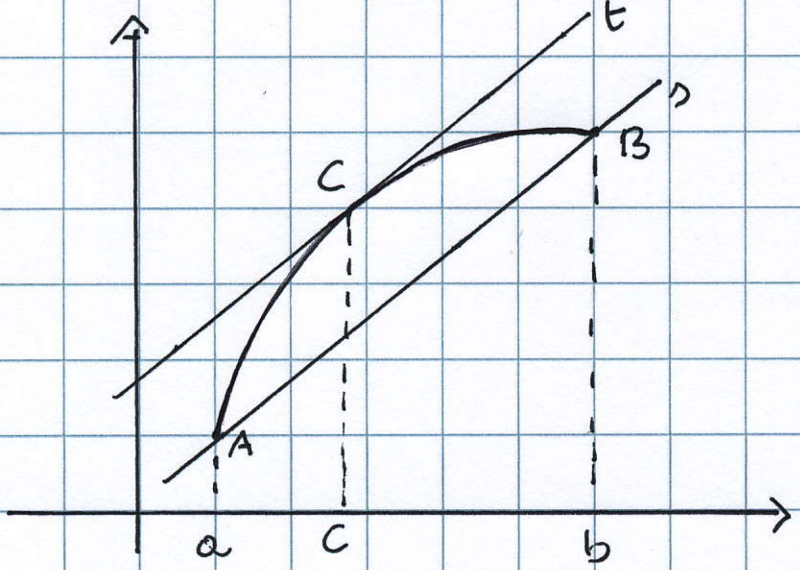
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{6}$$

Dimostrazione. Consideriamo oltre alla funzione f anche la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g(x) = x\ \forall x \in [a,b]$ (cioè $g = x|_{[a,b]}$). La funzione g è derivabile in tutto l'intervallo $[a,b]$ (e quindi anche continua in $[a,b]$) e risulta $g'(x) = Dx = 1 \neq 0\ \forall x \in [a,b]$. Conseguentemente la coppia di funzioni f e g verifica le ipotesi del Teorema 6' (si tenga presente l'Osservazione 6). Ne segue che esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1} \ ;$$

ciò completa la dimostrazione.

Anche il teorema di Lagrange è suscettibile di un'importante interpretazione geometrica. Poiché



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

è il coefficiente angolare della retta secante il grafico congiungente i punti A e B, corrispondenti agli estremi dello intervallo, e $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto $C=(c,f(c))$, il teorema di Lagrange assicura che, nelle ipotesi dichiarate, tra tutte le rette tangenti al grafico (in un punto corrispondente ad un valore dell'ascissa appartenente a $]a,b[$) ve ne è almeno una che è parallela alla secante congiungente A e B.

Per le successive applicazioni è utile riformulare il teorema di Lagrange nel modo seguente.

TEOREMA 7' (Riformulazione del teorema di Lagrange). Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo I (di qualsiasi tipo). Supponiamo che f sia continua in I e derivabile in $\mathring{I}$. Allora

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \quad \exists c \in]x_1, x_2[\text{ (dipendente da } x_1 \text{ e } x_2\text{)}:$$
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c).$$

Dimostrazione. Basta applicare, una volta fissati $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, il Teorema 7 alla restrizione $f|_{[x_1,x_2]}$.

Il teorema di Lagrange ha delle importanti conseguenze qui inglobate nel seguente corollario.

COROLLARIO 1 (Corollari del teorema di Lagrange).
Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo I, continua in I e derivabile in $\mathring{I}$ [1].
Valgono le seguenti implicazioni:
1) $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è costante in I;
2) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è crescente in I;
2') $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è strettamente crescente in I;
3) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è decrescente in I;
3') $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ è strettamente decrescente in I.

Dimostrazione. Proviamo la 1). Per il Teorema 7' per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0,$$

cioè $f(x_2) = f(x_1)$. Ciò prova che f è costante in I.
Proviamo la 2'). Dobbiamo provare che

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

---

[1] Ovviamente le ipotesi "f continua in I" e "f derivabile in $\mathring{I}$" sono soddisfatte se f è derivabile in tutto I.

E infatti applicando il Teorema 7' si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0\,,$$

cioè $f(x_2) > f(x_1)$.

In maniera analoga si provano le altre implicazioni.

OSSERVAZIONE 7. In tutte le implicazioni del precedente corollario è essenziale il fatto che il dominio della funzione f sia un intervallo. Infatti, ad esempio, la funzione

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

è tale che $D\frac{|x|}{x} = 0$ in ogni punto del suo dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ma non è vero che $\frac{|x|}{x}$ è costante in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Analogamente, la funzione $\frac{1}{x}$ è tale che $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$ in ogni punto del suo dominio, ma non è vero che $\frac{1}{x}$ è decrescente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

OSSERVAZIONE 8. È naturale chiedersi se le implicazioni del Corollario 1 possono essere invertite. La risposta è ovviamente affermativa per la 1) poiché la derivata di una funzione costante è la funzione identicamente nulla. Ma anche per la 2) (e analogamente per la 3)) la risposta è sì. Infatti, se f è crescente, allora per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale è tale che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in I \setminus \{x_0\} ,$$

da cui, passando al limite nella disuguaglianza, si ottiene $f'(x_0) \geq 0$. Possiamo quindi affermare che, nelle ipotesi del Corollario 1 (f continua in I e derivabile in $\mathring{I}$) si hanno le seguenti equivalenze:

I) f costante in $I \iff f'(x)=0 \ \forall x \in \mathring{I}$;

II) f crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathring{I}$;

III) f decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathring{I}$.

Invece le implicazioni 2') e 3') non possono essere invertite. Il controesempio ci viene fornito ancora una volta dalla funzione x^3, la quale è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma la cui derivata $3x^2$ si annulla per $x=0$.

Possiamo però caratterizzare le funzioni strettamente monotone (sempre, beninteso, nelle ipotesi del Corollario 1) nel modo seguente:

$$(\mathrm{II}') \quad f \text{ strettamente crescente in } I \iff \begin{cases} a) \ f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathring{I} \\ \quad e \\ b) \ \nexists\, J \subseteq I, \text{ intervallo, tale che } \\ \quad f'(x)=0 \ \forall x \in \mathring{J} . \end{cases}$$

e analogamente per la stretta decrescenza.

L'equivalenza (II') segue subito osservando che le due condizioni a) e b) equivalgono, rispettivamente, al fatto che f è crescente in I ed al fatto che f non è costante in nessun sottointervallo J di I.

ESEMPIO 4. Mostriamo con un esempio teorico come i risultati contenuti nel Corollario 1 si applicano in pratica per lo studio della monotonia di una funzione. Supponiamo che f sia una funzione continua nell'intervallo $I = (a,b)$ e che per la derivata $f'(x)$ si trovi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (& --- & 0 & +++ & 0 & +++ & \times & ---- & \times & --- & \times & +++ & 0 & --- &) \\ a & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & & x_6 & & b \end{array}$$

(la derivata $f'(x)$ si annulla nei punti x_1, x_2 e x_6, non esiste nei punti x_3, x_4 e x_5 e assume valori del segno mostrato in figura nei rimanenti punti di I).

Possiamo applicare il Corollario 1 alla restrizione di f ad ognuno degli intervalli $(a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_6, b)$. Otteniamo che:

- f è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $(a, x_1]$, $[x_3, x_4]$, $[x_4, x_5]$ e $[x_6, b)$;
- f è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ e $[x_5, x_6]$.

Ovviamente dal fatto che f è strettamente decrescente in $[x_3, x_4]$ e in $[x_4, x_5]$ segue che f è strettamente decrescente in $[x_3, x_5]$. Analogamente f è strettamente crescente in $[x_1, x_3]$.

Lo studio del segno di f' ci consente anche di trovare i punti di estremo relativo per f: x_1 è un punto di minimo relativo proprio per f (infatti si ha $f(x) > f(x_1)$ $\forall x \in (a, x_3] \setminus \{x_1\}$); analogamente x_5 è un punto di minimo relativo proprio, mentre x_3 e x_6 sono punti di massimo relativo proprio. Non vi sono altri punti di estremo relativo (in particolare si osservi che nel punto x_2 la funzione è strettamente crescente e nel punto x_4 strettamente decrescente).

TEOREMA 8 (Una condizione sufficiente affinché un punto sia di estremo relativo). <u>Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo I e derivabile due volte nel punto $x_0 \in I$. Supponiamo che risulti $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Allora il punto x_0 è di estremo relativo proprio per f, precisamente: di massimo se $f''(x_0) < 0$ e di minimo se $f''(x_0) > 0$.</u>

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che sia $f''(x_0) < 0$. Supponiamo inoltre, per fissare le idee, che x_0 sia un punto interno a I (il ragionamento si modifica in modo ovvio quando x_0 è uno degli estremi di I); esiste quindi $\delta_1 > 0$ tale che $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\subseteq I$.
Poiché $f''(x_0) < 0$ si ha (Teorema 1) che la funzione

f' è strettamente decrescente in x_0, cioè esiste $\delta_2>0$ tale che

$$\forall x \in \,]x_0-\delta_2, x_0[\,\cap I \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 ,$$

$$\forall x \in \,]x_0, x_0+\delta_2[\,\cap I \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 .$$

Indicato con δ il $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha che l'intervallo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ è contenuto in I ed il segno di f' in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ è

$$\begin{array}{ccccc}] & +\ +\ +\ + & 0 & -\ -\ -\ -\ - & [\\ x_0-\delta & & x_0 & & x_0+\delta \end{array} .$$

Applicando il Corollario 1 abbiamo allora che:

- f è strettamente crescente in $]x_0-\delta, x_0]$, quindi $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0[$;
- f è strettamente decrescente in $]x_0, x_0+\delta[$, quindi $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in \,]x_0, x_0+\delta[$.

In definitiva si ha:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\setminus \{x_0\} ,$$

cioè x_0 è un punto di massimo relativo proprio per f.

Con un ragionamento dello stesso genere si dimostra il

TEOREMA 9. <u>Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte nell'intervallo I e tre volte nel punto</u>

$x_0 \in I$. Supponiamo che risulti $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Allora la funzione f è strettamente monotona nel punto x_0, precisamente: crescente se $f'''(x_0) > 0$, decrescente se $f'''(x_0) < 0$.

ESERCIZIO 2. Dimostrare il Teorema 9 (Suggerimento: se $f'''(x_0) < 0$ si ha, per il Teorema 8, che x_0 è un punto di massimo relativo proprio per f', cioè esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0;$$

ne segue che ...).

I Teoremi 8 e 9 sono casi particolari del

TEOREMA 10. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n-1$ volte nell'intervallo I e n volte nel punto $x_0 \in I$ $(n \geq 2)$. Supponiamo che $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora si hanno le seguenti conclusioni:

1) se n è pari il punto x_0 è un punto di estremo relativo proprio per f (di massimo se $f^{(n)}(x_0) < 0$, di minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$);

2) se n è dispari la funzione f è strettamente monotona nel punto x_0 (crescente se $f^{(n)}(x_0) > 0$, decrescente se $f^{(n)}(x_0) < 0$).