

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	COGNOME e NOME:	
Facoltà di Ingegneria	FIRMA:	
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	MATRICOLA:	
C.D.L. IN INGEGNERIA INDUSTRIALE (A-SALA)	REGOLARITÀ STUDI:	<input type="checkbox"/> In Regola <input type="checkbox"/> Ripetente <input type="checkbox"/> Fuori Corso
Anno Accademico 2011/2012	PROGRAMMA DEL PROF.:	
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1 DEL 17/02/2012	CORSO SEGUITO NELL'A.A.:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno però consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 → 30/30 e lode.

**Quesiti (svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati)**

1) Il dominio della funzione reale  $f$  di una variabile reale definita dalla posizione

$$f(x) = \sqrt{\arcsin(e^{3x} - 1)}$$

è

- a)  $[0, +\infty[$ ;
- b)  $] -\infty, \frac{1}{3} \log 2[$ ;
- c)  $[0, \log \sqrt[3]{2}]$ ;
- d)  $] \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \log 2]$ .

2) Siano  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . La negazione della frase “ $\forall x \in [0, +\infty[ \exists z \in [x, x+1[ : g(z) > f(x)$ ” è

- a) “ $\forall x \in [0, +\infty[ \exists z \in [x, x+1[ : g(z) \leq f(x)$ ”;
- b) “ $\forall x \in [0, +\infty[ , \forall z \in [x, x+1[ \implies g(z) \leq f(x)$ ”;
- c) “ $\exists x \in [0, +\infty[ : \forall z \in [x, x+1[ \implies g(z) \leq f(x)$ ”;
- d) “ $\exists x \in [0, +\infty[ , \exists z \in [x, x+1[ : g(z) \leq f(x)$ ”.

3) Siano  $a \in \mathbb{R}$  un parametro reale ed  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} -2^x & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x = 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a)  $f$  è continua se e solo se  $a = -2$ ;
- b) esistono infiniti valori di  $a$  per i quali il punto  $x_0 = 1$  è un punto di massimo locale;
- c) non esiste alcun valore di  $a$  per il quale  $f$  è iniettiva;
- d)  $\exists a \in \mathbb{R}$  ed  $\exists b \in \mathbb{R}, b > 1$  tali che  $f$  è monotona in  $] -\infty, b]$ .

4) Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali positivi. La condizione  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

- a) è necessaria e sufficiente,
- b) è necessaria ma non sufficiente,
- c) è sufficiente ma non necessaria,
- d) non è né necessaria né sufficiente,

affinchè la serie di termine generale  $a_n$  sia convergente.

5) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera ?

- a)  $f$  ha nel punto  $x_0 = 0$  una discontinuità di prima specie ;
- b)  $f$  è continua nel punto  $x_0 = 0$  ma non è derivabile in tale punto ;
- c) nel punto  $x_0 = 0$  esiste la derivata prima ma non la derivata seconda di  $f$  ;
- d) esiste la derivata seconda  $f''(0)$  .

6) L'integrale  $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \sin x^3 dx$  è uguale a

- a) 0 ;
- b)  $\frac{2}{3}$  ;
- c)  $-\frac{2}{3}$  ;
- d)  $\frac{2}{3}\pi$  .

**Esercizi** ( *svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30* )

1) Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \arctan \frac{2n}{n^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

2) Determinare tutti i valori del parametro reale  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha - 5) \sqrt[3]{n^{2\alpha+1} + 1}}{n^2 + 3}.$$

3) Studiare la funzione reale  $f$  di una variabile reale definita dalla posizione

$$f(x) = \log \frac{2 - x}{(x - 3)^2},$$

provando, in particolare, che non vi sono asintoti obliqui e che vi è un solo punto di flesso, e disegnarne un grafico qualitativo.

**Definizioni** ( *dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata* )

1) Definizione di funzione continua in un punto.

2) Definizione di funzione reale (definita in un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ ) strettamente concava.

3) Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  dicesi di frontiera per un un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}$  quando . . . .

**Teoremi** ( *dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette* )

1) Teorema dell'unicità del limite.

2) Compattezza dell'immagine degli insiemi compatti mediante una funzione continua.

3) Teorema di Rolle.