FORMULAZIONI EQUIVALENTI DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE DI UNA FUNZIONE

RIPRENDIAMO IN ESAME LA DEFINIZIONE DI LIMITE DI UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE COSÌ COME È STATA DATA NELLE LEZIONI PRECEDENTI.

DEFINIZIONE 1 (LIMITE DI UNA FUNZIONE). DATA UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE $f : A (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ E DATI $c \in \overline{D A}$ E $L \in \overline{\mathbb{R}}$ SI DICE CHE

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

SE ACCADE CHE

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{U}(L) \ \exists V \in \mathcal{U}(c) : \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in U .$$

OVVIAMENTE, DATO CHE c E L APPARTENGONO ENTRAMBI A $\overline{\mathbb{R}}$, LE FAMIGLIE DEGLI INTORNI $\mathcal{U}(L)$ E $\mathcal{U}(c)$ CONSIDERATE NELLA (1) SONO LE FAMIGLIE DEGLI INTORNI NELLO SPAZIO METRICO $\overline{\mathbb{R}}$. EVIDENZIAMO QUESTO FATTO DENOTANDO TALI FAMIGLIE CON $\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(L)$ E $\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(c)$ E RISCRIVENDO LA (1) NELLA FORMA

$$(1_{\overline{\mathbb{R}}}) \quad \forall U \in \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(L) \ \exists V \in \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(c) : \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in U .$$

OSSERVIAMO D'ALTRA PARTE CHE, ESSENDO f UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE ($A \subseteq \mathbb{R}$ E $f(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in A$), NELLA $(1_{\overline{\mathbb{R}}})$ L'INSIEME

$V\cap A\setminus\{c\}$ È UGUALE ALL'INSIEME $(V\cap\mathbb{R})\cap A\setminus\{c\}$

E L'AFFERMAZIONE "$f(x)\in U$" HA ESATTAMENTE LO STESSO SIGNIFICATO DI "$f(x)\in U\cap\mathbb{R}$", DUNQUE LA $(1_{\overline{\mathbb{R}}})$ PUO' ESSERE RISCRITTA NELLA FORMA EQUIVALENTE

$$\forall U\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(L)\ \exists V\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(c) : \forall x\in(V\cap\mathbb{R})\cap A\setminus\{c\} \Rightarrow f(x)\in U\cap\mathbb{R}$$

OVVERO ANCORA NELLA FORMA

$$(1') \quad \forall U'\in\mathcal{U}'(L)\ \exists V'\in\mathcal{U}'(c) : \forall x\in V'\cap A\setminus\{c\} \Rightarrow f(x)\in U',$$

DOVE $\mathcal{U}'(L)$ INDICA LA FAMIGLIA DI TUTTE LE INTERSEZIONI DEL TIPO $U\cap\mathbb{R}$ CON $U\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(L)$:

$$\mathcal{U}'(L) = \{U\cap\mathbb{R} : U\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(L)\}$$

(DUNQUE $\mathcal{U}'(L)$ È UNA FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$) E, ANALOGAMENTE,

$$\mathcal{U}'(c) = \{V\cap\mathbb{R} : V\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(c)\}.$$

A QUESTO PUNTO RICORDIAMO CHE SE $z\in\mathbb{R}$ LA FAMIGLIA $\mathcal{U}'(z) = \{U\cap\mathbb{R} : U\in\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(z)\}$ È ESATTAMENTE LA FAMIGLIA $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(z)$ DEGLI INTORNI DI z NELLO SPAZIO METRICO $\mathbb{R}$. SE $z=+\infty$ NON HA PIÙ SENSO PARLARE DI "FAMIGLIA DEGLI INTORNI DI $+\infty$ NELLO SPAZIO METRICO $\mathbb{R}$" DATO CHE

$+\infty$ NON È UN ELEMENTO DI $\mathbb{R}$. TUTTAVIA NULLA CI VIETA DI ADOTTARE LA CONVENZIONE DI CHIAMARE LA FAMIGLIA

$$\mathcal{U}'(+\infty) = \{U \cap \mathbb{R} : U \in \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)\}$$

"FAMIGLIA DEGLI INTORNI DI $+\infty$ IN $\mathbb{R}$" E DI INDICARLA CON IL SIMBOLO $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(+\infty)$. SE ADOTTIAMO UN'ANALOGA CONVENZIONE PER $\mathcal{U}'(-\infty)$ LA (1') PUO' ESSERE RISCRITTA, IN MANIERA DEL TUTTO EQUIVALENTE, COME

$$(1_{\mathbb{R}}) \quad \forall U' \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(L) \ \exists V' \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(c) : \forall x \in V' \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in U'.$$

PERTANTO CON LE CONVENZIONI SOPRA ADOTTATE (A PROPOSITO DI $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(+\infty)$ E $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(-\infty)$) ABBIAMO CHE:

<u>LA DEFINIZIONE</u> (1) <u>HA ESATTAMENTE LO STESSO SIGNIFICATO SIA CHE</u> $\mathcal{U}(L)$ <u>E</u> $\mathcal{U}(c)$ <u>ABBIANO IL SIGNIFICATO DI FAMIGLIE DEGLI INTORNI NELLO SPAZIO METRICO</u> $\overline{\mathbb{R}}$, <u>SIA CHE</u> $\mathcal{U}(L)$ <u>E</u> $\mathcal{U}(c)$ <u>ABBIANO IL SIGNIFICATO DI FAMIGLIE DEGLI INTORNI IN</u> $\mathbb{R}$.

SARÀ QUINDI DEL TUTTO INDIFFERENTE LEGGERE LA (1), A SECONDA DELLA CONVENIENZA, NELL'UNO O NELL'ALTRO MODO. NEL SEGUITO, SALVO AVVISO IN CONTRARIO,

LEGGEREMO LA (1) INTENDENDO CHE $\mathcal{U}(L)$ E $\mathcal{U}(c)$ SONO LE FAMIGLIE DEGLI INTORNI IN $\overline{\mathbb{R}}$.

È UTILE OSSERVARE ESPLICITAMENTE CHE, ESSENDO $\mathcal{U}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ LA FAMIGLIA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\overline{\mathbb{R}}$ CHE CONTENGONO UN INSIEME DEL TIPO $]a,+\infty[\,\cup\{+\infty\}$, CON $a\in\mathbb{R}$, SI HA, DI CONSEGUENZA, CHE $\mathcal{U}(+\infty)=\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(+\infty)$ È LA FAMIGLIA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ CHE CONTENGONO UN INTERVALLO DEL TIPO $]a,+\infty[$, CON $a\in\mathbb{R}$. ANALOGAMENTE $\mathcal{U}(-\infty)=\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(-\infty)$ È LA FAMIGLIA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ CHE CONTENGONO UN INTERVALLO DEL TIPO $]-\infty,b[$, CON $b\in\mathbb{R}$.

RICORDIAMO CHE, SE $f: A(\subseteq\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ E $c\in\mathcal{D}A$, LA FRASE "f HA LA PROPRIETÀ P <u>DEFINITIVAMENTE</u> PER $x\to c$" SIGNIFICA CHE

$$\exists V\in\mathcal{U}(c)\;[=\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(c)]\;:\; f|_{A\cap V\setminus\{c\}} \text{ HA LA PROPRIETÀ } P.$$

QUINDI, AD ESEMPIO, DIRE CHE "f È CRESCENTE DEFINITIVAMENTE PER $x\to c$" SIGNIFICA DIRE CHE "ESISTE UN INTORNO $V\in\mathcal{U}(c)$ TALE CHE LA RESTRIZIONE

$f|_{V \cap A \setminus \{c\}}$ È UNA FUNZIONE CRESCENTE".

ADOTTANDO QUESTA TERMINOLOGIA LA DEFINIZIONE (1) PUÒ LEGGERSI NEL MODO SEGUENTE:

(2) COMUNQUE SI PRENDA UN INTORNO $U \in \mathcal{U}(L)$ L'INSIEME IMMAGINE DELLA FUNZIONE f È ~~DEFINITIVAMENTE~~ CONTENUTO IN U DEFINITIVAMENTE PER $x \to c$.

LA DEFINIZIONE (1) FA RIFERIMENTO PER ENTRAMBI GLI ELEMENTI L E C ALLE CORRISPONDENTI FAMIGLIE DEGLI INTORNI. È PERÒ POSSIBILE, COSÌ COME SI È VISTO PER LE SUCCESSIONI, SCRIVERE LA (1) IN UNA FORMA EQUIVALENTE CHE USA, ANZICHÉ LE FAMIGLIE DEGLI INTORNI, DELLE DISUGUAGLIANZE. PER FARE QUESTO OCCORRE PERÒ PRECISARE PRIMA, PER OGNUNO DEGLI ELEMENTI L E C, SE SI TRATTA DI UN NUMERO REALE OPPURE DI $+\infty$ OPPURE DI $-\infty$, DATA LA DIVERSA NATURA DELLA FAMIGLIA DEGLI INTORNI. VI SONO PERTANTO, NELLA FORMULAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE MEDIANTE DISUGUAGLIANZE, $3 \times 3 = 9$ CASI DA CONSIDERARE.

AD ESEMPIO, NEL CASO IN CUI L E c SONO ENTRAMBI NUMERI REALI, LA (1) EQUIVALE A

$$(3) \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon .$$

VERIFICHIAMO L'EQUIVALENZA $(1) \Leftrightarrow (3)$.

PROVIAMO CHE $(1) \Rightarrow (3)$. FISSATO UN QUALUNQUE $\varepsilon>0$, OSSERVIAMO CHE L'INTERVALLO $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ APPARTIENE A $\mathcal{U}(L)$; PERTANTO, PER L'IPOTESI (1), ESISTE UN INTORNO $V \in \mathcal{U}(c)$ TALE CHE

$\forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, CIOÈ

$\forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$. MA, ESSENDO $V \in \mathcal{U}(c)$, ESISTE $\delta>0$ TALE CHE $V \supseteq]c-\delta, c+\delta[$.

PERTANTO SI HA:

$$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap A \setminus \{c\} \Rightarrow x \in V \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon ,$$

DUNQUE È VERA LA (3).

PROVIAMO CHE $(3) \Rightarrow (1)$. FISSIAMO UN QUALUNQUE INTORNO $U \in \mathcal{U}(L)$. ESISTE ALLORA $\varepsilon>0$ TALE CHE $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\subseteq U$. IN CORRISPONDENZA DI TALE ε, PER L'IPOTESI (3), ESISTE $\delta>0$ TALE CHE

$$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\subseteq U .$$

A QUESTO PUNTO, PER VERIFICARE LA VALIDITA' DELLA (1), BASTA CONSIDERARE COME INTORNO $V \in \mathcal{U}(c)$ L'INTORNO CIRCOLARE $]c-\delta, c+\delta[$.

CONSIDERIAMO ANCORA, A TITOLO ESPLICATIVO, ALCUNI DEGLI ALTRI 8 CASI POSSIBILI.

SE $c \in \mathbb{R}$ E $l = -\infty$ LA (1) EQUIVALE A

$$(4)\quad \forall K>0 \ \exists \delta>0 : \forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) < -K .$$

L'EQUIVALENZA (1) $\Leftrightarrow$ (4) SI DIMOSTRA CON UN RAGIONAMENTO DEL TUTTO ANALOGO A QUELLO SVOLTO PRIMA TENENDO PRESENTE CHE UN INSIEME $U \subseteq \mathbb{R}$ APPARTIENE A $\mathcal{U}(-\infty)$ SE E SOLTANTO SE U CONTIENE UN INTERVALLO DEL TIPO $]-\infty, -K[$, CON $K>0$.

SE $c = -\infty$ E $l = +\infty$ LA (1) EQUIVALE A

$$(5)\quad \forall K>0 \ \exists h>0 : \forall x \in]-\infty, -h[\cap A \Rightarrow f(x) > K$$

(NOTIAMO CHE IN QUESTO CASO ABBIAMO POTUTO SCRIVERE $x \in]-\infty, -h[\cap A$ INVECE DI $x \in]-\infty, -h[\cap A \setminus \{-\infty\}$ POICHÉ GLI INSIEMI $]-\infty, -h[\cap A$ E $]-\infty, -h[\cap A \setminus \{-\infty\}$ SONO UGUALI).

INVITIAMO LO STUDENTE A SCRIVERE LE FORMULAZIONI EQUIVALENTI DELLA (1) IN TUTTI GLI

ALTRI (SEI) CASI RIMANENTI E A VERIFICARE ALCUNE DI TALI EQUIVALENTE.

OSSERVIAMO ANCORA CHE, OLTRE ALLE FORMULAZIONI EQUIVALENTI DELLA (1) CHE ADOPERANO SOLO DISUGUAGLIANZE, VI SONO ANCHE LE FORMULAZIONI EQUIVALENTI DI TIPO "MISTO", CIOÈ SI ADOPERA LA FAMIGLIA DEGLI INTORNI PER UNO DEGLI ELEMENTI C E L E LA DISUGUAGLIANZA PER L'ALTRO.

AD ESEMPIO, SE C E L APPARTENGONO ENTRAMBI A $\mathbb{R}$ LA (1) PUÒ SCRIVERSI ANCHE

$$(3') \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists V\in\mathcal{U}(c) : \forall x\in V\cap A\setminus\{c\} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

OPPURE

$$(3'') \quad \forall U\in\mathcal{U}(l) \ \exists \delta>0 : \forall x\in\,]c-\delta, c+\delta[\, \cap A\setminus\{c\} \Rightarrow f(x)\in U.$$

DI PARTICOLARE UTILITÀ, SIA NELLO SVILUPPO DELLA TEORIA CHE NEGLI ESERCIZI, SONO LE FORMULAZIONI DEL TIPO (3') (DISUGUAGLIANZA PER L E FAMIGLIA DEGLI INTORNI PER C).