Università degli Studi di Catania

A.A. 2014-2015

Corso di laurea in **Ingegneria Industriale**

Corso di Analisi Matematica I

(Proff. A.Villani, R. Cirmi, F. Faraci)

Elenco delle dimostrazioni che possono essere richieste nella seconda prova scritta

• Le equazioni $q^2 = 2$, $q^2 = 3$, $q^2 = \frac{2}{3}$ (e simili) non hanno soluzioni nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

• Formule di De Morgan.

• Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

• Teorema sulle radici n-esime di un numero complesso.

• Teorema sull'iniettività delle funzioni strettamente monotòne e relativo controesempio.

• Caratterizzazione dei punti di accumulazione (un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è di accumulazione per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se e soltanto se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X).

• Teorema di Bolzano-Weierstrass.

• Unicità del limite.

• Teorema della permanenza del segno e sua generalizzazione.

• Teoremi che mettono in relazione la regolarità e la limitatezza (inferiore e/o superiore) di una successione.

• Giustificazione, tramite opportuni esempi, dell'affermazione: "$(+\infty) + (-\infty)$ è una forma indeterminata".

• Teoremi sul limite della successione prodotto di due successioni convergenti.

• Teoremi del confronto per l'esistenza del limite (casi della convergenza e della divergenza a $\pm\infty$).

• Teorema sui limiti delle successioni monotòne.

• Limiti delle funzioni esponenziale a^x, logaritmo $\log_a x$ e potenza x^p.

• Il limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste (e non esistenza di limiti analoghi).

• Disuguaglianza di Bernoulli.

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ $(a > 1,\ p > 0)$.

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ p > 0)$.

- Continuità della funzione $\operatorname{sen} x$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.
- $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- Teorema dell'esistenza degli zeri.
- L'immagine di un intervallo mediante una funzione continua, non costante, è un intervallo.
- Il teorema di Weierstrass: una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo assoluti.
- Teorema di Cantor sull'uniforme continuità.
- Un esempio di funzione continua in un intervallo limitato, non chiuso, che non è uniformemente continua in tale intervallo.
- Un esempio di funzione continua in un intervallo chiuso, non limitato, che non è uniformemente continua in tale intervallo.
- Teorema: Una funzione lipschitziana è anche uniformemente continua. Relativo controesempio.
- Studio completo della serie geometrica.
- Condizione necessaria per la convergenza di una serie.
- Le serie a termini non negativi sono regolari.
- La serie armonica è divergente.
- Criterio del confronto per le serie a termini non negativi.
- Criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.
- Criterio di condensazione per le serie a termini positivi.
- Studio completo della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
- Una serie assolutamente convergente è anche convergente.
- Studio completo della serie logaritmica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$.
- Derivata di a^x.
- Derivata di $\operatorname{sen} x$.
- La derivabilità implica la continuità.
- Esempi (almeno due, di natura diversa) di funzioni continue in un punto e non derivabili in tale punto.
- Teorema sulla derivata della funzione prodotto.
- Teorema di derivazione delle funzioni composte.
- Derivata di $\operatorname{arctg} x$.
- Teorema di Férmat.
- Teorema di Rolle.

- Teorema di Cauchy.
- Teorema di Lagrange.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni costanti in un intervallo.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni monotòne (rispettivamente fortemente monotòne) in un intervallo.
- Il primo teorema di De L'Hôpital, per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, nel caso del limite finito.
- Controesempi ai teoremi di De L'Hôpital (l'esistenza del limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non implica l'esistenza del limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).
- Corollario del primo teorema di De L'Hôpital sul limite del rapporto incrementale.
- Derivata di $\operatorname{arcsen} x$.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia convessa nell'intervallo I è che per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sia crescente nell'insieme $I \setminus \{x_0\}$.
- Proprietà degli insiemi delle somme inferiori e superiori relative ad una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Esempio di funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non integrabile secondo Riemann.
- Teorema della media per l'integrale di Riemann
- Integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue.
- Teorema sulla struttura dell'integrale indefinito (se F è una primitiva della funzione f nell'intervallo I, allora tutte e sole le primitive di f ...).
- Una funzione con un punto di discontinuità di prima specie non ha primitive.
- Prima formula di integrazione indefinita per sostituzione.
- Calcolo dell'integrale indefinito $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Formula fondamentale del calcolo integrale.
- Esempio di funzione non continua dotata di primitive.