Università degli Studi di Catania

A.A. 2013-2014

Corso di laurea in **Ingegneria Industriale**

Corsi di Analisi Matematica I

(Proff. A.Villani e F. Faraci)

Elenco delle dimostrazioni che possono essere richieste nella seconda prova scritta

- Le equazioni $q^2 = 2$, $q^2 = 3$, $q^2 = \frac{2}{3}$ (e simili) non hanno soluzioni nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.
- Formule di De Morgan.
- Completezza di $\mathbb{R}$.
- Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
- Teorema sulle radici n-esime di un numero complesso.
- Teorema sull'iniettività delle funzioni strettamente monotòne e relativo controesempio.
- Caratterizzazione dei punti di accumulazione (in uno spazio metrico (S, d) un punto $x_0 \in S$ è di accumulazione per un insieme $E \subseteq S$ se e soltanto se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di E).
- Teorema di Bolzano-Weierstrass.
- Unicità del limite.
- Teorema della permanenza del segno e sua generalizzazione.
- Teoremi che mettono in relazione la regolarità e la limitatezza (inferiore e/o superiore) di una successione.
- Giustificazione, tramite opportuni esempi, dell'affermazione: "$(+\infty) + (-\infty)$ è una forma indeterminata".
- Teorema sul limite della successione prodotto di due successioni convergenti.
- Teoremi del confronto per l'esistenza del limite (casi della convergenza e della divergenza a $\pm\infty$).
- Teorema sul limite della funzione composta (sotto opportune ipotesi da $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{y \to \ell} g(y) = L$ segue che $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = L$).
- Controesempio relativo al teorema sul limite della funzione composta (che fa vedere come l'ipotesi "$f(x) \neq \ell$ definitivamente per $x \to x_0$" sia essenziale in tale teorema).
- Teorema sui limiti delle successioni monotòne.

• Limiti delle funzioni esponenziale a^x, logaritmo $\log_a x$ e potenza x^p.

• Il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste (e non esistenza di limiti analoghi).

• Disuguaglianza di Bernoulli.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \ (a > 1,\ p > 0)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0 \ (a > 0,\ a \neq 1,\ p > 0)$.

• Continuità della funzione $\operatorname{sen} x$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

• Teorema "ponte" tra limiti delle funzioni e limiti delle successioni.

• Ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

• Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

• Teorema dell'esistenza degli zeri.

• L'immagine di un intervallo mediante una funzione continua, non costante, è un intervallo.

• In uno spazio metrico (S, d) un insieme $E \subseteq S$ è chiuso se e soltanto se $\partial E \subseteq E$.

• In un qualunque spazio metrico un insieme sequenzialmente compatto è chiuso e limitato.

• In $\mathbb{R}$ un insieme chiuso e limitato è sequenzialmente compatto.

• Il teorema di Weierstrass: una funzione reale continua in un insieme sequenzialmnte compatto ha massimo e minimo assoluti.

• Un esempio di funzione continua in un intervallo limitato, non chiuso, che non è uniformemente continua in tale intervallo.

• Un esempio di funzione continua in un intervallo chiuso, non limitato, che non è uniformemente continua in tale intervallo.

• Teorema: "Una funzione lipschitziana è anche uniformemente continua" e relativo controesempio.

• Studio completo della serie geometrica.

• Condizione necessaria per la convergenza di una serie.

• Le serie a termini non negativi sono regolari.

• La serie armonica è divergente.

• Criterio del confronto per le serie a termini non negativi.

• Criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

• Criterio di condensazione per le serie a termini positivi.

- Studio completo della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
- Una serie assolutamente convergente è anche convergente.
- La serie $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$ converge ed ha somma uguale a zero; essa ha inoltre riordinamenti convergenti con somma sia positiva che negativa.
- Derivata di a^x.
- Derivata di $\operatorname{sen} x$.
- La derivabilità implica la continuità.
- Esempi (almeno due, di natura diversa) di funzioni continue in un punto e non derivabili in tale punto.
- Teorema sulla derivata della funzione prodotto.
- Teorema di derivazione delle funzioni composte.
- Derivata di $\operatorname{arctg} x$.
- Teorema di Férmat.
- Teorema di Rolle.
- Teorema di Cauchy.
- Teorema di Lagrange.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni costanti in un intervallo.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni monotòne (rispettivamente strettamente monotòne) in un intervallo.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia strettamente crescente nell'intervallo I è che risulti $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ e non esista alcun intervallo $J \subseteq I$ per il quale si abbia $f'(x) = 0$ $\forall x \in J$.
- Il primo teorema di De L'Hôpital, per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, nel caso del limite finito.
- Controesempi ai teoremi di De L'Hôpital (l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non implica l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).
- Corollario del primo teorema di De L'Hôpital sul limite del rapporto incrementale.
- Derivata di $\operatorname{arcsen} x$.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia convessa nell'intervallo I è che per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sia crescente nell'insieme $I \setminus \{x_0\}$.
- Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, convessa nell'intervallo I, è continua in $\mathring{I}$.
- Gli insiemi numerici delle somme inferiori e superiori relative ad una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono separati.
- Esempio di funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non integrabile secondo Riemann.
- Teorema della media per l'integrale di Riemann.
- Integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue.

- Integrabilità secondo Riemann delle funzioni monotòne.
- Teorema sulla struttura dell'integrale indefinito (se F è una primitiva della funzione f nell'intervallo I, allora tutte e sole le primitive di f ...).
- Una funzione con un punto di discontinuità di prima specie non ha primitive.
- Prima formula di integrazione indefinita per sostituzione.
- Calcolo dell'integrale indefinito $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Formula fondamentale del calcolo integrale.
- Esempio di funzione non continua dotata di primitive.