Università degli Studi di Catania
A.A. 2012-2013

Corso di laurea in **Ingegneria Industriale**

Corso di Analisi Matematica I (A-E)
(Prof. A.Villani)

Elenco delle dimostrazioni che possono essere richieste nella seconda prova scritta

• Segno del trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$.

• Le equazioni $q^2 = 2$, $q^2 = 3$, $q^2 = \frac{2}{3}$ (e simili) non hanno soluzioni nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

• Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione.

• Formule di De Morgan.

• Equivalenza, in un insieme parzialmente ordinato $(S, \leq)$, delle due condizioni: "Ogni insieme $X \subseteq S$, $X \neq \emptyset$, limitato superiormente ha l'estremo superiore" e "Ogni inseme $Y \subseteq S$, $Y \neq \emptyset$, limitato inferiormente ha l'estremo inferiore".

• Completezza di $\mathbb{R}$.

• Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

• Teorema sulle radici n-esime di un numero complesso.

• Una funzione strettamente monotòna f è iniettiva e la funzione inversa f^{-1} è strettamente monotòna dello stesso tipo di f.

• Un esempio di funzione reale di una variabile reale che è iniettiva ma non è strettamente monotòna.

• Equivalenza tra la definizione di limite espressa con il "linguaggio degli intorni" e la definizione di limite espressa con il "linguaggio dei numeri" (in tutti i casi possibili).

• Caratterizzazione dei punti di accumulazione (un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è di accumulazione per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se e soltanto se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di X).

• Teorema di Bolzano-Weierstrass.

• Unicità del limite.

• Teorema della permanenza del segno e sua generalizzazione.

• L'implicazione "convergenza $\Longrightarrow$ locale limitatezza" ed un esempio di funzione convergente per $x \to x_0$, che non è globalmente limitata.

• Teoremi sul limite della funzione somma.

• Giustificazione, tramite opportuni esempi, dell'affermazione: "$(+\infty) + (-\infty)$ è una forma indeterminata".

- Teoremi sul limite della funzione prodotto.
- Teoremi sul limite della funzione reciproca $\frac{1}{g}$.
- Teorema del confronto per l'esistenza del limite (caso della convergenza e della divergenza a $\pm\infty$).
- Teorema sul limite della funzione composta (sotto opportune ipotesi da $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{y\to\ell} g(y) = L$ segue che $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$).
- Controesempio relativo al teorema sul limite della funzione composta (che fa vedere come l'ipotesi "$f(x) \neq \ell$ definitivamente per $x \to x_0$" sia essenziale in tale teorema).
- Teorema sui limiti delle funzioni monotòne.
- Limiti delle funzioni esponenziale a^x, logaritmo $\log_a x$ e potenza x^p.
- Teorema sul limite della restrizione.
- Corollario: criterio di non esistenza del limite.
- Il limite $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste (e non esistenza di limiti analoghi).
- Disuguaglianza di Bernoulli.
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ $(a > 1,\, p > 0)$.
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$ $(a > 0,\, a \neq 1,\, p > 0)$.
- Continuità della funzione $\operatorname{sen} x$.
- $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Una successione convergente è limitata.
- Teorema "ponte" tra limiti delle funzioni e limiti delle successioni.
- Una successione $\{a_n\}$ ha limite $L \in \mathbb{R}^*$ se e soltanto se ogni sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ ha limite L.
- Ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.
- Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.
- La successione $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è strettamente crescente.
- $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- $\lim_{x\to0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- $\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \ \forall a > 0\,, a \neq 1$.
- $\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \quad \forall a > 0$.
- $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

• Teorema dell'esistenza degli zeri.

• Teorema dei valori intermedi (se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, con $f(a) \neq f(b)$, allora per ogni γ nell'intervallo aperto di estremi $f(a)$ ed $f(b)$ esiste $c \in]a, b[$ tale che $\ldots$).

• L'immagine di un intervallo mediante una funzione continua, non costante, è un intervallo.

• Lemma 1. Se $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva e $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$, allora $f(a) < f(x) < f(b)$ $[f(a) > f(x) > f(b)]$ $\forall x \in]a, b[$.

• Lemma 2. Se $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva e $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$, allora $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2$.

• Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo di $\mathbb{R}$) continua e iniettiva è strettamente monotòna in I.

• Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e soltanto se $\partial X \subseteq X$.

• Un insieme chiuso limitato superiormente [inferiormente] ha il massimo [minimo].

• Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e soltanto se X è chiuso e limitato.

• L'immagine di un insieme compatto mediante una funzione continua è un insieme compatto.

• Corollario: una funzione continua in un insieme compatto ha massimo e minimo assoluti.

• Corollario: il teorema di Weierstrass sulle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.

• Classificazione dei punti di discontinuità $x_0 \in X$ di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, con almeno un esempio per ciascun tipo di discontinuità.

• Un esempio di funzione continua in un intervallo limitato, non chiuso, che non è uniformemente continua in tale intervallo.

• Un esempio di funzione continua in un intervallo chiuso, non limitato, che non è uniformemente continua in tale intervallo.

• Una funzione lipschitziana è anche uniformemente continua.

• Un esempio di funzione uniformemente continua che non è lipschitziana.

• Condizioni caratteristiche affinché la retta di equazione $y = mx + p$ sia un asintoto per il grafico della funzione f per $x \to +\infty$.

• Studio completo della serie geometrica.

• Teorema sul carattere di una serie e delle sue serie coda.

• Proprietà associativa delle serie regolari.

• Condizione necessaria per la convergenza di una serie.

• Criterio di convergenza di Cauchy per le serie.

• Le serie a termini non negativi sono regolari.

• La serie armonica è divergente.

• Criterio del confronto per le serie a termini non negativi.

- Criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.
- Criterio di condensazione per le serie a termini positivi.
- Studio completo della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
- Una serie assolutamente convergente è anche convergente.
- La serie $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$ converge ed ha somma uguale a zero; essa ha inoltre riordinamenti convergenti con somma sia positiva che negativa.
- Una funzione f è derivabile in un punto x_0 se e solo se esiste un polinomio $p(x)$ di grado non superiore ad uno, con $f(x_0) = p(x_0)$, tale che ... .
- Derivata di a^x.
- Derivata di $\operatorname{sen} x$.
- La derivabilità implica la continuità.
- Esempi (almeno due, di natura diversa) di funzioni continue in un punto e non derivabili in tale punto.
- Teorema sulla derivata della funzione prodotto.
- Teorema sulla derivata della funzione reciproca $\frac{1}{g}$.
- Teorema di derivazione delle funzioni composte.
- Derivata di $\operatorname{arctg} x$.
- Teorema di Férmat.
- Teorema di Rolle.
- Teorema di Lagrange.
- Teorema di Cauchy.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni costanti in un intervallo.
- Corollario del teorema di Lagrange sulle funzioni monotòne (rispettivamente fortemente monotòne) in un intervallo.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia strettamente crescente nell'intervallo I è che risulti $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ e non esista alcun intervallo $J \subseteq I$ per il quale si abbia $f'(x) = 0$ $\forall x \in J$.
- Il primo teorema di De L'Hôpital, per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, nel caso del limite finito.
- Controesempi ai teoremi di De L'Hôpital (l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non implica l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).
- Corollario del primo teorema di De L'Hôpital sul limite del rapporto incrementale.
- Derivata di $\operatorname{arcsen} x$.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia convessa nell'intervallo I è che per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sia crescente nell'insieme $I \setminus \{x_0\}$.
- Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, convessa nell'intervallo I, è continua in $\mathring{I}$.

- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e derivabile nell'intervallo I. Allora, se $y = T(x)$ è l'equazione di una qualunque retta tangente al grafico di f, risulta $f(x) \geq T(x)$ $\forall x \in I$.
- Gli insiemi numerici delle somme inferiori e superiori relative ad una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono separati.
- Esempio di funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non integrabile secondo Riemann.
- Teorema della media per l'integrale di Riemann
- Integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue.
- Integrabilità secondo Riemann delle funzioni monotòne.
- Teorema sulla struttura dell'integrale indefinito (se F è una primitiva della funzione f nell'intervallo I, allora tutte e sole le primitive di f ...).
- Una funzione con un punto di discontinuità di prima specie non ha primitive.
- Prima formula di integrazione indefinita per sostituzione.
- Calcolo dell'integrale indefinito $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Formula fondamentale del calcolo integrale.
- Esempio di funzione non continua dotata di primitive.