"ISOTROPIC SCALAR FUNCTIONS"
(TRASFORMAZIONI ORTOGONALI IN R^3)

SIA DATA UNA FUNZIONE SCALARE PER TRASFORMAZIONI ORTOGONALI IN R^3.

$$f(\underline{u}) = f(Q\underline{u})$$

(DOVE Q DESCRIVE LA TRASFORMAZIONE ORTOGONALE $Q^{-1}=Q^T$)

IN QUESTO CASO LA "**BASE FUNZIONALE**" PER LA (1) E' COSTITUITA DALL'UNICO **BANALE** SCALARE

$$s_1 = \underline{u}\cdot\underline{u}$$

INFATTI $\exists$ UN RIFERIMENTO IN CUI LE COMPONENTI DEL VETTORE $\underline{u}$ SONO FUNZIONI DELLO SCALARE $s_1 = \underline{u}\cdot\underline{u}$.
CONSIDERIAMO UNA OPPORTUNA ROTAZIONE TALE CHE $\underline{u} = (u_1, 0, 0)$
ALLORA DALLO SCALARE $\underline{u}\cdot\underline{u} = u_1^2$, SE SCELGO IL VERSO DI $\underline{e}_1$ IN MODO TALE CHE $u_1 > 0$, AVREMO

$$u_1 = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}$$

DA CUI $f(u_1) = f(u_1(\underline{u}\cdot\underline{u})) = f(\underline{u}\cdot\underline{u})$

NOTIAMO CHE SE QUESTO E' VERO NEL RIFERIMENTO IN CUI $\underline{u} = (u_1, 0, 0)$ (CON $u_1 > 0$) ALLORA ESSENDO f UNA FUNZIONE SCALARE DA $\underline{u}\cdot\underline{u}$ UNO SCALARE ALLORA SARA' VERO **SEMPRE**. QUINDI

$$f(\underline{u}) = f(\underline{u}\cdot\underline{u})$$

SIA DATA LA $\forall$ FUNZIONI SCALARI DI DUE VETTORI

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = f(Q\underline{u}, Q\underline{v})$$

ALLORA I **TRE** INVARIANTI $\{s_1 = \underline{u}\cdot\underline{u},\ s_2 = \underline{v}\cdot\underline{v},\ s_3 = \underline{u}\cdot\underline{v}\}$

COSTITUISCONO ORA BASE FUNZIONALE PER TALI FUNZIONI SCALARI

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{u}\cdot\underline{u},\ \underline{u}\cdot\underline{v},\ \underline{v}\cdot\underline{v})$$

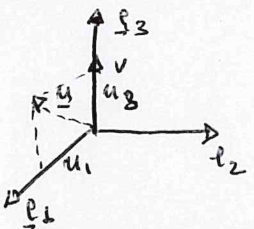
CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO IN CUI

$$\underline{v} = (0, 0, v_3) \qquad \text{CON } v_3 > 0$$

FISSANDO QUINDI OPPORTUNAMENTE L'ASSE $\underline{e}_3$ IN DIREZIONE E VERSO, DA CUI

$$v_3 = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$$

POSSIAMO FARE UNA OPPORTUNA ROTAZIONE ATTORNO AD $\underline{e}_3$ IN MODO TALE CHE



$$\underline{u} = (u_1, 0, u_3)$$

FISSIAMO OPPORTUNAMENTE IL VERSO DI $\underline{e}_1$ IN MODO TALE CHE $u_1 > 0$. ALLORA DAGLI SCALARI

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = v_3 u_3 \Rightarrow u_3 = \frac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{v_3} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}}$$

DALLO SCALARE

$$\underline{u}\cdot\underline{u} = u_1^2 + u_3^2 \Rightarrow u_1^2 = \underline{u}\cdot\underline{u} - u_3^2 =$$

$$= \underline{u}\cdot\underline{u} - \frac{(\underline{v}\cdot\underline{u})^2}{\underline{v}\cdot\underline{v}}$$

DA CUI ESSENDO $u_1 > 0$ AVREMO

$$u_1 = \left[\underline{u}\cdot\underline{u} - \frac{(\underline{v}\cdot\underline{u})^2}{\underline{v}\cdot\underline{v}} \right]^{1/2}$$

ABBIAMO QUINDI DETERMINATO UN RIFERIMENTO IN CUI

u_i E $\underline{v}_i$ SONO FUNZIONI DEI TRE SCALARI

$$\{\underline{v}\cdot\underline{v},\ \underline{v}\cdot\underline{u},\ \underline{u}\cdot\underline{u}\}$$

$$f(u_\alpha, v_\alpha) = f\left[u_\alpha(\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{u}\cdot\underline{u}, \underline{v}\cdot\underline{u}), v_\alpha[\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{u}\cdot\underline{u}, \underline{v}\cdot\underline{u}]\right]$$

$$= f(\underline{u}\cdot\underline{u}, \underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u})$$

SE QUESTO E' VERO IN UN DATO RIFERIMENTO, ALLORA SARA' VERO IN $\forall$ ALTRO RIFERIMENTO PERCHE'

f, $\underline{u}\cdot\underline{u}$, $\underline{v}\cdot\underline{v}$, $\underline{u}\cdot\underline{v}$ SONO INVARIANTI PER TRASF. ORTOGONALI

ALLORA $\forall f$ FUNZIONI DI DUE VETTORI $\underline{u}, \underline{v}$ IN R^3 SARA FUNZIONE DEI TRE INVARIANTI

$$\{\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u}\}$$

CHE COSTITUIRANNO UNA BASE FUNZIONALE PER FUNZIONI ISOTROPE SCALARI (RISPETTO A TRASF. ORTOGONALI):

$$\forall f: \quad f(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u})$$

CONSIDERIAMO IL CASO RELATIVISTICO IN CUI SI ABBIA UNA FUNZIONE ISOTROPA SCALARE RISPETTO A TRASF. DEL GRUPPO DI LORENTZ

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = f(Q\underline{u}, Q\underline{v})$$

[Q DESCRIVE UNA TRASFORMAZIONE DEL GRUPPO DI DI LORENTZ]

DOVE ALMENO UNO DEI DUE VETTORI SIA DI TIPO TEMPO. ALLORA AVREMO COME BASE FUNZIONALE I TRE INVARIANTI

$$\{\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u}\}$$

SIA $\underline{u}$ UN 4-VETTORE DI TIPO TEMPO (AD ESEMPIO LA 4-VELOCITÀ DI UNA PARTICELLA $u_\alpha u_\alpha = -c^2 < 0$)

ALLORA POSSIAMO SEMPRE SCEGLIERE UN RIF. IN CUI $\underline{u}$ SIA DIRETTO LUNGO L'ASSE DEI TEMPI, CIOÈ TALE CHE

$$u = (0, 0, 0, i u_4)$$

(NEL CASO DELLA 4-VELOCITÀ SARÀ DATO DAL RIF. IN CUI LA PARTICELLA È SOLIDALE PERCUI $\underline{u} = (0, 0, 0, ic)$)

ALLORA SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE IL VERSO DEL 4° ASSE AVREMO

$$u_4 = \sqrt{-u_\alpha u_\alpha}$$

CONSIDERIAMO NEL SOTTOSPAZIO (DELLE COORDINATE) R^3 DUE OPPORTUNE ROTAZIONI TALI CHE

$$\underline{v} = (v_1, 0, 0, i v_4)$$

DA CUI $\quad \underline{v} \cdot \underline{u} = - v_4 u_4 \Rightarrow v_4 = \dfrac{\underline{v} \cdot u}{-u_4} =$

$$= - \frac{v_\alpha u_\alpha}{\sqrt{-u_\alpha u_\alpha}}$$

INFINE SE CONSIDERIAMO IL 4-INVARIANTE

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = v_\alpha v_\alpha = v_1^2 - (v_4)^2 \Rightarrow v_1^2 = v_\alpha v_\alpha + (v_4)^2$$

$$= v_\alpha v_\alpha + \frac{(v_\alpha u_\alpha)^2}{-u_\alpha u_\alpha}$$

SCEGLIENDO IL VERSO DEL 1° ASSE IN MODO TALE CHE $v_1 > 0$

AVREMO

$$V_\gamma = \left[V_\alpha V_\alpha - \frac{(V_\alpha U_\alpha)^2}{U_\alpha U_\alpha} \right]^{1/2}$$

ABBIAMO QUINDI DETERMINATO UN OPPORTUNO RIFERIMENTO IN CUI

$$U_\alpha = U_\alpha(\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u})$$

$$V_\alpha = V_\alpha(\underline{v}\cdot\underline{v})\ \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u})$$

DA CUI $\forall$ FUNZIONE SCALARE

$$f(\underline{v},\underline{u}) = f[\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u}]$$

QUESTO SARÀ VERO IN QUALSIASI ALTRO RIFERIMENTO IN QUANTO f, $\underline{v}\cdot\underline{v}$, $\underline{v}\cdot\underline{u}$, $\underline{u}\cdot\underline{u}$ SONO FUNZIONI SCALARI.

QUINDI IL SET DI INVARIANTI

$$\{\underline{v}\cdot\underline{v}, \underline{v}\cdot\underline{u}, \underline{u}\cdot\underline{u}\}$$

COSTITUIRÀ UNA "BASE FUNZIONALE" PER FUNZIONI ISOTROPE SCALARI DEL GRUPPO DI LORENTZ, PURCHÉ ALMENO UNO DEI DUE 4-VETTORI SIA DI TIPO TEMPO.

APPLICAZIONI AL CASO DELLA LAGRANGIANA ASSOCIATA AL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA NEL CASO DI PARTICELLA LIBERA E DI PARTICELLA SOGGETTA AD UN CAMPO ELETTROMAGNETICO.

NEL CASO DELLA PARTICELLA LIBERA ESSENDO LO SPAZIO TEMPO OMOGENEO ED ISOTROPO AVREMO

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(u_\alpha) \qquad \text{CON } u_\alpha \text{ LA 4-VELOCITÀ}$$

QUINDI BANALMENTE (ESSENDO u_α UN 4-VETTORE DI TIPO TEMPO)

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(u_\alpha u_\alpha) = m\, f(u_\alpha u_\alpha)$$

DALLE EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x_\alpha}} = 0$$

CI ASPETTIAMO PER LA PARTICELLA LIBERA LA CONSERVAZIONE DEL 4-VETTORE ENERGIA IMPULSO

$$P_\alpha = m u_\alpha \qquad \text{CIOÈ} \qquad \frac{d}{d\tau} P_\alpha = 0$$

ESSENDO $\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} = m f'(2u_\alpha) = P_\alpha = m u_\alpha$ SE E SOLO SE

$f'(u_\alpha u_\alpha) = \frac{1}{2}$ QUINDI

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} m\, u_\alpha u_\alpha$$

PARTICELLA SOGGETTA ALL'AZIONE DI UN CAMPO ELETTROMAGNETICO IN QUESTO CASO LO SPAZIO DEGLI EVENTI NON SARÀ PIÙ OMOGENEO ED ISOTROPO IN QUANTO, SI INTRODURRÀ IL 4-VETTORE "QUADRIPOTENZIALE" $A_\alpha(x_\beta)$ TALE CHE

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_\alpha, A_\alpha)$$

ESSENDO u_α UN 4-VETTORE DI TIPO TEMPO AVREMO CHE

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(u_\alpha u_\alpha,\ u_\alpha A_\alpha,\ A_\alpha A_\alpha)$$

AVREMO QUINDI CHE

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(u_\alpha u_\alpha) + \mathcal{L}_{int}.$$

ESSENDO LA $\mathcal{L}_{int}$ LA LAGRANGIANA CHE DESCRIVE LA INTERAZIONE TRA LA PARTICELLA CARICA E IL CAMPO ~~ELETTRICO~~ ELETTROMAGNETICO. (SE ADESSO SUPPONIAMO CHE IL CAMPO ELETTROMAGNETICO APPLICATO SIA COSTANTE E CHE LA SUA PERTURBAZIONE IMPUTABILE ALLA CARICA SIA TRASCURABILE) POSSIAMO TRASCURARE S_{em}. LA CUI VARIAZIONE SARÀ NULLA.

DA CUI $\Rightarrow$ $S = S_0 + S_{int}$

$$S_0 = \int \mathcal{L}_0 \, d\tau$$

$$S_{int} = \int \mathcal{L}_{int} \, d\tau.$$

OSSERVIAMO CHE DEI TRE INVARIANTI ~~[illegible]~~

$u_\alpha u_\alpha$ CONTIENE INFORMAZIONI SOLO SULLA PARTICELLA

$A_\alpha A_\alpha$ CONTIENE INFORMAZIONI SOLO SUL CAMPO

$u_\alpha A_\alpha$ È L'UNICO SCALARE CHE CONTIENE INFORMAZIONI SIA SULLA PARTICELLA CHE SUL CAMPO. QUINDI

$$S_{int} = \mathcal{L}_{int}\,(u_\alpha A_\alpha)$$

OSSERVIAMO CHE COME NEL CASO DELLA PARTICELLA LIBERA, NEL CASO DELLA PARTICELLA CARICA SOGGETTA AD UN CAMPO ELETTROMAGNETICO CI ASPETTIAMO DI TROVARE IN FORMA "NON COVARIANTE" L'EQUAZIONE BEN NOTA:

$$\boxed{\frac{dP_\alpha}{dt} = eE_\alpha + \frac{e}{c}(v \wedge B)_\alpha}$$

DOVE P_α $\alpha = 1,2,3$ È L'IMPULSO RELATIVISTICO

È POSSIBILE PROVARE RAPIDAMENTE CHE QUESTO È VERO SE E SOLO SE

$$\mathcal{L}_{INT} \propto u_\alpha A_\alpha$$

DOVE LA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ SARÀ DATA

$$\mathcal{L}_{INT} = \frac{e}{c} u_\alpha A_\alpha$$

(C PER MOTIVI DIMENSIONALI ED e IN QUANTO PER $e \to 0$ CI ASPETTIAMO CHE IL TERMINE DI INTERAZIONE SIA NULLO)

QUINDI

ESPRESSIONE UTILIZZATA DA LANDAU

$$S_{INT} = \frac{e}{c}\int A_\alpha u_\alpha \, d\tau = \frac{e}{c}\int A_\alpha \, dx_\alpha$$

QUINDI

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT} = \frac{1}{2} m u_\alpha u_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha u_\alpha$$

CON LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0}$$

NOTA: IL TERZO SCALARE $A_\alpha A_\alpha$, SI INTRODUCE QUANDO SI DESCRIVE UN BOSONE MASSIVO ESSENDO IN QUESTO CASO IL POTENZIALE VETTORE MASSIVO A_α