Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 20.07.2018

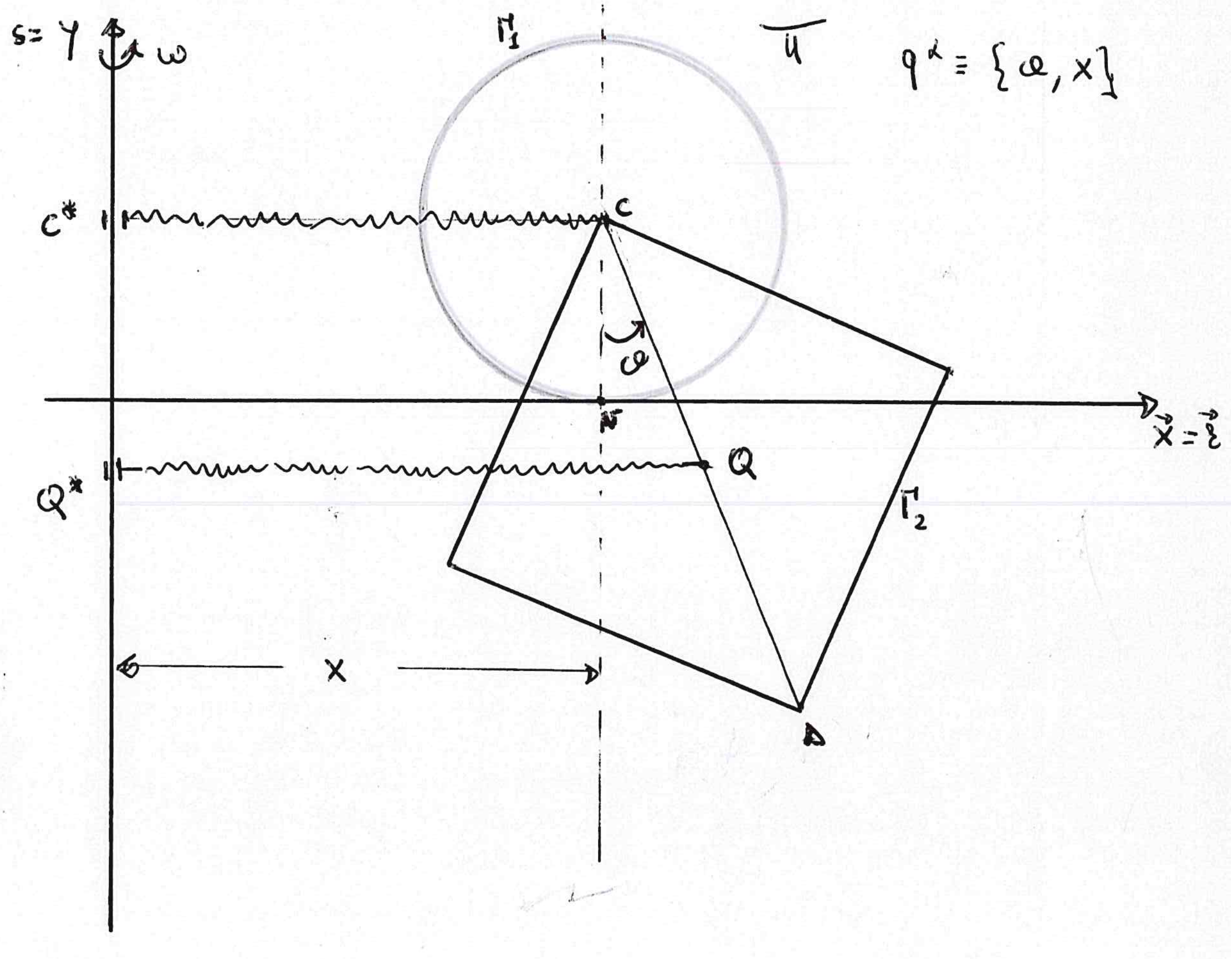
Un sistema materiale S, costituito da un disco omogeneo Γ_1 di centro C, raggio R e massa M, e da una lamina quadrata omogenea Γ_2 di uguale massa M centro Q e diagonale $2\,d$, é vincolato a muoversi su un piano verticale π, con un vertice del quadrato sovrapposto al centro C del disco.
Supporremo che i vincoli siano stati realizzati senza attrito e che il disco Γ_1 sia ulteriormente vincolato a rotolare senza strisciare su una retta r (asse $\vec{x}$ in figura) orizzontale di π, posta al di sotto di Γ_1. Sul sistema, oltre alle forze peso, agiscono le due forze elastiche

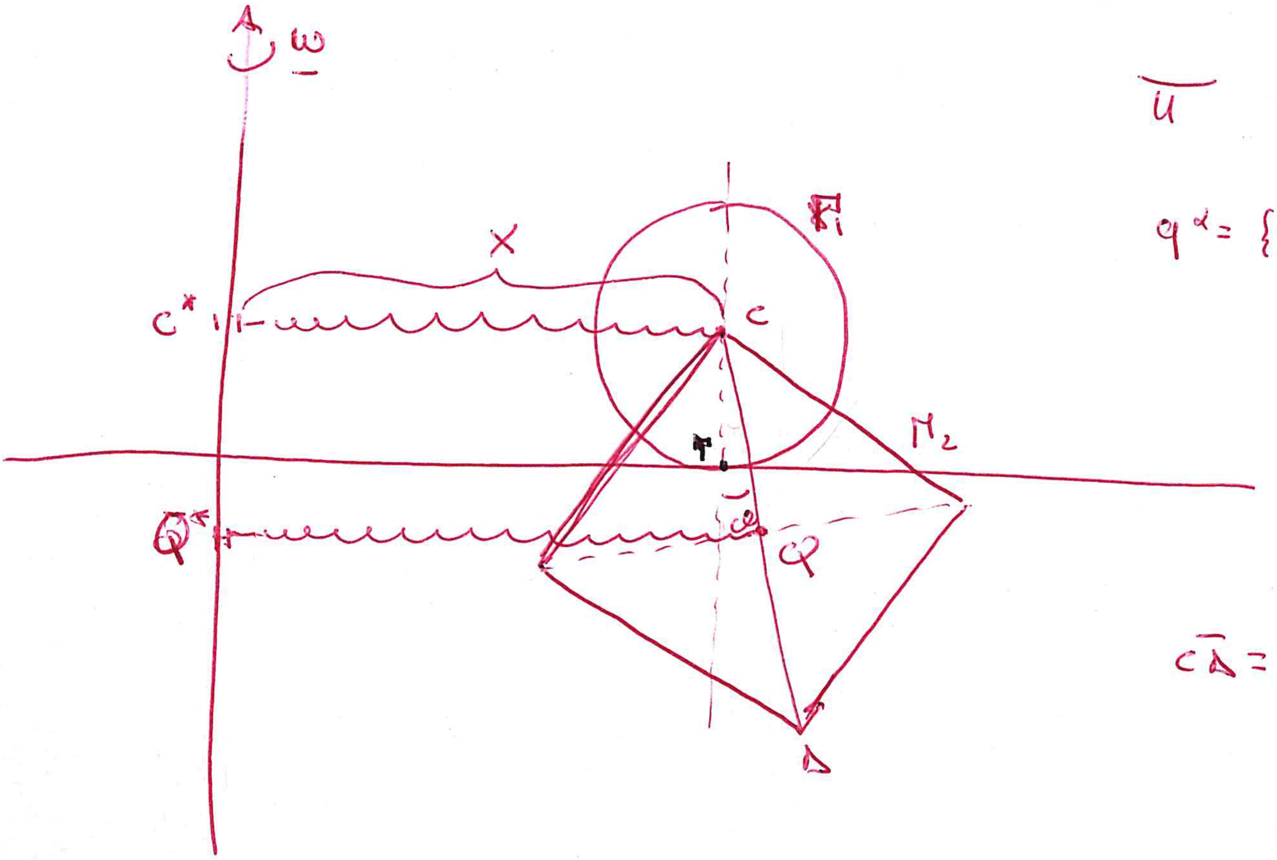
$$\{F_1 = -k\,(C - C^*),\; C\} \qquad \{F_2 = -k\,(Q - Q^*),\; Q\} \qquad \text{con} \quad k > 0,$$

essendo C^* e Q^* rispettivamente le proiezioni ortogonali di C e Q su una retta verticale s (asse delle $\vec{y}$) di π. Supposto che il piano verticale π sia in rotazione uniforme, con velocitá angolare ω, attorno alla retta s, e indicate con α e γ le quantitá equidimensionali

$$\alpha = M\,\omega^2 - k \neq 0 \qquad \gamma = \frac{M\,g}{d} > 0, \qquad \text{con} \qquad k/M > 2\,g/d$$

1. Determinare per $\alpha > 0$ ed $\alpha < 0$ tutte le configurazioni di equilibrio relativo al variare di ω^2.
2. Studiare la stabilitá, delle configurazioni di equilibrio, soltanto nel caso in cui $\alpha < 0$ con $\frac{k}{M} - \frac{2\,g}{d} < \omega^2 < \frac{k}{M}$.
3. Scrivere le equazioni di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
4. Studiare i moti in prima approssimazione attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui C e Q appartengono alla verticale s con Q posto inferiormente a C.





$\overline{u}$

$q^\alpha = \{x, \varphi\}$

$\overline{CA} = 2d$

1) $\{F_1 = -K(C - C^*), C\}$ $F_2 \equiv \{-K(Q - Q^*), Q\}$

2) FORZA PESO

3) FORZA CENTRIFUGA

PONIAMO $\alpha = M\omega^2 - K \neq 0$ $\gamma = \frac{Mg}{d} > 0$ ($\gamma > 0$) ($K > 0$)

$U_{F_1} = -\frac{1}{2}K(C - C^*)^2$; $U_{F_2} = -\frac{1}{2}K(Q - Q^*)^2$

$U_{peso} = -Mg(0,1) \cdot (Q - 0)$

$U^{cent}_{M_1} = \frac{1}{2}\omega^2 \int (P - \bar{P})^2 dm$ con $P \in M_1 \Rightarrow U^{cent}_{M_1} = \frac{1}{2}\omega^2 I^{M_1}_{y,0}$

$U^{cent}_{M_2} = \frac{1}{2}\omega^2 \int (P - \bar{P})^2 dm$ con $P \in M_2$ $U^{cent}_{M_2} = \frac{1}{2}\omega^2 I^{M_2}_{y,0}$

$$I^{M_2}_{\cancel{M_4},O} = I^{M_2}_{y',Q} + m\,(Q - Q^*)^2$$

$$I^{M_1}_{y,O} = I^{M_1}_{y',C} + m\,(C - C^*)^2$$

$C = (X, R)$ $\qquad Q \equiv [X_C + d\sin\alpha, -(d\cos\alpha - R)]$

$$= [X + d\sin\alpha, R - d\cos\alpha]$$

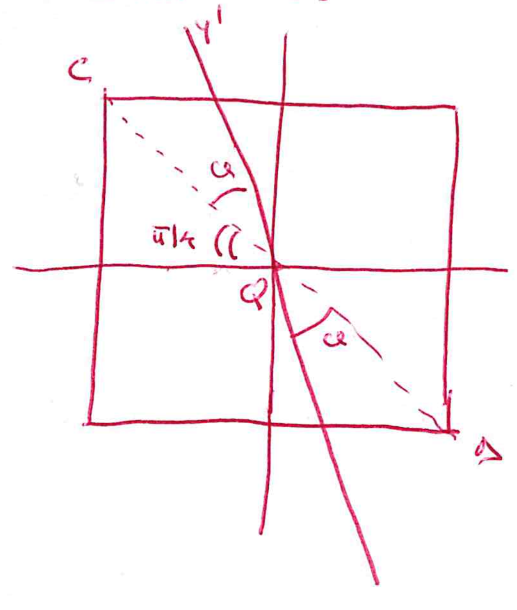
Quindi

$$I^{M_2}_{y,O} = I^{M_2}_{y',Q} + m\,(X + d\sin\alpha)^2 = \frac{1}{12}Ma^2 + m\,(X + d\sin\alpha)^2$$

$$I^{M_1}_{y,O} = I^{M_2}_{y',C} + m\,X^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \cancel{M}\,X^2$$

(NOTA SUI MOMENTI DI INERZIA)

OSSERVIAMO CHE:



$$y' = \{-\cos(\alpha + \pi/4), \sin(\alpha + \pi/4), 0\}$$

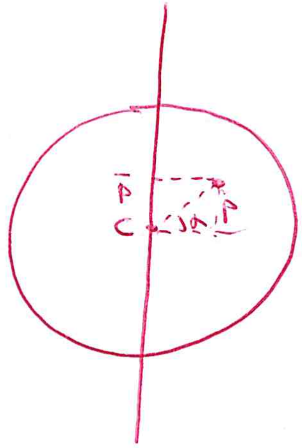
$$I^{M_2}_{y',Q} = I_{\alpha\beta}\, y'_\alpha\, y'_\beta$$

dove $\quad I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{11} \end{pmatrix}$

$$I_{11} = \iint y^2\,dm = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2\,dy =$$

$$= \frac{M}{a^2}\left(a \cdot \frac{2}{3}\frac{a^3}{8}\right) = \frac{M}{a^2} \cdot \frac{1}{12}a^4 = \frac{1}{12}Ma^2$$

$$I^{M_2}_{y,Q} = \frac{1}{12}Ma^2\left(\cos^2(\alpha + \pi/4) + \sin^2(\alpha + \pi/4)\right) = I_{11} = \frac{1}{12}Ma^2 = \underline{\text{cost.}}$$



$P - \bar{P} = \rho \cos\alpha$.

da cui

$$I^{M_1}_{q',c} = \iint (\rho \cos\alpha)^2 dm = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha =$$

$$= \frac{M}{4\cancel{\pi}} R^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2\pi} + \frac{1}{4} \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} 2 \cos(2\alpha) \, d\alpha}}_{t} \right\} =$$

$$\int \cos t \, dt = \sin(2\alpha) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$= \frac{1}{4} M R^2$$

calcolo potenziale:

$$U = -\frac{1}{2} K x^2 - \frac{1}{2} K (x + d \sin\alpha)^2 + Mg (d \cos\alpha - R)$$

$$+ \frac{1}{2} \omega^2 \left[\frac{1}{12} M a^2 + M (x + d \sin\alpha)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \omega^2 \left[\frac{1}{4} M R^2 + M x^2 \right] + c =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(M\omega^2 - K)}_{\alpha} x^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(M\omega^2 - K)}_{\alpha} (x + d \sin\alpha)^2 +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{Mg}{d}\right)}_{\gamma} d^2 \cos\alpha + \tilde{c} \qquad \text{da cui ottengo}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\alpha}{2} (x + d \sin\alpha)^2 + \gamma d^2 \cos\alpha + \tilde{c}}$$

CALCOLIAMO LE SOLLECITAZIONI

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha\left[2x + d \operatorname{sen}\vartheta\right]$$

$$Q_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \alpha\left[x + d \operatorname{sen}\vartheta\right] d \cos\vartheta - \gamma d^2 \operatorname{sen}\vartheta$$

"<u>EQUILIBRIO</u>"

$$\begin{matrix} Q_x = 0 \\ Q_\vartheta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{d}{2} \operatorname{sen}\vartheta \\ \dfrac{\alpha}{2} \cancel{d^2} \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta - \gamma \cancel{d^2} \operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui,
$$x = -\frac{d}{2} \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\left[\frac{\alpha}{2} \cos\vartheta - \gamma\right] \operatorname{sen}\vartheta = 0$$

da cui: 1) $\operatorname{sen}\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi$ e a $x = 0$

cioè $S_1 \equiv (0, 0)$ $\quad S_2 = (\pi, 0)$

oppure 2) $\cos\vartheta = \dfrac{2\gamma}{\alpha} \neq 0$ da cui avremo due casi

A) $\alpha > 0$ $\left(\omega^2 > \frac{k}{M}\right)$ $\qquad \dfrac{2\gamma}{\alpha} < 1$ (non includiamo l'uguale in quanto per $\cos\vartheta = 1$ $\Rightarrow \vartheta = 0$ che abbiamo già considerato

avremo quindi
$$\frac{2\gamma}{\alpha} = \frac{2Mg}{d} \cdot \frac{1}{M\omega^2 - k} < 1 \Rightarrow \frac{2Mg}{d} < M\omega^2 - k$$

$$\Rightarrow \quad M\omega^2 > K + \frac{2Mg}{d} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 > \frac{K}{M} + \frac{2g}{d}$$

in questo caso avremo due altre configurazioni di equilibrio

$$\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right) \qquad \text{ed} \quad \bar{x} = -\frac{d}{2}\sin\bar{\theta}$$

cioè $S_3 = (\bar{\theta}, \bar{x})$ $\qquad S_4 \equiv (-\bar{\theta}, -\bar{x})$

—o—

Quindi: 1) se $\alpha > 0$ $\left(\omega^2 > \frac{K}{M}\right)$

avremo: A)$_1$ per $\frac{K}{M} < \omega^2 \leq \frac{K}{M} + \frac{2g}{d}$

soltanto $S_1 \equiv (0, 0)$ $\qquad S_2 \equiv (\pi, 0)$ $\qquad$ (in quanto $\frac{2\gamma}{\alpha} \geq 1$)

A)$_2$ per $\omega^2 > \frac{K}{M} + \frac{2g}{d}$ $\qquad$ 4 configurazioni

$S_1 \equiv (0,0)$; $S_2 = (\pi, 0)$; $S_3 \equiv (\bar{\theta}, \bar{x})$; $S_4 = (-\bar{\theta}, -\bar{x})$

con $\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)$ ed $\bar{x} = -\frac{d}{2}\sin\bar{\theta}$.

—o—

Se invece accade che $\boxed{\alpha < 0}$ $\Rightarrow 0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M}$.

avremo sempre $S_1 \equiv (0, 0)$, $S_2 \equiv (\pi, 0)$

oppure $\cos\theta = \frac{2\gamma}{\alpha} < 0$ ciò è accettabile

se $-1 < \frac{2\gamma}{\alpha}$ $\qquad$ (anche in questo caso non considero l'uguale in quanto $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ già considerato)

QUINDI
$$-1 < -2\,\frac{Mg}{d}\,\frac{1}{K - M\omega^2}$$

DA CUI
$$2\,\frac{Mg}{d}\,\frac{1}{K-M\omega^2} < 1 \qquad \frac{2Mg}{d} < K - M\omega^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M} - \frac{2g}{d} \qquad \left(\text{VERIFICATA SE } \frac{2g}{d} < \frac{K}{M}\right)$$

ED IN QUESTO CASO AVREMO ALTRE DUE CONFIGURAZIONI:

$$\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{2\gamma}{\lambda}\right) \qquad \text{ED} \qquad \bar{x} = -\frac{d}{2}\operatorname{sen}\bar{\theta}$$

CIOÈ $S_3 \equiv (\bar{\theta}, \bar{x})$ ED $S_4 \equiv (-\bar{\theta}, -\bar{x})$

QUINDI SE $\lambda < 0$ $\left(0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M}\right)$

AVREMO

B)$_1$ PER $\frac{K}{M} - \frac{2g}{d} \leq \omega^2 < \frac{K}{M}$ $\left(\frac{2\gamma}{\lambda} \leq -1\right)$

SOLTANTO $S_1 \equiv (0,0)$, $S_2 \equiv (\pi, 0)$

B)$_2$ PER $0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M} - \frac{2g}{d}$ 4 CONFIGURAZIONI:

$S_1 \equiv (0,0)$, $S_2 \equiv (\pi, 0)$, $S_3 \equiv (\bar{\theta}, \bar{x})$ $S_4 \equiv (-\bar{\theta}, \bar{x})$

~

NOTA: SE ACCADE CHE $\frac{2g}{d} > \frac{K}{M}$ ALLORA $\frac{K}{M} - \frac{2g}{d} < 0$

IN QUESTO CASO AVREMO SOLO LE DUE CONFIGURAZIONI $S_1 \equiv (0,0)$ ED $S_2 \equiv (\pi, 0)$

IN QUANTO LA SOLUZIONE $-1 < \frac{2\gamma}{\lambda}$ NON SARÀ MAI ACCETTABILE

RICAPITOLANDO ABBIAMO:

1) SE $\alpha > 0$ $\quad \left(\omega^2 > \frac{K}{M} \right)$

A)$_1$ PER $\quad \frac{K}{M} < \omega^2 \leq \frac{K}{M} + \frac{2\gamma}{d}$

SOLTANTO $S_1 \equiv (0,0)$, $S_2 \equiv (\pi, 0)$ $\quad \left(\text{IN QUANTO } \frac{2\gamma}{\alpha} \geq 1 \right)$

A)$_2$ PER $\quad \omega^2 > \frac{K}{M} + \frac{2\gamma}{d}$

4 CONFIGURAZIONI $\quad S_1 \equiv (0,0)$; $S_2 \equiv (\pi, 0)$; $S_3 = (\bar{\theta}, \bar{x})$; $S_4 = (-\bar{\theta}, -\bar{x})$

CON $\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{2\gamma}{\alpha} \right)$ ED $\bar{x} = -\frac{d}{2} \sin\bar{\theta}$

(IN QUESTO CASO $\frac{2\gamma}{\alpha} < 1$)

2) SE $\alpha < 0$ $\quad \left(0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M} \right)$

B)$_1$ PER $\quad \frac{K}{M} - \frac{2\gamma}{d} \leq \omega^2 < \frac{K}{M}$ $\quad \left(\text{IN QUANTO } \frac{2\gamma}{\alpha} \leq -1 \right)$

SOLTANTO DUE CONFIG. $\quad S_1 \equiv (0,0)$, $S_2 = (\pi, 0)$

B)$_2$ PER $\quad 0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M} - \frac{2\gamma}{d}$ $\Rightarrow$ [NOTA: QUESTO E' ACCETTABILE SOLO SE $\frac{2\gamma}{d} < \frac{K}{M}$]

4 CONFIGURAZIONI $\quad S_1 \equiv (0,0)$; $S_2 = (\pi, 0)$; $S_3 \equiv (\bar{\theta}, \bar{x})$; $S_4 = (-\bar{\theta}, -\bar{x})$

CON $\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{2\gamma}{\alpha} \right)$ ED $\bar{x} = -\frac{d}{2} \sin\bar{\theta}$

(IN QUESTO CASO $-1 < \frac{2\gamma}{\alpha}$)

"ANALISI DELLA STABILITÀ"

CASO: $\alpha < 0$ AUROTEO:

$U_{xx} = 2\alpha < 0$ $U_{xa} = U_{ax} = \alpha d \cos a$

$U_{aa} = -\alpha d x \operatorname{sen} a + \alpha d^2 [\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a] - \gamma d^2 \cos a.$

$B)_1$ PER $\frac{K}{M} - \frac{2g}{d} \leq \omega^2 < \frac{K}{M}$ $\left(\frac{2\gamma}{\alpha} \leq -1 \right)$

SOLO DUE CONFIGURAZIONI: $S_1 \equiv (0,0)$ $S_2 \equiv (\pi, 0)$

1) $S_1 = (0,0)$ $U_{xx} = 2\alpha < 0$ $U_{xa}|_{S_1} = \alpha d$

$U_{aa}|_{S_1} = d^2(\alpha - \gamma)$

$$H|_{S_1} = \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha d \\ \alpha d & d^2(\alpha-\gamma) \end{vmatrix} = \underbrace{\alpha d^2}_{<0} \underbrace{(\alpha - 2\gamma)}_{<0 \text{ SEMPRE}} > 0$$

MAX $\Rightarrow$ STABILE.

2) $S_2 \equiv (\pi, 0)$ $U_{xx} = 2\alpha < 0$ $U_{xa}|_{S_2} = -\alpha d$

$U_{aa}|_{S_2} = d^2(\alpha + \gamma)$

$$H|_{S_2} = \begin{vmatrix} 2\alpha & -\alpha d \\ -\alpha d & d^2(\alpha+\gamma) \end{vmatrix} = \underbrace{\alpha d^2}_{<0} \underbrace{(\alpha + 2\gamma)}_{\not\geq 0} \not\leq 0$$

$\frac{2\gamma}{\alpha} \leq -1$

$\frac{2\gamma}{-(-\alpha)} \leq -1$

$\frac{2\gamma}{-\alpha} \geq 1$

$2\gamma \geq -\alpha$

(NEL CASO $H|_{S_2} = 0$ STUDIO LOCALE) ALTRIMENTI $H|_{S_2} \not< 0$

NO MAX $\Rightarrow$ INSTABILE.

$B)_2$ $0 \leq \omega^2 < \frac{K}{M} - \frac{2g}{d}$ $\left(\frac{2\gamma}{\alpha} > -1 \right)$

(SOLO SE $\frac{2g}{d} < \frac{K}{M}$)

AVREMO 4 CONFIGURAZIONI $S_1 \equiv (0,0)$, $S_2 \equiv (\pi, 0)$; $S_3 \equiv (\bar{\varphi}, \bar{x})$

$S_4 = (-\bar{\varphi}, -\bar{x})$.

1) $S_1 \equiv (0,0)$ $\quad u_{xx} = 2\alpha < 0$ $\quad H|_{S_1} = \underbrace{\alpha d^2}_{<0} \underbrace{(\alpha - 2\gamma)}_{<0} > 0$

MAX STABILE

2) $S_2 \equiv (\pi, 0)$ $\quad u_{xx} = 2\alpha < 0$ $\quad H|_{S_2} = \underbrace{\alpha d^2}_{<0} \underbrace{(\alpha + 2\gamma)}_{\not< 0} \not> 0$

[ricordo $\frac{2\gamma}{\alpha} > -1 \Rightarrow -\frac{2\gamma}{(-\alpha)} > -1 \Rightarrow \frac{2\gamma}{-\alpha} < 1 \Rightarrow 2\gamma < -\alpha$

NO MAX INSTABILE. $\quad \Rightarrow 2\gamma + \alpha < 0$]

3) $S_3 \equiv (\bar{\varphi}, \bar{x})$

$u_{xx} = 2\alpha < 0$ $\quad u_{\varphi\varphi} = \alpha d^2 \cos^2\bar{\varphi} - \alpha \frac{d^3}{2} \sin^2\bar{\varphi} - \gamma d^2 \cos\bar{\varphi}$

$$H = \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha d \cos\bar{\varphi} \\ \alpha d \cos\bar{\varphi} & \left(\alpha d^2 \cos^2\bar{\varphi} - \frac{\alpha}{2} d^2 \sin^2\bar{\varphi} - \gamma d^2 \cos\bar{\varphi}\right) \end{vmatrix} = d^2 [4\gamma^2 - \alpha^2] =$$

$= d^2 \underbrace{[2\gamma - \alpha]}_{>0} \underbrace{[2\gamma + \alpha]}_{\not< 0} \not< 0$ $\quad \left(\frac{2\gamma}{\alpha} > -1 \Rightarrow (\alpha + 2\gamma) \not< 0\right)$

NO MAX INSTABILE

4) $S_4 \equiv (-\bar{\varphi}, -\bar{x})$ $\quad u_{xx} = 2\alpha < 0$

$u_{\varphi\varphi} = \alpha d^2 \cos^2\varphi - \frac{3}{2}\alpha d^2 \sin^2\bar{\varphi} - \gamma d^2 \cos\bar{\varphi}$

$H|_{S_4} = 3d^2 [4\gamma^2 - \alpha^2] = 3 d^2 \underbrace{[2\gamma - \alpha]}_{>0} \underbrace{[2\gamma + \alpha]}_{\not< 0} \not< 0$

NO MAX INSTABILE.

CASO $\alpha > 0$

$$u_{xx} = 2\alpha > 0 \qquad u_{x\alpha} = u_{\alpha x} = \alpha d \cos\alpha$$

$$u_{\alpha\alpha} = -\alpha d x \,\mathrm{sen}\,\alpha + \alpha d^2 [\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha] - \gamma d^3 \cos\alpha$$

IN QUESTO CASO TUTTE LE POSSIBILI CONFIGURAZIONI SONO INSTABILI. (CIOÈ NON POSSIAMO AVERE UN MAX PER IL POTENZIALE)

INFATTI NEL CASO IN CUI $\det(H(x_0,y_0)) \neq 0$ CERTAMENTE AVREMO NO MAX ($u_{xx} = 2\alpha > 0$ SEMPRE)

L'UNICO CASO DUBBIO È QUELLO IN CUI $\det(H(x_0,y_0)) = 0$

È POSSIBILE PROVARE CHE (ASSUMENDO CHE $H(x,y)|_{P_0}$ NON SIA IDENTICAMENTE NULLA, CIOÈ TUTTI I SUOI TERMINI NON SIANO NULLI) SE $H(x,y)|_{P_0}$ È SEMIDEFINITA POSITIVA PER UN TEOREMA DI ANALISI II P_0 NON PUÒ ESSERE DI MAX.

PROVIAMO CHE $H(x,y)|_{P_0}$ È SEMIDEFINITA POSITIVA:

CALCOLIAMO L'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI:

$$\begin{vmatrix} u_{xx} - \lambda & u_{xy} \\ u_{yy} & u_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + \underbrace{(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)}_{\det H(x,y)} = 0$$

SE SUPPONIAMO CHE IN P_0 $\det H|_{P_0} = 0$

ALLORA $\Rightarrow \lambda[\lambda - (u_{xx}|_{P_0} + u_{yy}|_{P_0})] = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ E $\lambda = u_{xx}|_{P_0} + u_{yy}|_{P_0}$ MA SE $u_{xx}|_{P_0} u_{yy}|_{P_0} - u_{xy}^2|_{P_0} =$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{SE } u_{xy}|_{P_0} \neq 0 \text{ ED } u_{xx}|_{P_0} > 0 \Rightarrow u_{yy}|_{P_0} > 0 \\ \text{SE } u_{xy}|_{P_0} = 0 \text{ ED } u_{xx}|_{P_0} > 0 \Rightarrow u_{yy}|_{P_0} = 0 \end{cases}$$

IN OGNI CASO $\lambda|_{P_0} = u_{xx}|_{P_0} + u_{yy}|_{P_0} > 0$ QUINDI $H|_{P_0}$ È SEMIDEFINITA POSITIVA

QUINDI NEL CASO $\lambda > 0$ TUTTE LE POSSIBILI CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO SONO INSTABILI.

—○—

"ENERGIA CINETICA"

ENERGIA CINETICA DEL QUADRILATERO

$$T_{M_2} = \frac{1}{2} M \dot{Q}^2 + T'_{M_2} \qquad T' = \frac{1}{2} I^{M_2}_{z,Q} \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{Q} = \{\dot{x} + d\cos\varphi\,\dot{\varphi}\ ,\ d\,\mathrm{sen}\varphi\,\dot{\varphi}\} =$$

$$= \dot{x}^2 + 2d\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + d^2\dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} =$$

$$= \dot{x}^2 + d^2\dot{\varphi}^2 + 2d\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$I^{M_2}_{z,Q} = 2I_{11} = \frac{1}{6} M a^2 \qquad \left(\text{DOVE } \sqrt{a^2 + a^2} = 2d \Rightarrow a\sqrt{2} = 2d\right) \Rightarrow a^2 = 2d^2$$

$$T_{M_2} = \frac{1}{2} M \left[\dot{x}^2 + d^2\dot{\varphi}^2 + 2d\,\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] +$$

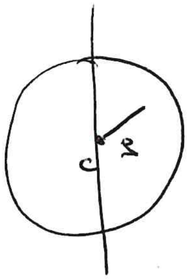
$$+ \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{6} M\, \cancel{2} d^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + dM\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{2}{3} M d^2\dot{\varphi}^2$$

NEL CASO DEL DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE

$$V_T = V_C + \Omega \wedge (T - C) = 0 \quad \Rightarrow \quad |V_C| = \Omega R = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{\dot{x}}{R}$$

DA CUI

$$T_{M_1} = \frac{1}{2} M \dot{C}^2 + T'_{M_1} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I^{M_1}_{z,C} \Omega^2$$



$$I^{M_1}_{z,c} = \sigma \iint \rho^2 \rho \, d\rho \, d\alpha = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha =$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\cancel{\pi} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$T_{M_1} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M \cancel{R^2} \cdot \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2$$

DA cui

$$\boxed{T_{TOT} = T_{M_2} + T_{F_1} = \frac{5}{4} M \dot{x}^2 + \frac{2}{3} M d^2 \dot{\theta}^2 + M d \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta.}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} M \dot{x} + M d \dot{\theta} \cos\theta.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} M \ddot{x} - M d \sin\theta . \dot{\theta}^2 + M d \cos\theta \, \ddot{\theta}$$

DA cui:

$$\boxed{\frac{5}{2} M \ddot{x} + M d \cos\theta \, \ddot{\theta} - M d \sin\theta \, \dot{\theta}^2 = Q_x = \alpha [2x + d \sin\theta.]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = - M d \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} M d^2 \dot{\theta} + M d \dot{x} \cos\theta.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} M d^2 \ddot{\theta} + M d \ddot{x} \cos\theta - M d \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta.$$

DA cui:

$$\boxed{\frac{4}{3} \cancel{M} d^2 \ddot{\theta} + M d \ddot{x} \cos\theta = Q_\theta = \alpha [x + d \sin\theta] d \cos\theta - \gamma d^2 \sin\theta}$$

INTEGRALE PRIMO L'ENERGIA $E = T - U$

MOTI APPROSSIMATI ATTORNO ALLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO $S_1 \equiv (0,0)$

LINEARIZZIAMO INTORNO:

1) $\frac{5}{2} M \ddot{x} + M d \ddot{\varphi} = \cancel{Q_x}\Big|_{S_1} + \overbrace{\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Big|_{S_1}}^{U_{xx}|_{S_1} = 2\alpha} x + \overbrace{\frac{\partial Q_x}{\partial \varphi}\Big|_{S_1}}^{U_{x\varphi}|_{S_1} = \alpha d} \varphi$

$$\boxed{\frac{5}{2} M \ddot{x} + M d \ddot{\varphi} - 2\alpha x - \alpha d \varphi = 0}$$

2) $\frac{4}{3} M d^2 \ddot{\varphi} + M d \ddot{x} = \cancel{Q_\varphi}\Big|_{S_1} + \overbrace{\frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}\Big|_{S_1}}^{U_{\varphi x}|_{S_1} = \alpha d} x + \overbrace{\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\Big|_{S_1}}^{U_{\varphi\varphi}|_{S_1} = d^2(\alpha - \gamma)} \varphi$

$$\boxed{\frac{4}{3} M d^{\cancel{2}} \ddot{\varphi} + M \cancel{d} \ddot{x} - \alpha \cancel{d} x - d^{\cancel{2}} (\alpha - \gamma) \varphi = 0}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2} M \ddot{x} + M d \ddot{\varphi} - 2\alpha x - \alpha d \varphi = 0 \\ M \ddot{x} + \frac{4}{3} M d \ddot{\varphi} - \alpha x - d(\alpha - \gamma) \varphi = 0 \end{cases}$$

CERCO SOLUZIONI $x = x_0 e^{\lambda t}$ $\varphi = \varphi_0 e^{\lambda t}$

$$\left[\frac{5}{2} M \lambda^2 - 2\alpha\right] x_0 + \left[M d \lambda^2 - \alpha d\right] \varphi_0 = 0$$

$$\left[M \lambda^2 - \alpha\right] x_0 + \left[\frac{4}{3} M d \lambda^2 - d(\alpha - \gamma)\right] \varphi_0$$

DA CUI:

$$\left(\frac{10}{3} M^2 d - M^2 d\right) \lambda^4 + \left[-\frac{5}{2} M d (\alpha - \gamma) - \frac{8}{3} \alpha M d + \alpha M d + \right.$$

$$\left. + \alpha M d\right] \lambda^2 + \left[2\alpha d(\alpha - \gamma) - \alpha^2 d\right] = 0$$

13

$$\left(\frac{7}{3} M^2 d\right)\lambda^4 + \left(\frac{5}{2} M d \gamma - \frac{19}{6} M d \alpha\right)\lambda^2 + \alpha d(\alpha - 2\gamma) = 0$$

$$\left(\frac{7}{3} M^2 d\right)\lambda^4 + \frac{Md}{2}\left(5\gamma - \frac{19}{3}\alpha\right)\lambda^2 + \alpha d(\alpha - 2\gamma) = 0$$

$$a z^2 + bz + c = 0$$

1)

SE $\alpha < 0$ $\quad a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$

VEDI RETRO

QUINDI (SE $\Delta \geq 0$) $\quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} < 0 \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} > 0$

DA CUI $z_1 < 0 \quad z_2 < 0$ MOTI ARMONICI

$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{|z_1|} \qquad \lambda_3, \lambda_4 = \pm i\sqrt{|z_2|} \Rightarrow$ STABILE

2)

SE $\alpha > 0$ $\quad$ SE $\frac{2\gamma}{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha - 2\gamma < 0$

DA CUI $a > 0 \quad c < 0 \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} < 0$

QUINDI AVREMO $z_1 < 0$ ed $z_2 > 0$ (O VICEVERSA)

DA CUI MOTI ARMONICI (PER $z_1 < 0$) E MOTI IPERBOLICI PER ($z_2 > 0$) $\Rightarrow$ INSTABILE

SE INVECE $\frac{2\gamma}{\alpha} < 1 \Rightarrow \alpha - 2\gamma > 0$

DA CUI $a > 0$, $c > 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 > 0$ (O ENTRAMBE

POSITIVE O ENTRAMBE NEGATIVE MA SE $\frac{2\gamma}{\alpha} < 1$ $\quad$ PERCIÒ $\Rightarrow$

AVREMO CHE $b < 0$ DA CUI $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} > 0$

QUINDI $z_1 > 0$ ed $z_2 > 0 \Rightarrow$ MOTI IPERBOLICI $\Rightarrow$ INSTABILE

SE INFATTI SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$$b > 0 \Rightarrow 5\gamma - \frac{19}{3}\alpha > 0 \Rightarrow 2\gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{19}{3}\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\left[\frac{2\gamma}{\alpha}\cdot\frac{5}{2} - \frac{19}{3}\right] > 0 \Rightarrow \frac{2\gamma}{\alpha} - \frac{19\cdot 2}{3\cdot 5} > 0$$

$$\frac{2\gamma}{\alpha} > \frac{38}{15} > 1 \Rightarrow \frac{2\gamma}{\alpha} > 1$$ IL CHE È ASSURDO

IN QUANTO PER IPOTESI $\frac{2\gamma}{\alpha} < 1$.

$$\longrightarrow$$

NOTA: ~~[illegible]~~

SE CALCOLIAMO IL DISCRIMINANTE

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left(5\gamma - \frac{19}{3}\alpha\right)^2 - \frac{28}{3}M^2d^2\alpha(\alpha - 2\gamma) =$$

$$= \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left\{25\gamma^2 + \frac{361}{9}\alpha^2 - \frac{190}{3}\alpha\gamma - \frac{56}{3}(\alpha^2 - 2\alpha\gamma)\right\} =$$

$$= \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left\{25\gamma^2 + \left(\frac{361}{9} - \frac{56}{3}\right)\alpha^2 - \left(\frac{190}{3} - \frac{112}{3}\right)\alpha\gamma\right\}$$

$$= \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left\{25\gamma^2 + \frac{193}{9}\alpha^2 - 26\alpha\gamma\right\} > 0 \quad (\text{PER } \alpha < 0)$$

PER $\alpha > 0$ POSSIAMO RISCRIVERE IL DISCRIMINANTE NELLA FORMA

$$\Delta = \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left\{\underline{\underline{(5\gamma)^2}} + \underline{\underline{\left(\frac{13}{3}\right)^2\alpha^2}} + \frac{26}{9}\alpha^2 - \underline{\underline{\frac{130}{3}\alpha\gamma}} + \frac{130}{3}\alpha\gamma - \frac{78}{3}\alpha\gamma\right.$$

$$= \left(\frac{Md}{2}\right)^2\left\{\left(5\gamma - \frac{13}{3}\alpha\right)^2 + 26\,\alpha^2 + 52\ldots\right\} > 0 \quad \text{PER } \alpha > 0$$