R. Finzi 38

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
ANNO ACCADEMICO 1997/98
COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE
Corso di Laurea in Ingegneria Civile
I Sessione - II Appello - 20/07/98

- tempo a disposizione due ore
- per sostenere la prova bisogna essere muniti di un documento di riconoscimento e verbalino d'esame
- non é consentita la consultazione di libri, appunti e formulari di vario genere o l'utilizzo di calcolatrici elettroniche di qualsiasi tipo
- non é consentito uscire durante la prova

Si consideri una lamina omogenea semicircolare L, di massa m e raggio R, posta in un piano verticale π e vincolata, mediante gli estremi del diametro AB, a scorrere lungo una guida rettilinea s di π. La guida s é libera di ruotare attorno ad un punto fisso O di π.

Sul centro C di L agisce una forza $\mathbf{F}_1 = -K(C - C')$, essendo $K > 0$ e C' la proiezione ortogonale di C su una retta verticale r, di π, passante per O.

Sull'estremo B del diametro di L agisce una forza $\mathbf{F}_2$ di modulo $F_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}mg$ e costantemente perpendicolare ad s.

Inoltre il piano π ruota con velocitá angolare ω costante attorno alla retta r.

Supposti tutti i vincoli lisci si chiede di:

a) trovare le condizioni di equilibrio relativo di L;

b) determinare ω^2 in modo che esistano configurazioni di equilibrio relativo in cui C coincide con O;

no c) calcolare le reazioni vincolari nelle configurazioni di cui al punto b);

d) scrivere e commentare le equazioni del moto relativo di L;

e) studiare il moto relativo di L, nell'ulteriore ipotesi che la guida s sia fissa in π ed in posizione orizzontale, sapendo che inizialmente L si trova, con atto di moto nullo, nella configurazione in cui A coincide con O.

UN SISTEMA MATERIALE S È COSTITUITO DA UN SEMIDISCO OMOGENEO Γ (1)
DI CENTRO C, MASSA m E RAGGIO R. IL SEMIDISCO È VINCOLATO
A STARE SU UN PIANO VERTICALE π LISCIO, NEL QUALE ABBIAMO
INTRODOTTO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE
Oxy CON L'ASSE y VERTICALE DISCENDENTE, ED È VINCOLATO "
MEDIANTE GLI ESTREMI DEL DIAMETRO MN A SCORRERE SU UNA
GUIDA RETTILINEA r DI π.
LA GUIDA r È LIBERA DI RUOTARE ATTORNO ALL'ORIGINE O
DEL RIFERIMENTO CARTESIANO INTRODOTTO".

ROTR.

SUL SISTEMA OLTRE ALLA FORZA PESO $m\underline{g}$ AGISCONO LE
ULTERIORI FORZE:

$$\left[\bar{F}_1 = -k(C-\bar{C}),\ C\right] \qquad \text{CON } k>0$$

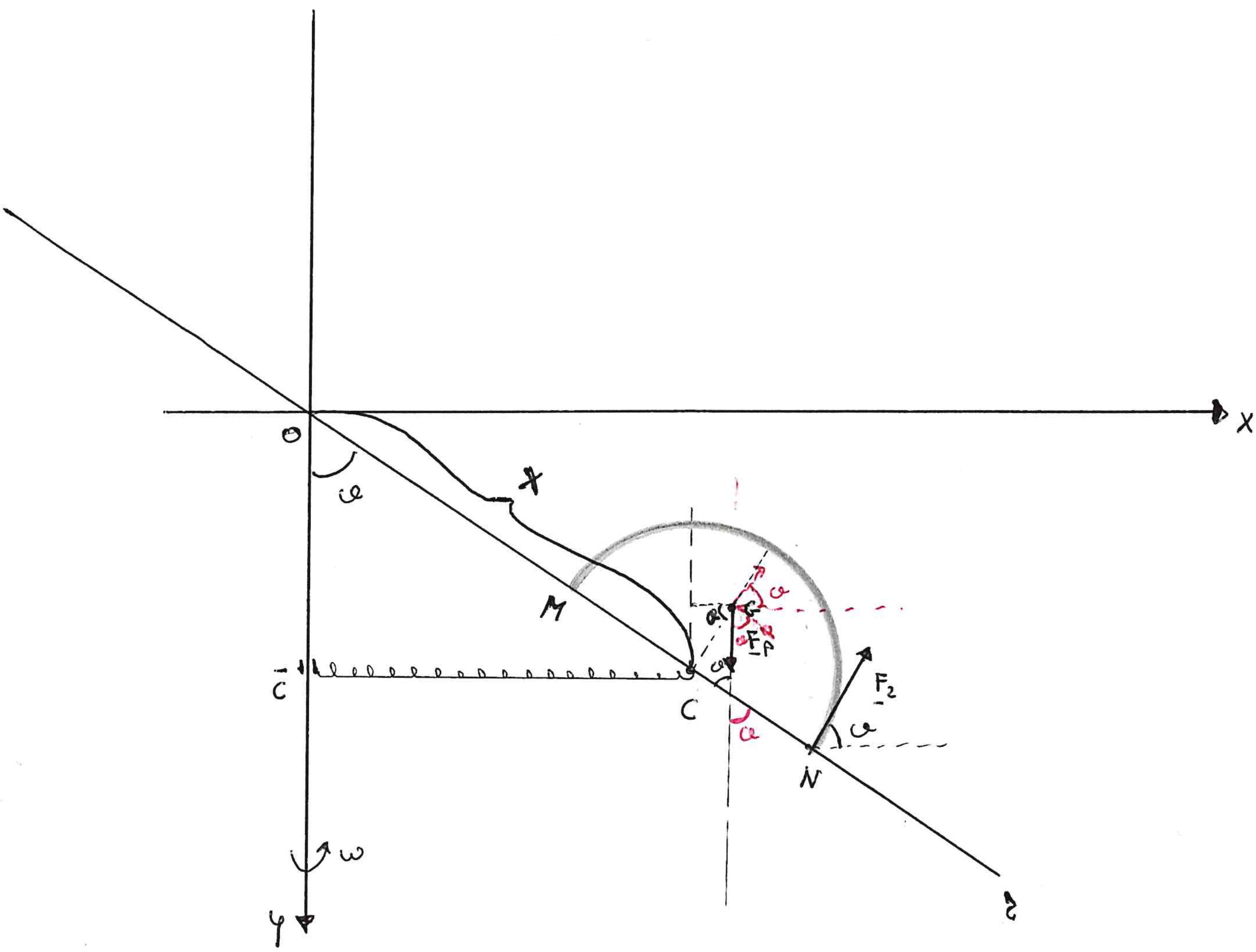
ESSENDO $\bar{C}$ LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI C SULL'ASSE DELLE y.
SULL'ESTREMO N DEL DIAMETRO DI Γ AGISCE UNA FORZA $\underline{F}_2$ DI
MODULO $F_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}mg$ ESSENDO $\underline{F}_2$ NEL PIANO π E COSTANTEMENTE
ORTOGONALE ALLA RETTA r. (AL DIAMETRO DEL SEMIDISCO) COME IN FIGURA)
INOLTRE IL PIANO π È POSTO IN ROTAZIONE UNIFORME ATTORNO
ALL'ASSE y CON VELOCITÀ ANGOLARE ω.
SUPPOSTI I VINCOLI LISCI DETERMINARE RELATIVAMENTE A π:

1) LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

2) DETERMINARE ω^2 IN MODO CHE ESISTANO CONFIGURAZIONI
DI EQUILIBRIO RELATIVO IN CUI $C \equiv O$.

3) SCRIVERE ~~[illegible]~~ LE EQUAZIONI DI MOTO

4) STUDIARE IL MOTO DI Γ NELL'IPOTESI CHE LA GUIDA r
SIA FISSA IN π E IN POSIZIONE ORIZZONTALE, SAPENDO CHE
ALLO STATO INIZIALE Γ SI TROVA CON ATTO DI MOTO NULLO
NELLA CONFIGURAZIONE IN CUI M COINCIDE CON O.



$C \equiv [x \,\mathrm{sen}\,\alpha,\ x\cos\alpha]$; $\quad M \equiv [(x-R)\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ (x-R)\cos\alpha]$

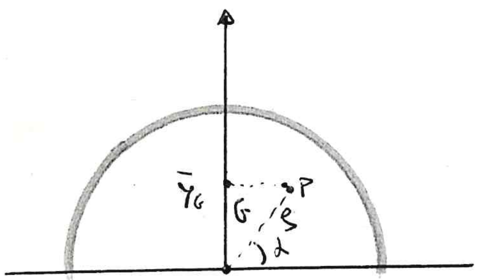
$\bar{C} = [0,\ x\cos\alpha]$ $\quad N \equiv [(x+R)\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ (x+R)\cos\alpha]$

INDICANDO(*) CON $\bar{y}_G = \overline{CG}$ $\quad G \equiv [x\,\mathrm{sen}\,\alpha + \bar{y}_G\cos\alpha,\ x\cos\alpha - \bar{y}_G\,\mathrm{sen}\,\alpha]$

ESSENDO $\bar{y}_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ $\quad$ INOLTRE AVREMO: $\quad \underline{F}_p = m[0,\ g]$

$\underline{F}_e = -k[x\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ 0]$ $\quad \underline{F}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} mg\,[\cos\alpha,\ -\mathrm{sen}\,\alpha]$

(*) NOTA: "CALCOLO DEL BARICENTRO DI UN SEMIDISCO"



PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL BARICENTRO G DEVE STARE SULLA VERTICALE.

$$\bar{y}_G = \frac{\int \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\, dm}{m} = \frac{\sigma \iint \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(\rho\, d\rho\, d\alpha)}{m} =$$

$$= \frac{\sigma \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi d\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m} = \frac{\sigma}{m}\cdot\frac{1}{3}R^3\,[\cos\alpha]_\pi^0 = \frac{2}{3}\frac{\cancel{R^3}}{\cancel{m}}\cdot\frac{2m}{\pi R^2}$$

CALCOLIAMO I POTENZIALI ASSOCIATI ALLE FORZE. $\underline{F}_P$, $\underline{F}_1$, $F_{CENTRIFUGA}$.

$$U_G^{(P)} = \underline{F}_P \cdot (G-O) = m[0, g] \cdot [x \sin\alpha + \bar{y}_G \cos\alpha, x\cos\alpha - \bar{y}_G \sin\alpha]$$

$$U_C^{(F_1)} = -\frac{1}{2} K (C-\bar{C})^2 = -\frac{1}{2} K (x \sin\alpha)^2$$

$$\Rightarrow U_G^{(P)} = mg (x\cos\alpha - \bar{y}_G \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow U_C^{(F_1)} = -\frac{1}{2} K (x \sin\alpha)^2$$

DA CUI I CONTRIBUTI ALLE SOLLECITAZIONI Q_x ed Q_α SARANNO:

$$Q_x^{(P)} = \frac{\partial U_G^P}{\partial x} = mg\cos\alpha \qquad Q_\alpha^{(P)} = -mg(x\sin\alpha + \bar{y}_G\cos\alpha)$$

$$Q_x^{(F_1)} = -K x \sin^2\alpha \qquad Q_\alpha^{(F_1)} = -K x^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

PER LA FORZA $\underline{F}_2$ AVREMO:

$$Q_x^{(F_2)} = \underline{F}_2 \cdot \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} mg [\cos\alpha, -\sin\alpha] \cdot [\sin\alpha, \cos\alpha] = 0$$

$$Q_\alpha^{(F_2)} = \underline{F}_2 \cdot \frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} mg [\cos\alpha, -\sin\alpha] \cdot [(x+R)\cos\alpha, -(x+R)\sin\alpha]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} mg (x+R)$$

RESTA DA CALCOLARE IL POTENZIALE ASSOCIATO ALLA FORZA CENTRIFUGA E LA CORRISPONDENTE SOLLECITAZIONE. PER UN ELEMENTO dm DI MASSA AVREMO:

$$dU^{(CENTR.)} = \frac{1}{2}\omega^2 |P-\bar{P}|^2 dm \Rightarrow U^{(CENT.)} = \frac{1}{2}\omega^2 \int |P-\bar{P}|^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2} I_y \omega^2$$

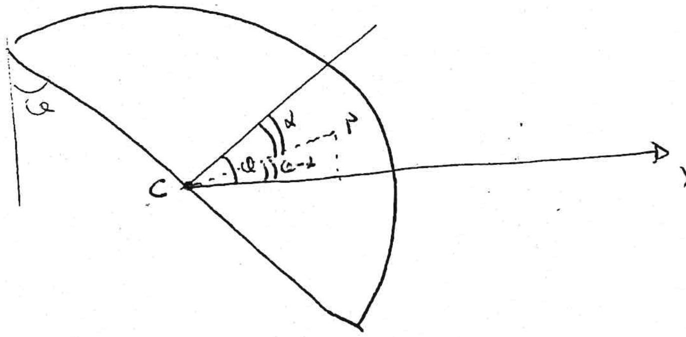
$\Rightarrow$ OPPURE TRAMITE INTEGRAZIONE DIRETTA

PAG. 3B-3

ESSENDO I_y IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALLA RETTA y.

DOVE $I_y = I_{yG} + m x_G^2$

DOVE I_{yG} E' IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALLA RETTA PASSANTE PER G E PARALLELA ALLA Y.



$$P = [x_P + y_P] = [X_c + \rho\cos(\vartheta-\alpha),\ y_P]$$

$$\bar{P} = [0_P,\ y_P] \quad \Rightarrow \quad P-\bar{P} = x_c + \rho\cos(\vartheta-\alpha)$$

$$(P-\bar{P})^2 = [x\sin\vartheta + \rho\cos(\vartheta-\alpha)]^2 = x^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2(\vartheta-\alpha) + 2x\sin\vartheta\,\rho\cos(\vartheta-\alpha)$$

$$U_c = \frac{1}{2}\omega^2\sigma\int\left[x^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2(\vartheta-\alpha) + 2x\sin\vartheta\,\rho\cos(\vartheta-\alpha)\right]\rho\,d\rho\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\sigma\left\{x^2\sin^2\vartheta\cdot\int_0^R\rho\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\alpha + \int_0^R\rho^3\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta-\alpha)\,d\alpha\right.$$

$$\left. + 2x\sin\vartheta\int_0^R\rho^2\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\vartheta-\alpha)\,d\alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{2m}{\pi R^2}\right)\left\{x^2\sin^2\vartheta\cdot\frac{R^2}{2}\pi + 2x\sin\vartheta\,\frac{R^3}{3}\left[-\sin(\vartheta-\alpha)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right.$$

$$\left. + \frac{R^4}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos[2(\vartheta-\alpha)]}{2}\,d\alpha\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left\{m\,x^2\sin^2\vartheta + x\sin\vartheta\cdot\left[\frac{2m}{\pi \cancel{R}}\cdot\frac{2}{3}R^{\cancel{3}}\right]\left[\sin(\vartheta+\pi/2) - \sin(\vartheta-\right.\right.$$

$$\left.+\left[\frac{R^4}{8}\pi + \frac{R^4}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2(\vartheta-\alpha)\,d\alpha\right]\cdot\left(\frac{2m}{\pi R^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left\{\frac{1}{4}mR^2 + m\,x^2\sin^2\vartheta + \overbrace{\left(\frac{4}{3}\frac{m}{\pi}R\right)}^{m\bar{y}_G} x\sin\vartheta\cdot\underbrace{[\sin(\vartheta+\pi/2) - \sin(\vartheta-\pi/2)]}_{2\cos\vartheta}\right.$$

$$+ mR^2\ \overbrace{\left[-\frac{1}{2}\sin[2(\vartheta-\alpha)]\right]}^{=0}{}^{\pi/2}$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$

$$\begin{cases} \sin(a + \pi/2) = \sin a \cancel{\cos\pi/2} + \sin\pi/2 \cos a = \cos a \\ \sin(a - \pi/2) = \sin a \cos\pi/2 - \sin\pi/2 \cos a = -\cos a. \end{cases}$$

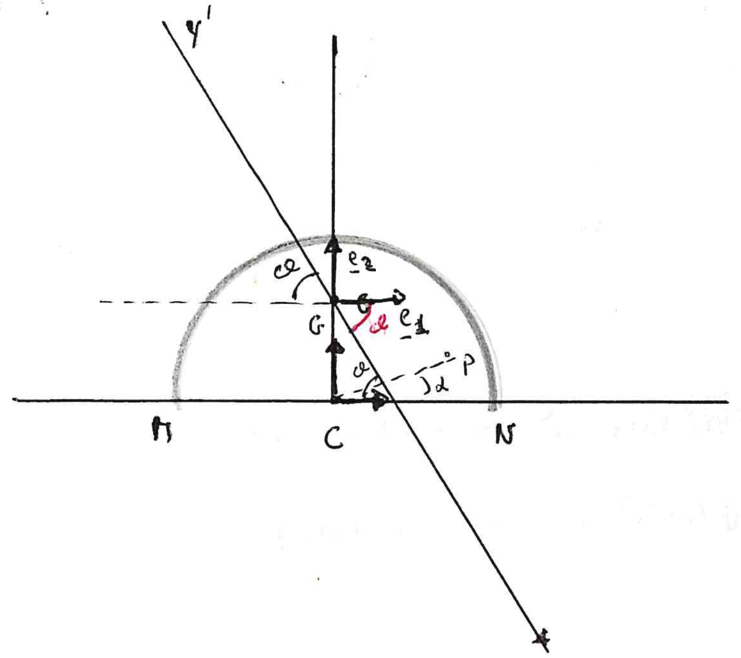
$$\boxed{\sin(a + \pi/2) - \sin(a - \pi/2) = 2\cos a}$$

$\sin(2a - \pi) = \sin(2a)\cos\pi - \sin\cancel{(\pi)}\,\cancel{\cos}(2a) = -\sin(2a)$

$\sin(2a + \pi) = \sin(2a)\cos\pi + \sin\cancel{(\pi)}\,\cancel{\cos}(2a) = -\sin(2a)$

$\Rightarrow \quad \sin[2(a-\alpha)]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

$$U_c = \frac{1}{2}\omega^2 \left\{ \frac{1}{4} mR^2 + m x^2 \sin^2 a + 2m\bar{y}_G x \sin a \cos a \right\}$$



SIA y' LA RETTA PARALLELA ALLA y PASSANTE PER G.

$$I_{yG} = I^{(G)}_{\alpha\beta}\, y'_\alpha\, y'_\beta$$

CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO DI ORIGINE G E VERSORI $\underline{e}_1$ $\underline{e}_2$ COME IN FIGURA ED $\underline{e}_3$ ORTOGONALE AL PIANO CONTENENTE IL SEMIDISCO.

IN QUESTO RIFERIMENTO

$$y'_\alpha = [\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha, 0]$$

DOVE y'_α SONO LE COMPONENTI DEL VERSORE ASSOCIATO ALLA RETTA PARALLELA ALLA y PASSANTE PER G.

E CONVENIENTE VALUTARE IL TENSORE $I_{\alpha\beta}$ NEL RIFERIMENTO TRASLATO DI ORIGINE C ED UTILIZZARE LA RELAZIONE

$$I^{(C)}_{\alpha\beta} = I^{(G)}_{\alpha\beta} + I^{(C)}_{\alpha\beta}(m, G)$$

DOVE $I^{(C)}_{\alpha\beta}(m,G)$ E' IL TENSORE DI INERZIA ASSOCIATO AD UN SISTEMA DI MASSA m POSTO NEL BARICENTRO G.

DA CUI

$$I^{(G)}_{\alpha\beta} = I^{(C)}_{\alpha\beta} - I^{(C)}_{\alpha\beta}(m,G)$$

SE PE' UN GENERICO PUNTO P DEL SEMIDISCO NEL RIF $\{C, \underline{e}_i\}$ AVRA' COORDINATE $P \equiv [\rho\cos\alpha, \rho\operatorname{sen}\alpha, 0]$ DA CUI

$$I^{(C)}_{\alpha\beta} = \int [\, x^{(P)}_2 x^{(P)}_2 \delta_{\alpha\beta} - x^{(P)}_\alpha x^{(P)}_\beta \,]\, dm \qquad dm = \sigma\, \rho\, d\rho\, d\alpha$$

$$0 \le \alpha \le \pi$$
$$0 \le \rho \le R$$

DA CUI: $I^{(C)}_{11} = \int [x^{(P)}_2]^2 dm = \sigma \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha}_{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\, d\alpha = \frac{1}{8}\sigma\pi R^4$

$\rightarrow \int_0^\pi \cos 2\alpha\, d\alpha = 0$

$$I_{22}^{(c)} = \int [x_1^{(P)}]^2\, dm = \sigma \int_0^R \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi} \underbrace{\cos^2\alpha\, d\alpha}_{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{8}\sigma \pi R^4$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cos 2\alpha\, d\alpha = 0$$

$$I_{33}^{(c)} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{4}\pi\sigma R^4$$

MENTRE $I_{12} = I_{12} = I_{21} = 0$ INOLTRE $\sigma = \dfrac{2m}{\pi R^2}$ DA CUI

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} m R^2 \qquad I_{33} = \frac{1}{2} m R^2 \qquad I_{is} = 0 \quad i \neq s.$$

ANALOGAMENTE ESSENDO $G \equiv [0, \bar{y}_G, 0]$

$$I_{\alpha\beta}^{(c)}(m, G) = m\left[x_\lambda^{(G)} x_\lambda^{(G)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G)} x_\beta^{(G)}\right] = \begin{pmatrix} m\bar{y}_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\bar{y}_G^2 \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$I_{\alpha\beta}^{(G)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m R^2 - m\bar{y}_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 - m\bar{y}_G^2 \end{pmatrix}$$

ED

$$I_{zG} = I_{\alpha\beta}^{(G)} \gamma'_\alpha \gamma'_\beta = \left(\frac{1}{4} m R^2 - m\bar{y}_G^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4} m R^2 \sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 - m\bar{y}_G^2 \cos^2\alpha$$

DA CUI

$$I_z = I_{zG} + m x_G^2 = \frac{1}{4} m R^2 - m\bar{y}_G^2\cos^2\alpha + m\left(x\sin\alpha + \bar{y}_G\cos\alpha\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 + m x^2 \sin^2\alpha + 2 m \bar{y}_G x \sin\alpha\cos\alpha$$

QUINDI:

$$U^{(CONTR.)} = \frac{1}{2}\omega^2\left\{\frac{1}{4} m R^2 + m x^2\sin^2\alpha + 2 m\bar{y}_G x \sin\alpha\cos\alpha\right\}$$

DA CUI:

$$Q_x^{(CONT.)} = \frac{\partial U^{(CONT)}}{\partial x} = \omega^2\left\{m x \sin^2\alpha + m\bar{y}_G \sin\alpha\cos\alpha\right\}$$

$$Q_\alpha^{(CONT)} = \frac{\partial U^{CONT}}{\partial \alpha} = \omega^2\left\{m x^2 \sin\alpha\cos\alpha + m\bar{y}_G x\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\right\}$$

DA CUI:

$$Q_x = mg\cos\alpha - K\,x\,\mathrm{sen}^2\alpha + \omega^2\left[m\,x\,\mathrm{sen}^2\alpha + m\bar{y}_G\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\right]$$

$$= (m\omega^2 - K)\,x\,\mathrm{sen}^2\alpha + mg\cos\alpha + m\omega^2\bar{y}_G\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$Q_\alpha = -mg\,(x\,\mathrm{sen}\alpha + \bar{y}_G\cos\alpha) - K\,x^2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}mg\,(x+R) + \omega^2\left[m\,\cancel{x}^2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + m\bar{y}_G\,x\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha)\right]$$

$$=(m\omega^2 - K)\,x^2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + m\omega^2\bar{y}_G\,x\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) -$$

$$-mg\,(x\,\mathrm{sen}\alpha + \bar{y}_G\cos\alpha) + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}mg\,(x+R)$$

NOTE LE Q_x ed Q_α LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SARANNO DATE DA:

$$\begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_\alpha = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO LE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO IN CUI $c = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\begin{cases} \cancel{m}g\cos\alpha + \cancel{m}\omega^2\bar{y}_G\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha = 0 \\ -mg\,\bar{y}_G\cos\alpha + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}mg\,R = 0 \end{cases}$$

$\cos\alpha = 0$ NON E' UNA CONDIZIONE ACCETTABILE.

DA CUI $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}R\cdot\frac{1}{\bar{y}_G} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \alpha = \pm\frac{\pi}{4}$

MA SE VOGLIAMO $\omega^2 > 0$ DOBBIAMO SCARTARE $\alpha = \frac{\pi}{4}$

AVREMO QUINDI $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ED $\omega^2 = \sqrt{2}\,\frac{g}{\bar{y}_G} = \frac{3\sqrt{2}}{4R}\,g\,\pi$

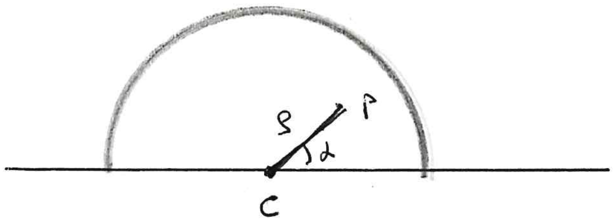
"EQUAZIONI DI MOTO"

$$T = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + T' \qquad \text{dove } T' = \frac{1}{2} I_G \dot{\vartheta}^2$$

DOVE I_G È IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ~~AL...~~ ALL'ASSE PASSANTE PER G ED ORTOGONALE A π.

RICORDIAMO CHE $\quad I_C = I_G + m \bar{y}_G^2 \quad \Rightarrow \quad I_G = I_C - m \bar{y}_G^2$

ESSENDO I_C IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE PER C ORTOGONALE AL PIANO.



$$I_C = \int \rho^2 \, dm = \int \rho^2 (\sigma \rho \, d\rho \, d\alpha) =$$

$$= \sigma \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{\sigma}{4} R^4 \pi = \frac{R^4}{4} \cancel{\pi} \cdot \frac{2m}{\cancel{\pi} R^2}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2$$

DA CUI $\quad I_G = \left(\frac{1}{2} m R^2 - m \bar{y}_G^2 \right)$

RICORDIAMO CHE: $\quad \dot{G} = \left[\dot{x} \operatorname{sen}\vartheta + x \cos\vartheta \, \dot{\vartheta} - \bar{y}_G \operatorname{sen}\vartheta \, \dot{\vartheta} \,, \right.$

$$\left. \dot{x} \cos\vartheta - x \operatorname{sen}\vartheta \, \dot{\vartheta} - \bar{y}_G \cos\vartheta \, \dot{\vartheta} \right]$$

DA CUI

$$\dot{G}^2 = \dot{x}^2 + (x^2 + \bar{y}_G^2) \dot{\vartheta}^2 - 2 y_G \dot{x} \dot{\vartheta}$$

DA CUI:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(x^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \dot{\vartheta}^2 - m \bar{y}_G \dot{x} \dot{\vartheta}$$

DA CUI CONSIDERANDO LE EQUAZIONI DI MOTO

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad \text{con } q_\alpha \equiv \{ x, \vartheta \}$$

CALCOLIAMO:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m x \dot{\vartheta}^2 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} - m \bar{y}_G \dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} - m \bar{y}_G \ddot{\vartheta}$$

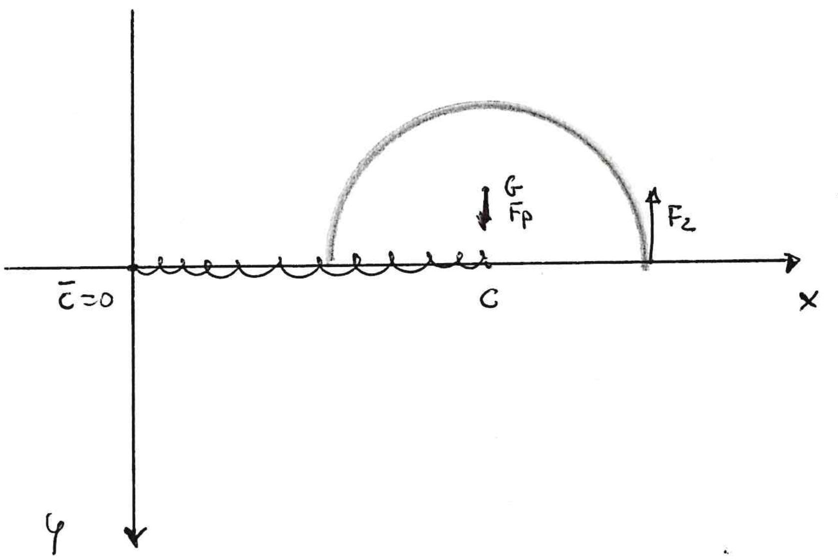
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \dot\varphi - m \bar{y}_G \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m \left(x^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \ddot\varphi - m \bar{y}_G \ddot{x} + 2 m x \dot{x} \dot\varphi$$

DA CUI AVREMO LE EQUAZ. DI MOTO

$$\begin{cases} m \ddot{x} - m \bar{y}_G \ddot\varphi - m x \dot\varphi^2 = Q_x \\ -m \bar{y}_G \ddot{x} + m \left(x^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) \ddot\varphi + 2 m x \dot{x} \dot\varphi = Q_\varphi \end{cases}$$

NEL CASO IN CUI LA GUIDA È SIA FISSA IN π GIÀ IN POSIZIONE ORIZZONTALE AVREMO:



ABBIAMO IL SOLO GRADO DI LIBER. X.

DA CUI: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad U^{(F1)} = -\frac{1}{2} K x^2$

$$U^{(CENTR.)} = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2 \right)$$

DA CUI L'EQUAZIONE DI MOTO:

$$m \ddot{x} = (m \omega^2 - K) x \implies \ddot{x} = A x \qquad \text{CON } A = \frac{m\omega^2 - K}{m}$$

CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO $x = x_0 e^{\lambda t}$ DA CUI SOSTITUENDO

$$\lambda^2 = A \qquad \text{QUINDI: } \begin{cases} A > 0 & \lambda = \pm\sqrt{A} \\ A < 0 & \lambda = \pm\sqrt{|A|}\, i \end{cases}$$

NEL 1° CASO $A > 0$ $(m\omega^2 > k)$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{\sqrt{A}t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{A}t} \\ x(0) = R \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = \sqrt{A}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}R$$

NEL 2° CASO $A < 0$ $(m\omega^2 < k)$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{i\sqrt{|A|}t} + \alpha_2 e^{-i\sqrt{|A|}t} \\ x(0) = R \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = i\sqrt{|A|}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{matrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}R$$