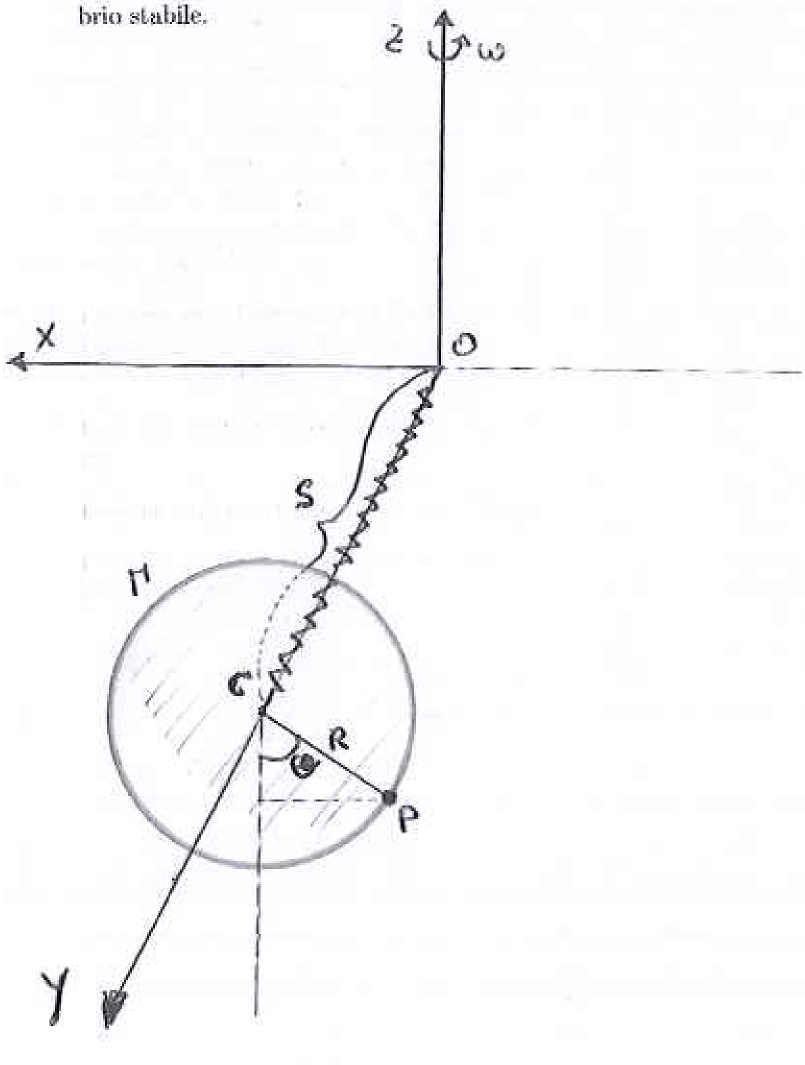
Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Prova scritta di Meccanica Analitica
Appello del 21.12.2018

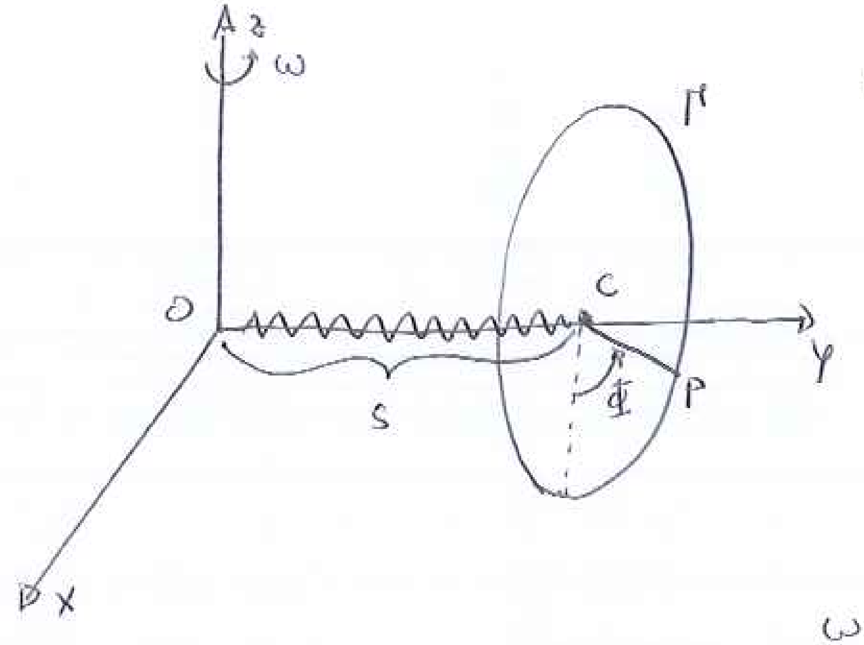
Sia dato un sistema materiale costituito da un disco omogeneo Γ di massa M, raggio R, centro C, e da un punto materiale P di massa m, rigidamente fissato in una posizione assegnata del bordo di Γ. Il disco Γ appartiene ad un piano costantemente parallelo al piano $\{x, z\}$ di un riferimento cartesiano $\{O, x, y, z\}$ ortonormale ed il centro C di Γ é vincolato a scorrere lungo l'asse y (vedi figura) attorno al quale il disco puó altresí ruotare. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono le seguenti forze

$$\{F_1 = -k(C-O),\ C\} \quad \{F_2 = -\alpha|C-O|^2(C-O),\ C\} \qquad \text{con} \quad \alpha, k > 0.$$

La terna $\{O, x, y, z\}$ ruota con velocitá angolare costante ω attorno all'asse verticale z rispetto ad un riferimento inerziale. Assumendo tutti i vincoli ideali, con le due condizioni $(M+m)\omega^2 > k$ ed $g/(R\omega^2) > 1$, e utilizzando le due coordinate lagrangiane s e ϑ mostrate in figura, determinare, rispetto al riferimento relativo $\{O, x, y, z\}$:

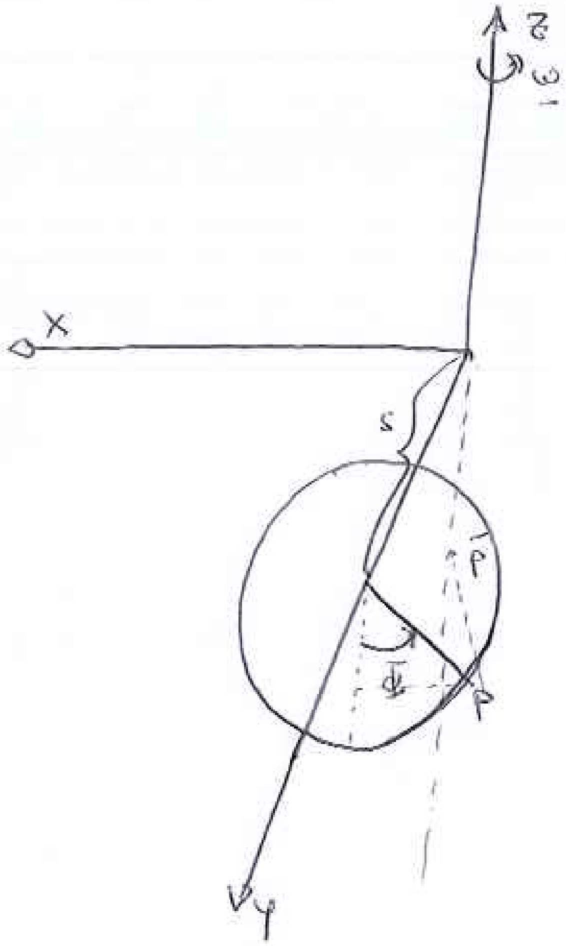
1. Le componenti lagrangiane della forza di Coriolis agente sul punto P. Provare che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis, agente sul disco Γ, sono nulle.
2. Le configurazioni di equilibrio relative studiandone, ove possibile, la stabilitá.
3. Le equazioni del moto, determinando gli eventuali integrali primi.
4. I moti in prima approssimazione, attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.





$q^\alpha \equiv \{s, \Phi\}$

$\omega = (0, 0, \omega)$



$P_z = -R\cos\Phi$

$P_y = s$

$P_x = -R\,\mathrm{sen}\,\Phi$

$P \equiv \{-R\,\mathrm{sen}\,\Phi,\ s,\ -R\cos\Phi\}$

$C = \{0, s, 0\}$

$\bar{P} \equiv \{0, 0, -R\cos\Phi\}$

$\{F_1 = -K(C-O),\ C\}$ $\qquad$ $\{F^{(P)} = mg(0,0,-1) \text{ su } P\}$

$\{F_2 = -\alpha\,|C-O|^2(C-O),\ C\}$ $\qquad$ $K, \alpha > 0$

ABBIAMO FORZE CENTRIFUGA E FORZA DI CORIOLIS SUL SISTEMA.

INOLTRE $\dot{P} = \{-R\cos\Phi\,\dot{\Phi},\ \dot{s},\ R\,\mathrm{sen}\,\Phi\,\dot{\Phi}\}$

$$U^{F_1} = -\frac{1}{2} K |C-O|^2 = -\frac{1}{2} K s^2$$

$$U_P^{(P)} = mgR\cos\varphi = F^P\cdot(P-O)$$

$$F_2 = -\alpha\, |C-O|^3 \frac{(C-O)}{|C-O|} = \underbrace{-\alpha\,\rho^3}_{f(\rho)} \frac{(C-O)}{\rho}$$

DA QUI IL POTENZIALE

$$U_{F_2} = \int f(\rho)\,d\rho = -\alpha\int \rho^3\, d\rho = -\alpha\frac{\rho^4}{4} + c.$$

Quindi $U_{F_2} = -\frac{\alpha}{4} s^4 + \text{cost.}$

$$U_P^{\text{contr.}} = \frac{1}{2}\omega^2 m (P-\bar{P})^2 \qquad \text{con } P-\bar{P} = (-R\operatorname{sen}\varphi, s, 0)$$

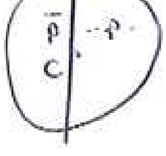
$$|P-\bar{P}|^2 = R^2\operatorname{sen}^2\varphi + s^2$$

Quindi $U_P^{\text{contr.}} = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(s^2 + R^2\operatorname{sen}^2\varphi\right) + \text{cost.}$

$$U_M^{\text{contr}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int |P-\bar{P}|^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^M_{z,O}$$

$$I^M_{z,O} = I^M_{z,C} + M(C-O)^2 = Ms^2 + \text{cost.}$$

SE CALCOLO $I^M_{z,C}$ NON DIPENDE DAI PARAMETRI LAGRANGIANI QUINDI NON INCIDONO SULLA DINAMICA. IN OGNI CASO



$$I^M_{z,C} = \sigma\iint (\rho\cos\alpha)^2 \rho\, d\rho\, d\alpha = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha}_{\pi}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\pi = \frac{1}{4} M R^2$$

$$U^{centrif.}_{M} = \frac{1}{2} M \omega^2 s^2 + cost.$$

SOLLECITAZIONI DOVUTA A CORIOLIS

$\boxed{\text{PUNTO P.}}$

$$Q^{Coriolis,P}_{s} = -2m\left(\underline{\omega} \wedge \dot{P}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial s} =$$

$$= -2m \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -R\cos\Phi\,\dot{\Phi} & \dot{s} & R\sin\Phi\,\dot{\Phi} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2m\,\omega\left(-R\cos\Phi\,\dot{\Phi}\right)$$

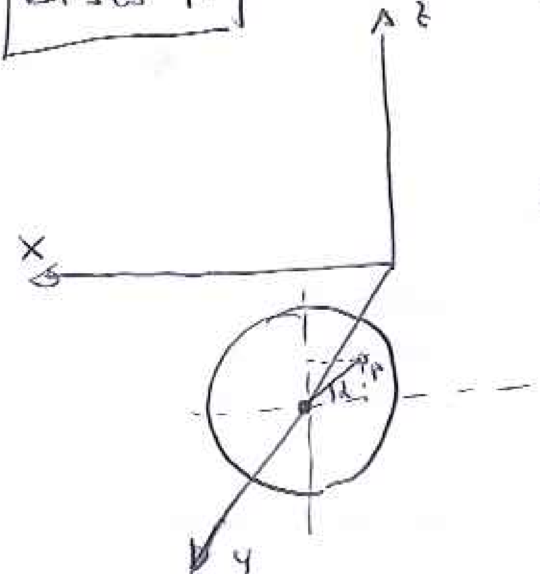
$$= 2mR\omega\,\dot{\Phi}\cos\Phi$$

$$Q^{Cor,P}_{\Phi} = -2m\left(\underline{\omega} \wedge \dot{P}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial \Phi} =$$

$$= -2m \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -R\cos\Phi\,\dot{\Phi} & \dot{s} & R\,sen\Phi\,\dot{\Phi} \\ -R\cos\Phi & 0 & R\sin\Phi \end{vmatrix} = -2m\left(+R\cos\Phi\,\dot{s}\right)\omega$$

$$= -2m\omega R\,\dot{s}\cos\Phi$$

$\boxed{\text{DISCO M}}$



UN GENERICO PUNTO $P \in M$

$P_x = -\rho\cos\alpha \qquad P_y = s \qquad P_z = \rho\sin\alpha$

$P \in M: \; P \equiv \{-\rho\cos\alpha,\; s,\; \rho\sin\alpha\}$

$0 \le \rho \le R \qquad 0 \le \alpha \le 2\pi.$

QUANDO CALCOLO LA VELOCITA' RICORDANDO CHE RUOTA CON VELOCITA' ANGOLAR $\dot{\Phi}$ AVREMO CHE $\dot{\alpha} = \dot{\Phi}$ DA CUI

(4)

$$\dot{P} = \{ \rho \sin\alpha \, \dot{\alpha} \, , \, \dot{s} \, , \, \rho \cos\alpha \, \dot{\alpha} \} \quad \text{con } \dot{\alpha} = \dot{\Phi}$$

$$\dot{P} = \{ \dot{\Phi} \rho \sin\alpha \, , \, \dot{s} \, , \, \dot{\Phi} \rho \cos\alpha \}$$

OPPURE SFRUTTANDO I CAMPI CINEMATICI PROIETTIVI

$$\dot{P} = \dot{C} + \dot{\Phi} \, \underline{e}_2 \wedge (P - C) \qquad C = (0, s, 0) \quad \dot{C} = (0, \dot{s}, 0)$$

DA CUI CALCOLANDO $P - C = \{ -\rho \cos\alpha \, , \, 0 \, , \, \rho \sin\alpha \}$

$$\dot{\Phi} \, \underline{e}_2 \wedge (P - C) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \dot{\Phi} & 0 \\ -\rho\cos\alpha & 0 & \rho \sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \dot{\Phi} \rho \sin\alpha \, \underline{e}_1 + \rho \cos\alpha \, \dot{\Phi} \, \underline{e}_3$$

$$\dot{P} = (0, \dot{s}, 0) + (\dot{\Phi} \rho \sin\alpha \, , \, 0 \, , \, \rho \cos\alpha \, \dot{\Phi}) =$$

$$= (\dot{\Phi} \rho \sin\alpha \, , \, \dot{s} \, , \, \dot{\Phi} \rho \cos\alpha)$$

QUINDI:

$$Q_s^{cor, M} = -2 \int (\omega \wedge \dot{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \, dm$$

$$Q_\Phi^{cor, M} = -2 \int (\omega \wedge \dot{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial \Phi} \, dm$$

DA QUI:

$$\left(\underline{\omega} \wedge \dot{P}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ \dot{\Phi}\,\rho \sin\alpha & \dot{s} & \dot{\Phi}\,\rho\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dot{\Phi}\,\rho\sin\alpha$$

DA QUI $\quad Q_s^{COR,D} = -2\dot{\Phi} \iint_D \rho\sin\alpha\,\sigma\,\rho\,d\rho\,d\alpha =$

$$= -2\sigma\dot{\Phi} \int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} \sin\alpha\,d\alpha = 2\sigma\dot{\Phi}\,\frac{R^3}{3}\left[\cos\alpha\right]_0^{2\pi} = 0$$

ANALOGAMENTE

$$\left(\omega \wedge \dot{P}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial \Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\Phi^{COR,D} = 0$$

QUINDI $\quad \boxed{Q_s^{COR,D} = Q_\Phi^{COR,D} = 0}$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE SE CALCOLIAMO LA POTENZA

$$Q_\alpha^{CORP}\,\dot{q}^\alpha = Q_s^{CORP}\,\dot{s} + Q_\Phi\,\dot{\Phi} = 2mR\omega\,\dot{\Phi}\,\dot{s}\cos\Phi$$
$$-\,2mR\omega\,\dot{s}\,\dot{\Phi}\cos\Phi = 0$$

IN QUANTO LE FORZE DI CORIOLIS NON COMPIONO LAVORO

$\boxed{\text{METODO DEL POTENZIALE}}$ "CALCOLO DIRETTO DEL POTENZIALE DI CORIOLIS"

Ricordiamo che

$$U^{APP} = \underline{K}_O \cdot \underline{\omega} - m\,\underline{a}_O \cdot (P-O) + \frac{1}{2} m \left[\omega \wedge (P-O) \right]^2$$

Dove $a_O = 0$ se il moto è puramente rotatorio

$$\underline{K}_O \cdot \underline{\omega} = \left[m (P-O) \wedge v \right] \cdot \underline{\omega} = \left[m\, \underline{\omega} \wedge (P-O) \right] \cdot \underline{v} =$$

$$= \left[m\, \underline{v} \wedge \omega \right] \cdot (P-O) = -\left[m\, \underline{\omega} \wedge \underline{v} \right] \cdot (P-O)$$

$$\frac{1}{2} m \left[\omega \wedge (P-O) \right]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (P - \hat{P})^2$$

Allora valutiamo il contributo che dà Coriolis (ma anche il potenziale associato alla forza di trascinamento non uniforme $-m\dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O)$ se $\dot{\omega} \neq 0$)

$$U^{COR} = -m_P \left[\underline{\omega} \wedge \dot{\underline{P}} \right] \cdot (P-O)$$

Nel caso del punto materiale P avremo:

$$\dot{P} = \{ -R\cos\Phi\, \dot{\Phi} \;,\; \dot{s} \;,\; R\sin\Phi\, \dot{\Phi} \}$$

$$U^{P}_{Coriolis} = -m \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -R\cos\Phi\, \dot{\Phi} & \dot{s} & R\sin\Phi\, \dot{\Phi} \\ -R\sin\Phi & s & -R\cos\Phi \end{vmatrix} =$$

$$= -m\omega \left[-R s \dot{\Phi} \cos\Phi + R \dot{s} \sin\Phi \right]$$

$$= m\omega R s \dot{\Phi} \cos\Phi - m\omega R \dot{s} \sin\Phi$$

VEDIAMO LE SOLLECITAZIONI:

$$\frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \dot{\Phi}} = m\omega R s \cos\Phi \qquad \frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \Phi} = -m\omega R s \dot{\Phi} \,\text{sen}\,\Phi - m\omega R \dot{s} \cos\Phi$$

DA CUI

$$-\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \Phi}\right\} = -\left\{m\omega R \dot{s}\cos\Phi - \cancel{m\omega R s\,\text{sen}\,\Phi\,\dot{\Phi}} + \cancel{m\omega R s \dot{\Phi}\,\text{sen}\,\Phi} + m\omega R \dot{s}\cos\Phi\right\}$$

$$\boxed{Q_{\Phi}^{cor,P} = -2m\omega R \dot{s}\cos\Phi}$$

ANALOGAMENTE:

$$\frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \dot{s}} = -m\omega R\,\text{sen}\,\Phi \qquad \frac{\partial U^{cor,P}}{\partial s} = m\omega R \dot{\Phi}\cos\Phi$$

$$-\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U^{cor,P}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial U^{cor,P}}{\partial s}\right\} = -\left\{-m\omega R\cos\Phi\,\dot{\Phi} - m\omega R\dot{\Phi}\cos\Phi\right\}$$

$$\boxed{Q_{s}^{cor,P} = 2m\omega R\dot{\Phi}\cos\Phi}$$

CALCOLIAMO IL POTENZIALE DELLE FORZE CORIOLIS SU Γ

$$U^{cor,\Gamma} = -\int [\underline{\omega} \wedge \dot{P}]\cdot(P-O)\,dm \qquad \forall P \in M$$

$$\dot{P} = [\dot{\Phi}\rho\,\text{sen}\,\alpha,\ \dot{s},\ \dot{\Phi}\rho\cos\alpha]$$

$$P = [-\rho\cos\alpha,\ s,\ \rho\,\text{sen}\,\alpha]$$

Da cui:

$$[\underline{\omega} \wedge \dot{P}] \cdot (P - O) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ \dot{\Phi}\, \rho \sin\alpha & \dot{s} & \dot{\Phi}\, \rho \cos\alpha \\ -\rho\cos\alpha & s & \rho \sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \omega \left[s\, \dot{\Phi}\, \rho \sin\alpha + \dot{s}\, \rho \cos\alpha \right]$$

Quindi:

$$U^{cor,P} = -\omega \int \left(s\, \dot{\Phi}\, \rho \sin\alpha + \dot{s}\, \rho \cos\alpha \right) dm =$$

$$= -\omega\, s\, \dot{\Phi}\, \sigma \iint \rho \sin\alpha\, \rho\, d\rho\, d\alpha - \omega\, \dot{s}\, \sigma \iint \rho \cos\alpha\, \rho\, d\rho\, d\alpha$$

$$= -\omega\, s\, \dot{\Phi}\, \sigma \left\{ \int_0^R \rho^2 d\rho \left[\cancel{\int_0^{2\pi} \sin\alpha\, d\alpha} \right] \right.$$

$$\left. - \omega\, \dot{s}\, \sigma \left\{ \int_0^R \rho^2 d\rho \left[\cancel{\int_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha} \right] \right\} \right. = 0$$

Quindi $Q_{\Phi}^{cor,P} = Q_{s}^{cor,P} = 0$.

— o —

AVREMO QUINDI LE SOLLECITAZIONI TOTALI

$$Q_s = \frac{\partial U^{F_1}}{\partial s} + \frac{\partial U^{F_2}}{\partial s} + \frac{\partial U_p^{contr.}}{\partial s} + \frac{\partial U_M^{contr.}}{\partial s} + Q_s^{cor,P} \cancel{+ \frac{\partial U_p^{(P)}}{\partial s}}$$

$$= -ks - \alpha s^3 + m\omega^2 s + M\omega^2 s + 2m\omega R \dot{\Phi} \cos\Phi .$$

$$\boxed{Q_s = \left[(M+m)\omega^2 - k\right] s - \alpha s^3 + 2m\omega R \dot{\Phi} \cos\Phi}$$

$$Q_\Phi = \cancel{\frac{\partial U^{F_1}}{\partial \Phi}} + \cancel{\frac{\partial U^{F_2}}{\partial \Phi}} + \frac{\partial U_p^{centrif.}}{\partial \Phi} + \cancel{\frac{\partial U_M^{centrif.}}{\partial \Phi}} + \frac{\partial U^{(P)}}{\partial \Phi} +$$

$$+ Q_\Phi^{cor,P} =$$

$$\boxed{Q_\Phi = mR^2\omega^2 \sin\Phi \cos\Phi - mgR \sin\Phi - 2mR\omega \dot{s} \cos\Phi .}$$

"EQUILIBRIO" $(\dot{\Phi} = \dot{s} = 0)$

1) $\left[(M+m)\omega^2 - k\right] s - \alpha s^3 = 0$

2) $\left[\omega^2 R \cos\Phi - g\right] \sin\Phi = 0$

EQUAZIONI DISACCOPPIATE

DALLA 1ª $\Rightarrow$ $s = 0$ E $s = \pm \sqrt{\dfrac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}}$

DALLA 1ª $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \sin\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0, \pi \\ \cos\Phi = \dfrac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \Phi = \Phi^* \quad \Phi = -\Phi^* \end{cases}$$

SE E SOLO SE $\dfrac{g}{\omega^2 R} < 1$ CON $\Phi^* = \arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 R}\right)$

DA CUI AVREMO LE CONFIGURAZIONI:

$$s_1 \equiv (0, 0) \; ; \; s_2 (0, \bar{u}) \; ; \; s_3 \equiv \left\{ \sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}} \; , 0 \right]$$

$$s_4 = \left\{ +\sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}} \; , \bar{u} \right] \quad s_5 \equiv \left\{ -\sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}} \; , 0 \right]$$

$$s_6 = \left\{ -\sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}} \; , \bar{u} \right]$$

INOLTRE SE VALE LA CONDIZIONE $g / \omega^2 R < 1$ AVREMO LE ALTRE 6 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

$$s_7 \equiv (0, \Phi^*) \qquad s_8 = (0, -\Phi^*)$$

$$s_9 = (\sqrt{} \; , \Phi^*) \; ; \; s_{10} \left\{ \sqrt{} \; , -\Phi^* \right\}$$

$$s_{11} = \left\{ -\sqrt{} \; , \Phi^* \right] \; , \; s_{12} = \left\{ -\sqrt{} \; , -\Phi^* \right]$$

PER SEMPLICITÀ ASSUMEREMO NEL COMPITO CHE

$(M+m)\omega^2 > k$ E $g / R\omega^2 > 1$

SOTTO QUESTE CONDIZIONI PONENDO CON $\bar{s} = \sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}}$

AVREMO SOLO 6 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\mathcal{S}(s, \Phi) = \{ s_1 \equiv (0, 0) \; ; \; s_2 \equiv (0, \bar{u}) \; ; \; s_3 = (\bar{s}, 0) \; ; \; s_4 = (\bar{s}, \bar{u})$$

$$s_5 \equiv (-\bar{s}, 0) \; , \; s_6 \equiv (-\bar{s}, \bar{u}) \; \}$$

OSSERVIAMO CHE ESSENDO LE FORZE DI CORIOLIS DI TIPO DISSIPATIVO (POTENZA NULLA IN QUESTO CASO) ALLORA LA STABILITÀ OTTENUTA IN LORO ASSENZA SI CONSERVERÀ, NULLA POSSIAMO DIRE SULLA INSTABILITÀ.

UTILIZZIAMO QUINDI LO STUDIO DEI MASSIMI DEL POTENZIALE
IN ASSENZA DELLE FORZE DI CORIOLIS.
IN QUESTO CASO AVREMO

$$U = mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}Ks^2 - \frac{d}{4}s^4 + \frac{1}{2}m\omega^2(s^2 + R^2\sin^2\vartheta)$$
$$+ \frac{1}{2}M\omega^2 s^2 + \text{COST.}$$

DA QUI LE DUE SOLLECITAZIONI

$$\begin{cases} Q_s = [(M+m)\omega^2 - K]s - ds^3 \\ Q_\vartheta = m\omega^2R^2\sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\sin\vartheta \end{cases}$$

ED

$$U_{ss} = [(M+m)\omega^2 - K] - 3ds^2$$

$$U_{s\vartheta} = U_{\vartheta s} = 0$$

$$U_{\vartheta\vartheta} = -mgR\cos\vartheta + m\omega^2R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

VALUTIAMO SOTTO QUESTE CONDIZIONI LA STABILITÀ DELLE
6 CONFIGURAZIONI:

PER $s=0$

$$Q_s = (M+m)\omega^2 - K > 0 \quad \text{SEMPRE}$$

QUINDI DELLE DUE CONFIGURAZIONI

$S_1 = (0, 0)$ $\quad S_2 = (0, \pi)$ NON POTREMO AVERE UN MASSIMO

QUINDI NULLA POSSIAMO DIRE SULLA LORO STABILITÀ, A CAUSA
DELLE SOLLECITAZIONI DI CORIOLIS.

PER $s = \pm\bar{s}$ LA SITUAZIONE È EQUIVALENTE QUINDI
STUDIAMO SOLTANTO ~~QUI~~ IL CASO $s = \bar{s}$

$$U_{ss}\Big|_{s=\bar{s}} = \left((M+m)\omega^2 - k\right) - 3\alpha s^2\Big|_{s=\bar{s}} =$$

$$= (M+m)\omega^2 - k \quad - 3\cancel{\alpha}\cdot\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\cancel{\alpha}} = -2\left[(M+m)\omega^2 - k\right] < 0$$

da cui i due casi:

1) $S_3 \equiv (\bar{s}, 0)$ $\qquad U_{ss}\Big|_{s=\bar{s}} < 0$

$$U_{\varphi\varphi}\Big|_{S_3} = -mgR + m\omega^2R^2 = m\omega^2R^2\left[1 - \frac{g}{R\omega^2}\right] < 0$$

Quindi $H(s,\varphi)\Big|_{S_3} > 0$ massimo $\Rightarrow$ stabile

Quindi $S_3 = (\bar{s}, 0)$ e $S_5 = (-\bar{s}, 0)$

continueranno ad essere stabili anche in presenza delle forze di Coriolis

2) $S_4 = (\bar{s}, \pi) \Rightarrow U_{ss}\Big|_{s=\bar{s}} < 0$

$$U_{\varphi\varphi}\Big|_{S_3} = mgR + m\omega^2R^2 > 0 \Rightarrow H(s,\varphi)\Big|_{S_3} < 0$$

No max $\Rightarrow$ nulla possiamo dire sulla stabilità a causa di Coriolis.

Conclusione:

$S_3 \equiv (\bar{s}, 0)$ e $S_5 = (-\bar{s}, 0)$ sono configurazioni stabili

mentre per le rimanenti configurazioni:

$S_1 = (0,0)$ $\quad S_2 \equiv (0,\pi)$ $\quad S_4 = (\bar{s},\pi)$ $\quad S_6 \equiv (-\bar{s},\pi)$

non possiamo dire nulla.

ENERGIA CINETICA:

$$T = T_P + T_M$$

$$T_P = \frac{1}{2} m \dot{P}^2$$

$$\dot{P} = \{ -R \cos\Phi \, \dot{\Phi} \, , \, \dot{s} \, , \, R \sin\Phi \, \dot{\Phi} \}$$

$$\dot{P}^2 = R^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{s}^2 \quad \Rightarrow \quad T_P = \frac{1}{2} m \left[R^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{s}^2 \right]$$

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{C}^2 + T'_M \qquad \text{DOVE} \qquad T'_M = \frac{1}{2} I^M_{YC} \dot{\Phi}^2$$

SE CALCOLIAMO:

$$I^M_{Y,C} = \sigma \iint \rho^2 \rho \, d\rho \, d\alpha = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} \frac{R^4}{4} \cdot 2\cancel{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$

DA CUI $\quad T'_M = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\Phi}^2 \qquad \dot{C}^2 = \dot{s}^2$

QUINDI $\quad T_M = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\Phi}^2$

QUINDI $\quad \boxed{T = \frac{1}{2} (M+m) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) R^2 \dot{\Phi}^2}$

DA CUI: $\quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \, , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (M+m) \dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (M+m) \ddot{s}$

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi} = 0 \, , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} = \left(m + \frac{M}{2} \right) R^2 \dot{\Phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} = \left(m + \frac{M}{2} \right) R^2 \ddot{\Phi}$$

DA CUI LE EQUAZIONI DEL MOTO!

1) $(M+m)\ddot{s} = Q_s = \left[(M+m)\omega^2 - k\right] s - \alpha s^3 + 2 m \omega R \dot{\Phi} \cos\Phi.$

2) $R^2\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{\Phi} = Q_\Phi = m R^2 \omega^2 \sin\Phi \cos\Phi - m g R \sin\Phi - 2 m R \omega \dot{s} \cos\Phi.$

SE ADESSO SCRIVIAMO LA LAGRANGIANA $\mathcal{L} = T + U^{(cons)}$

AVREMO
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right) R^2 \dot{\Phi}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(M+m)\omega^2 - k\right] s^2 - \frac{\alpha}{4} s^4 + m g R \cos\Phi$$
$$+ \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\Phi$$

AVREMO LE DUE EQUAZIONI DI LAGRANGE NELLA FORMA.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = Q_s^{(COR),P} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = Q_\Phi^{(COR),P} \end{cases}$$

SE CONSIDERO LA $E = T - U^{(cons)}$ AVREMO

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\gamma} = Q_s^{(COR),P}\,\dot{s} + Q_\Phi^{(COR),P}\,\dot{\Phi} = 0$$

(CIOÈ LA FORZA DI CORIOLIS NON COMPIE LAVORO)

QUINDI

$$E = T - U^{(cons)} = \text{COSTANTE} \quad (\text{INTEGRALE PRIMO})$$

MOTI LINEARIZZATI ATTORNO ALLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO $S_{1,2}(\bar{s}, 0)$

1) $(M+m)\ddot{s} = \left\{\left[(M+m)\omega^2 - k\right] - 3\alpha \bar{s}^2\right\}(s - \bar{s}) +$
$$+ 2 m \omega R \left(\dot{\Phi} - 0\right)$$

$$2) R^2\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{\Phi} = m\omega^2R^2\left[1-\frac{g}{\omega^2R}\right]\cdot(\Phi-0) - 2m\omega R\cdot\dot{s}$$

DA CUI:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{s} + 2\left[(M+m)\omega^2 - u\right](s-\bar{s}) - 2m\omega R\dot{\Phi} = 0 \\ R^2\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{\Phi} + \left[\frac{g}{\omega^2R}-1\right]m\omega^2R^2\,\Phi + 2m\omega R\dot{s} = 0\end{cases}$$

CERCO SOLUZIONI $s-\bar{s} = s_0 e^{\lambda t}$ $\Phi = \Phi_0 e^{\lambda t}$

$$\begin{cases}\left\{(M+m)\lambda^2 + 2\left[(M+m)\omega^2-u\right]\right\}s_0 + (-2m\omega R\lambda)\Phi_0 = 0 \\ (2m\omega R\lambda)s_0 + \left\{R^2\left(m+\frac{M}{2}\right)\lambda^2 + m\omega^2R^2\left(\frac{g}{\omega^2R}-1\right)\right\}\Phi_0 = 0\end{cases}$$

DA CUI PER AVERE SOLUZIONI NON BANALI:

$$R^2\left[(M+m)\left(m+\frac{M}{2}\right)\right]\lambda^4 + \Big\{(M+m)m\omega^2R^2\underbrace{\left(\frac{g}{\omega^2R}-1\right)}_{>0} +$$

$$+2\underbrace{\left[(M+m)\omega^2-u\right]}_{>0}R^2\left(m+\frac{M}{2}\right) + (2m\omega R)^2\Big\}\lambda^2 +$$

$$+2\underbrace{\left[(M+m)\omega^2-u\right]}_{>0}m\omega^2R^2\underbrace{\left(\frac{g}{\omega^2R}-1\right)}_{>0} = 0$$

$\begin{cases}\text{PONENDO } \lambda^2 = z \\ \text{ASSUMENDO CHE } \Delta \geq 0\end{cases} \Rightarrow a z^2 + b z + c = 0$

DOVE $\begin{cases} a = (M+m)\left(m+\frac{M}{2}\right) > 0 \\ b = \dots > 0 \\ c = \dots > 0\end{cases}$

DA CUI USCENDO: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} < 0$ $z_1\cdot z_2 = \frac{c}{a} > 0$

$\Rightarrow z_1<0$ $z_2<0$ $\Rightarrow$ MOTI ARMONICI $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{|z_1|}$ $\lambda_3, \lambda_4 = \pm i\sqrt{|z_2|}$