Università degli studi di Catania
Corso di laurea in Matematica
Fisica Matematica
Appello del 21.07.2016

Un sistema materiale é costituito da due dischi omogenei γ e Γ rispettivamente di centri C e G e di raggi R ed r aventi la stessa massa M. Il sistema é vincolato a stare su un piano verticale Π liscio, nel quale si é introdotto un sistema di riferimento ortogonale $\{O, x, y\}$ con l'asse y verticale ascendente, ed é soggetto ai seguenti ulteriori vincoli: un diametro MN di γ scorre senza attrito sull'asse delle x, mentre Γ rotola, esternamente su γ, senza strisciare.
Sul sistema, oltre alla forza peso $M\mathbf{g}$ agiscono le ulteriori forze

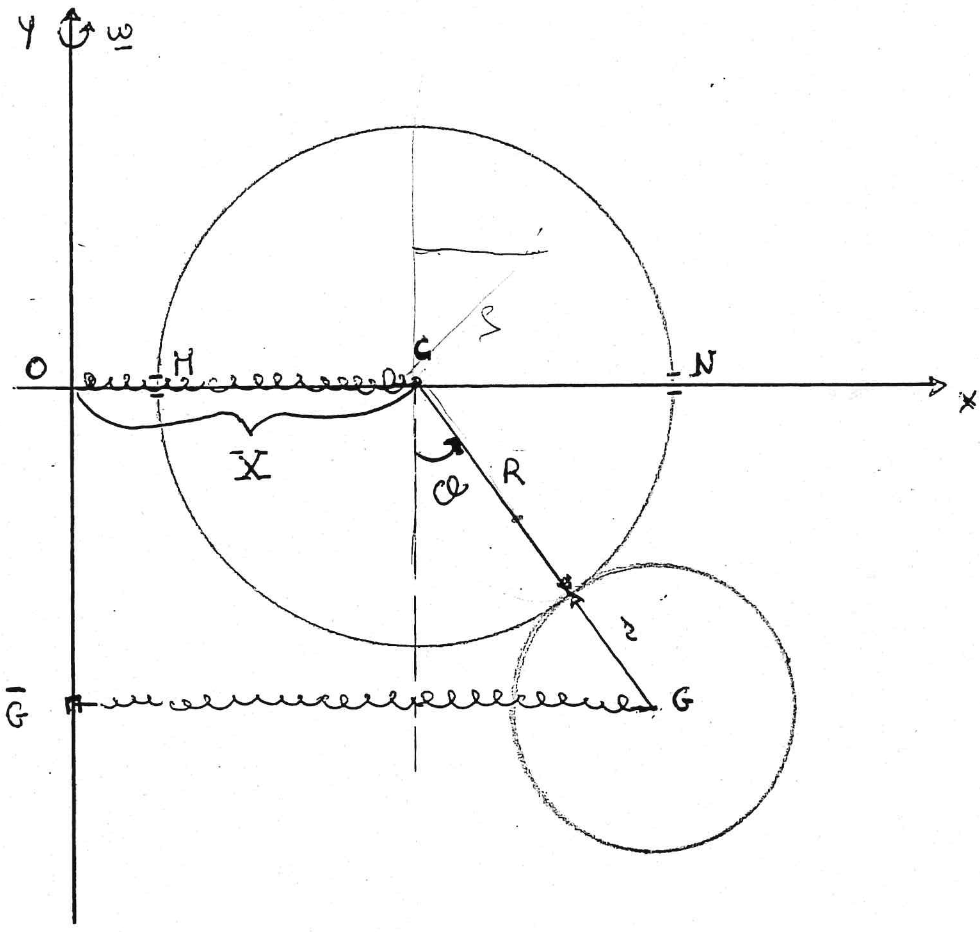
$$\{F_1 = -k\,(C - O),\, C\} \qquad \{F_2 = -k\,(G - \overline{G}),\, G\}$$

essendo $\overline{G}$ la proiezione ortogonale di G sull'asse y. Inoltre il piano Π é posto in rotazione uniforme attorno all'asse y con velocitá angolare ω soddisfacente alla condizione $k \geq M\omega^2$. Ponendo $R + r = D$, *Si chiede di determinare:*

1. Le configurazioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilitá nei casi in cui $k \neq M\omega^2$ e $k \neq M\omega^2 + 2\,g\,\frac{M}{D}$.

2. Determinare le equazioni di moto e gli eventuali integrali primi.

3. Studiare i moti linearizzati attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui il disco Γ occupa la posizione piú bassa consentita dai vincoli.



$$q^\alpha = \{X, \theta\}$$

UN SISTEMA MATERIALE S È COSTITUITO DA DUE DISCHI OMOGENEI γ e Γ RISPETTIVAMENTE DI CENTRI C e G E DI RAGGI R ED 2 AVENTI LA STESSA MASSA m. IL SISTEMA, VINCOLATO A STARE SU UN PIANO VERTICALE π (LISCIO), NEL QUALE ABBIAMO INTRODOTTO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE Oxy CON L'ASSE y VERTICALE ASCENDENTE, È SOGGETTO AI SEGUENTI ULTERIORI VINCOLI:

UN DIAMETRO MN DI γ SCORRE (SENZA ATTRITO) SULL'ASSE
[TUTTI I VINCOLI PRECEDENTI SONO REALIZZATI SENZA ATTRITO]
x, MENTRE Γ ROTOLA SU γ, ESTERNAMENTE, SENZA STRISCIARE.

SUL SISTEMA, OLTRE ALLA FORZA PESO $m\underline{g}$, AGISCONO LE ULTERIORI FORZE

$$\left[\underline{F}_1 = -K(C-O),\ C\right]$$

$$\left[\underline{F}_2 = -K(G-\bar{G}),\ G\right]$$

ESSENDO $\bar{G}$ LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI G SULL'ASSE DELLE y.

INOLTRE IL PIANO π È POSTO IN ROTAZIONE UNIFORME ATTORNO ALL'ASSE y CON VELOCITÀ ANGOLARE ω, ~~CON LA~~ SODDISFACENTE ALLA CONDIZIONE ~~CHE~~ $K \geq M\omega^2$.

DETERMINARE RELATIVAMENTE A π:

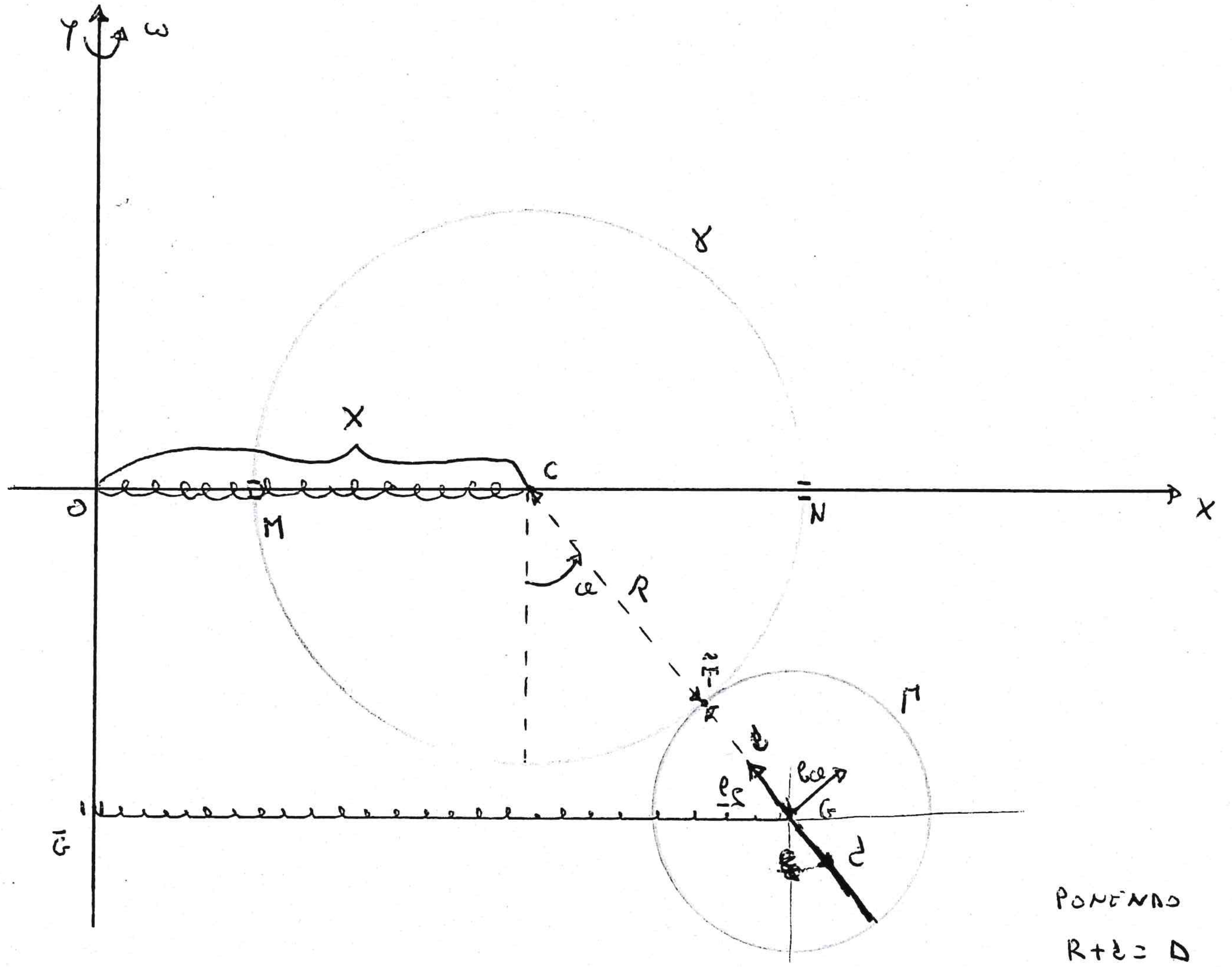
A) LE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO, STUDIANDONE LA STABILITÀ

B) SCRIVERE LE EQUAZIONI DI MOTO E GLI EVENTUALI INTEGRALI PRIMI

c) STUDIARE I MOTI IN PRIMA APPROSSIMAZIONE ATTORNO ALLA EVIDENTE CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO IN CUI

~~$C = (0,0)$ e $G = (0, -(R+\ell))$ con $k \geq m\omega^2$~~

(IL DISCO Γ OCCUPA LA POSIZIONE PIÙ BASSA CONSENTITA ~~[illegible]~~)



PONENDO $R+\ell = D$

$C = [x, 0]$

$G \equiv [x + D \operatorname{sen}\varphi, \; - D\cos\varphi]$

$\bar{G} = [0, \; - D\cos\varphi]$

SE $P \in \begin{cases}\gamma \\ \Gamma\end{cases}$ AVREMO INOLTRE SU OGNI ELEMENTO INFINITESIMO DI MASSA dm DI γ e di Γ LA FORZA CENTRIFUGA

$$d\underline{F} = \omega^2 (P - \bar{P})\, dm$$

(DOVE $\bar{P}$ È LA PROIEZIONE DI P SULL'ASSE Y)

DA cui

$$F^{(CENT.)} = \omega^2 \int (P - \bar{P})\, dm$$

PER DETERMINARE LE CONFIGURAZ. DI EQUILIBRIO, SARÀ NECESSARIO CALCOLARE LE SOLLECITAZIONI Q_α, Q_x O ANALOGAMENTE CALCOLARE I POTENZIALI.

"CALCOLO DEI POTENZIALI"

$$U_G^{(PESO)} = \underline{F}_G^{(P)} \cdot (G-O)$$

$$U_C^{(F_1)} = -\frac{1}{2} K \, (C-O)^2$$

$$U_G^{(F_2)} = -\frac{1}{2} K \, (G-\bar{G})^2$$

$$U^\gamma = \frac{1}{2}\omega^2 \int |P-\bar{P}|^2 \, dm = \frac{1}{2} I_y^\gamma \omega^2$$

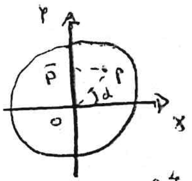
$$U^\Gamma = \frac{1}{2}\omega^2 \int |P-\bar{P}|^2 \, dm = \frac{1}{2} I_y^\Gamma \omega^2$$

DOVE:

$$I_y^\gamma = \overbrace{I_{yC}^\gamma + m\,(C-O)^2}^{\left(\frac{1}{4} m R^2 + m x^2\right)}$$

$$I_y^\Gamma = \overbrace{I_{yG}^\Gamma + m\,(G-\bar{G})^2}^{\frac{1}{4} m r^2 + m (x + \Delta \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

(ESSENDO I_{yC}^γ ED I_{yG}^Γ RISPETTIVAMENTE I MOMENTI DI INERZIA DI γ e di Γ RISPETTO AD UNA RETTA $\parallel y$ E PASSANTE RISPETTIVAMENTE PER C E PER G)



$$I_{yO}^\gamma = \int (P-\bar{P})^2 \, dm = \sigma \iint \rho^2 \cos^2\alpha \, \rho \, d\rho \, d\alpha$$

$$= \sigma \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\alpha}_{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \, d\alpha = \sigma \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \, d\alpha$$

$$= \sigma \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi + \cancel{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\alpha \, d\alpha} \right] = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cancel{\pi} = \frac{1}{4} M R^2;$$

IN PARTICOLARE $\quad I_{yC}^\gamma = \frac{1}{4} M R^2 \qquad I_{yG}^\Gamma = \frac{1}{4} M r^2$

AVREMO COSÌ:

$$U_{TOT} = mg \, \Delta \cos\alpha + \frac{1}{2} (m \omega^2 - K) \, x^2 + \frac{1}{2} (m \omega^2 - K) \, (x + \Delta \operatorname{sen}\alpha)^2 + \text{COST.} \qquad (1)$$

DA CUI:

$$\begin{cases} Q_x = \dfrac{\partial U_{TOT}}{\partial x} = (m\omega^2 - K)\,(2x + \Delta \operatorname{sen}\alpha) \\ \\ Q_\alpha = \dfrac{\partial U_{TOT}}{\partial \alpha} = -mg\,\Delta \operatorname{sen}\alpha + (m\omega^2 - K)\,(x + \Delta \operatorname{sen}\alpha)\,\Delta \cos\alpha \end{cases} \qquad (2)$$

FORZE

$$\begin{cases} \underline{F}_P = mg\,(0,-1) & \text{su } G \\ F_1 = -K\,(C-O) & \text{su } C \\ F_2 = -K\,(G-\bar{G}) & \text{su } G \\ F^{CENT} = \omega^2 \int (P-\bar{P})\,dm & P \in \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ M \end{matrix} \right. \quad \bar{P} \text{ proiezione di } P \text{ su } \vec{y} \end{cases}$$

CONDIZIONE $\quad m\omega^2 < K < m\omega^2 + \dfrac{2mg}{\Delta} \qquad \Delta = R+\ell$

$C \equiv \{x, 0\} \qquad G = \{x + \Delta \sin\theta,\ -\Delta\cos\theta\}$

$\qquad\qquad\quad \bar{G} = \{0,\ -\Delta\cos\theta\}$

$P \in M \Rightarrow P \equiv \{x + \Delta\sin\theta + \rho\cos\alpha,\ -\Delta\cos\theta + \rho\sin\alpha\}$

$\tilde{P} \in \gamma \Rightarrow \tilde{P} = \{x + \rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha\}$

"CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI"

$$Q_x = \left[mg\,(0,1) - K\,(x+\Delta\sin\theta, 0)\right]\cdot\frac{\partial G}{\partial x} - K\,(x,0)\cdot\frac{\partial C}{\partial x}$$

$$+\ Q_x^{(CENT.\,\gamma)} + Q_x^{(CENT,\,M)}$$

$\dfrac{\partial G}{\partial x} = (1,0)\ ,\quad \dfrac{\partial C}{\partial x}\ (1,0) \qquad \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial x} = (1,0)\ ,\quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = (1,0)$

$$d\,Q_x^{(CENT,\gamma)} = \omega^2\,(x+\rho\cos\alpha, 0)\,dm\cdot\frac{\partial\hat{P}}{\partial x} = \omega^2\,(x+\rho\cos\alpha)\,dm$$

DA CUI INTEGRANDO

$$Q_x^{(CENT,\gamma)} = \sigma\,\omega^2 \int (x+\rho\cos\alpha)\,\rho\,d\rho\,d\alpha = \sigma\,\omega^2\left\{ x\int_0^R \rho\,d\rho\int_0^{2\pi} d\alpha \right. +$$

$$\left. + \int_0^R \rho^2 d\rho \cancel{\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha}\right\} = \frac{m}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}}\,\omega^2\cdot x\,\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2\pi} = m\omega^2 x$$

$$d\,Q_x^{(CENT,M)} = \omega^2\,(x+\Delta\sin\theta+\rho\cos\alpha, 0)\,dm\cdot\frac{\partial P}{\partial x} = \omega^2(x+\Delta\sin\theta+\rho\cos\alpha)\,dm$$

DA CUI INTEGRANDO

$$Q_x^{(CONT.\,P)} = \sigma\omega^2 \iint [x + \Delta\sin\alpha + \rho\cos\alpha]\,\rho\, d\rho\, d\alpha =$$

$$= \sigma\omega^2 \left\{ (x+\Delta\sin\alpha)\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha + \int_0^R \rho^2 d\rho\, \cancel{\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, d\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi R^2}}\,\omega^2 (x+\Delta\sin\alpha)\,\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2\pi} = m\omega^2(x+\Delta\sin\alpha)$$

da cui

$$Q_x = -K(x+\Delta\sin\alpha) - Kx + m\omega^2 x + m\omega^2(x+\Delta\sin\alpha)$$

$$= (m\omega^2 - K)x + (m\omega^2-K)(x+\Delta\sin\alpha) =$$

$$\boxed{Q_x = (m\omega^2-K)[2x+\Delta\sin\alpha]}$$

$$Q_\alpha = \{mg(0,-1) - K(x+\Delta\sin\alpha, 0)\}\cdot\frac{\partial G}{\partial\alpha} - \cancel{K(x,0)\frac{\partial G}{\partial\alpha}}$$

$$+ Q_\alpha^{(CONT,\,A)} + Q_\alpha^{(CONT.\,P)}$$

$$\frac{\partial G}{\partial\alpha} = \{\Delta\cos\alpha, \Delta\sin\alpha\} \qquad \frac{\partial P}{\partial\alpha} = \{\Delta\cos\alpha, \Delta\sin\alpha\}$$

$$\frac{\partial \hat P}{\partial\alpha} = 0$$

quindi

$$dQ_\alpha^{(CONT,\,A)} = \omega^2(x+\rho\cos\alpha, 0)\,dm\,\frac{\partial\hat P}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow Q_\alpha^{(CONT,\,A)} = 0$$

$$dQ_\alpha^{(CONT,\,P)} = \omega^2(x+\Delta\sin\alpha+\rho\cos\alpha, 0)\,dm\cdot\frac{\partial P}{\partial\alpha} =$$

$$= \omega^2(x+\Delta\sin\alpha+\rho\cos\alpha)\,\Delta\cos\alpha\, dm$$

da cui integrando:

$$Q_\alpha^{(CONT.\,P)} = \sigma\omega^2\left\{(x+\Delta\sin\alpha)\Delta\cos\alpha\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\alpha + \Delta\cos\alpha\,\cancel{\int_0^1\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, d\alpha}\right\}$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi R^2}}\,\omega^2\cdot\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2\pi}\,(x+\Delta\sin\alpha)\Delta\cos\alpha = m\omega^2\Delta\cos\alpha\,(x+\Delta\sin\alpha)$$

$$Q_\alpha = -mg\,\Delta\sin\alpha - K(x+\Delta\sin\alpha)\Delta\cos\alpha + m\omega^2(x+\Delta\sin\alpha)\Delta\cos\alpha =$$

PER TROVARE LE CONFIG. DI EQUILIBRIO RISOLVIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} Q_x = (m\omega^2 - k)(2x + \ell \sin\varphi) = 0 \\ Q_\varphi = -mg\,\ell \sin\varphi + (m\omega^2 - k)(x + \ell\sin\varphi)\,\ell\cos\varphi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

VARI CASI:

A) $k = m\omega^2$

$$(4) \quad \begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_\varphi = -mg\,\ell\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_1 \equiv (\bar{x}, 0) \quad S_2 = (\bar{x}, \pi) \quad \forall \bar{x}$$

B) $k > m\omega^2$

$$(5) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi \\ \sin\varphi\left\{-mg + \dfrac{\ell}{2}(m\omega^2 - k)\cos\varphi\right\} = 0 \end{cases}$$

DA CUI: 1)

$$\begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_3 = (0, 0) \quad S_4 \equiv (0, \pi)$$

2)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{2mg}{\ell(m\omega^2 - k)} < 0 \\ x = -\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi \end{cases} \quad (6)$$

DOBBIAMO IMPORRE CHE SIA VERIFICATA LA CONDIZIONE

$$\cos\varphi = \frac{2mg}{\ell(m\omega^2 - k)} \geq -1$$

DA CUI:

$$k \geq m\omega^2 + \frac{2mg}{\ell} \quad (7)$$

DA CUI AVREMO LE ALTRE DUE CONFIGURAZIONI:

$$S_5 = (-\hat{x}, \hat{\varphi}) \qquad S_6 = (+\hat{x}, -\hat{\varphi})$$

ESSENDO $\hat{x} = -\frac{\Delta}{2}\sin\hat{\alpha}$ E $\hat{\alpha} = \arccos\left\{\frac{2mg}{\Delta(m\omega^2-k)}\right\}$

RICAPITOLANDO AVREMO.

$m\omega^2 < k \le m\omega^2 + \frac{2mg}{\Delta}$ DUE CONFIG. S_3, S_4; $k > m\omega^2 + \frac{2mg}{\Delta}$ 4 CONFIGURAZ. S_3, S_4, S_5, S_6

STUDIO DELLA STABILITÀ:

$$\boxed{m\omega^2 < k < m\omega^2 + \frac{2mg}{\Delta}}$$

CONSIDERIAMO:

$$\frac{\partial^2 U_{TOT}}{\partial x^2} = 2(m\omega^2 - k) < 0$$

$$\frac{\partial^2 U_{TOT}}{\partial x \partial \alpha} = (m\omega^2 - k)\Delta\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -mg\Delta\cos\alpha + (m\omega^2-k)\Delta\left[\Delta\cos^2\alpha - (x+\Delta\sin\alpha)\sin\alpha\right]$$

VARI CASI:

A) $k = m\omega^2$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg\Delta\cos\alpha \end{pmatrix} = 0$

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_1 \equiv (\bar{x}, 0)} = -mg\Delta < 0$$

(NON ABBIAMO ALCUNA INFORMAZIONE SULLA STABILITÀ O INSTABILITÀ DOVREMO UNO STUDIO LOCALE) (VEDI RETRO →

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_2 \equiv (\bar{x}, \pi)} = mg\Delta > 0$$

NON POSSIAMO AVERE UN MASSIMO QUINDI TUTTE LE CONFIGURAZIONI $S_2 = (\bar{x}, \pi)$ $\forall \bar{x}$ SONO INSTABILI

B) $k > m\omega^2$

$$H(S_3) = H(0,0) = \underbrace{(m\omega^2 - k)\Delta}_{<0}\underbrace{\left[-2mg + (m\omega^2-k)\Delta\right]}_{<0} > 0$$

QUINDI ESSENDO $U_{xx} < 0$ LA CONFIGURAZIONE

$S_3 = (0, 0)$ È STABILE

5A
RUOTA

il potenziale U per $x = \frac{m \omega^2}{?}$

$U = mga \cos\theta + c$ se scegliamo c = 0

$U|_{\bar{x},0} = mga$

~~[illegible]~~

$\nexists\ I(\bar{x},0)$: $U(\bar{x},\theta) \leq U(\bar{x},0)$

perché per ogni $\bar{x}$ fissato avremo $U(x,0) = U(\bar{x},0)$ con $x \neq \bar{x}$.

Quindi non possiamo dire nulla.

Dalla dinamica possiamo trarre delle informazioni:

cerchiamo quali sono i possibili moti traslatori cioè $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} =$

Dalle equazioni di moto avremo:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} + ma\cos\theta\,\ddot{\theta} - ma\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = 0 \\ ma\cos\theta\,\ddot{x} + \frac{3}{2}ma^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \end{cases}$$

Cercando i possibili moti traslatori. Le equaz. di moto saranno

$2m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{cost}. \quad x = ct + x_0$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_0 = \pi \end{cases}$

Allora per $\theta = 0$, $\theta = \pi$ avremo moti traslatori $x = ct + x_0$

Allora se consideriamo la configurazione di equilibrio

$(\bar{x}, 0)$ e ci spostiamo da essa con $x = \bar{x} + \delta x$ $\quad \dot{x}(0) = c_1$

avremo: $x = c_1 t + \bar{x} + \delta x$ un moto traslatorio uniforme

che ci allontanerebbe da $(\bar{x}, 0)$ che quindi risulterà

essere instabile.

$$H(S_4) = H(0,\pi) = \underbrace{(m\omega^2 - k)}_{<0} \Delta \left[2mg + (m\omega^2-k)\Delta \right]$$

QUINDI: i) SE $2mg + (m\omega^2 - k)\Delta < 0 \Rightarrow k > \frac{2mg}{\Delta} + m\omega^2$

$H(0,\pi) > 0 \quad U_{xx} < 0 \Rightarrow$ STABILITÀ

ii) SE $2mg + (m\omega^2-k)\Delta > 0 \Rightarrow k < \frac{2mg}{\Delta} + m\omega^2$

$H(0,\pi) < 0 \qquad \Rightarrow$ INSTABILITÀ

iii) SE $k = m\omega^2 + \frac{2mg}{\Delta} \qquad H(0,\pi) = 0$ (NON POSSIAMO DIRE NULLA SULLA STABILITÀ O INSTABILITÀ SE FACCIAMO ANALISI LOCALE) ⇒ RETRO

CONSIDERIAMO, SEMPRE PER $k > m\omega^2$ LE CONFIGURAZIONI

$S_5 = (\hat{x}, \hat{\alpha}) \qquad S_6 \equiv (-\hat{x}, -\hat{\alpha})$

UTILIZZANDO LE (6) CALCOLIAMO IN S_5, S_6 LE DERIVATE SECONDE E LA $H(x,\alpha)$:

$U_{x\alpha} = 2mg \qquad U_{xx} = 2(m\omega^2 - k)$

$$U_{\alpha\alpha} = -mg\Delta\cos\hat{\alpha} + (m\omega^2-k)\Delta\left\{\Delta\cos^2\hat{\alpha} - \frac{\Delta}{2}(1-\cos^2\hat{\alpha})\right\} =$$

$$= -mg\Delta\cos\hat{\alpha} + \frac{\Delta^2}{2}(m\omega^2-k)\left\{3\cos^2\hat{\alpha} - 1\right\} =$$

$$= \frac{8(mg)^2 - \Delta^2(m\omega^2-k)^2}{2(m\omega^2-k)}$$ DA CUI IN S_5 ED IN S_6

AVREMO: $H = \begin{pmatrix} 2(m\omega^2-k) & 2mg \\ & \frac{8(mg)^2 - \Delta^2(m\omega^2-k)^2}{\ldots} \end{pmatrix}$

CONSIDERIAMO IL POTENZIALE PER IL CASO IN CUI $k = m\omega^2 + 2\frac{mg}{\Delta}$

$$U_{TOT} = mg\Delta\cos\alpha - \frac{mg}{\Delta}x^2 - \frac{mg}{\Delta}(x + \Delta\operatorname{sen}\alpha)^2 + c$$

DEFINIAMO $\bar{x} = \frac{x}{\Delta}$ E LA NUOVA FUNZIONE $\bar{U}_{TOT}$ TALE CHE

$U_{TOT} = mg\Delta\,\bar{U}_{TOT}$ ESSENDO $\bar{U}_{TOT} = \left\{\cos\alpha - \bar{x}^2 - (\bar{x} + \operatorname{sen}\alpha)^2 + \bar{c}\right\}$

STUDIAMO IL COMPORTAMENTO LOCALE DELLA $\bar{U}_{TOT}$ IN UN INTORNO DI $(0,\pi)$

SCEGLIAMO LA $\bar{c}$ IN MODO TALE CHE $\bar{U}_{TOT}\Big|_{(0,\pi)} = 0 \Rightarrow \bar{c} = 1$

DA CUI:

$$\bar{U}_{TOT} = \cos\alpha + 1 - \left\{\bar{x}^2 + (\bar{x} + \operatorname{sen}\alpha)^2\right\}$$

OSSERVIAMO CHE $\bar{x}^2 + (\bar{x} + \operatorname{sen}\alpha)^2 = 2\bar{x}^2 + 2\bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha =$

$$= 2\left\{\bar{x}^2 + 2\bar{x}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2\right\} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2} = 2\left(\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}$$

DA CUI:

$$\bar{U}_{TOT} = \cos\alpha + 1 - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2} - 2\left(\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{2}$$

$$- 2\left(\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha\right] - 2\left[\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\alpha\right]^2 - 2\left[\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right]^2$$

ALLORA LA FUNZIONE $\bar{U}_{TOT}$ E' CHIARAMENTE INDEFINITA IN $\forall\, I(0,\pi)$

INFATTI LUNGO LA RETTA $\alpha = \pi$ per $\bar{x} \neq 0$ $\bar{U}_{TOT} < 0$

LUNGO LA CURVA $\bar{x} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$ per $\alpha \neq \pi$ $\bar{U}_{TOT} > 0$

~~QUINDI~~ PER IL TEOREMA DI Lyapunov - Chetayev NON ESSENDO $(0,\pi)$ NE UN MAX NE UN MIN. TALE CONFIGURAZIONE E' INSTABILE. SE ~~PERO~~ PERO' QUESTO E' RICONOSCIBILE DALLA ANALISI DELLE PRIME DERIVATE SECONDE, QUINDI IN REALTA' NON POSSIAMO ANCORA DIRE NULLA il potenziale calcolato in modo tale che $U(0,\bar{u})=0$ per $k = m\omega^2 + \frac{2mg}{A}$ **6B**

$$U_{TOT} = mgA(\cos u + 1) - \frac{2mg}{A}x^2 - mgA\sin^2 u - 2mg\,x\sin u.$$

anche se dovessimo sviluppare attorno ad $u=\bar{u}$ $\cos u$ e $\sin u$ (ponendo $\tilde{u} = u - \bar{u}$) avremo:

$$\cos u = -1 + \frac{1}{2!}\tilde{u}^2 - \frac{1}{4!}\tilde{u}^4 \qquad \sin u = -\tilde{u} + \frac{1}{3!}\tilde{u}^3$$

da cui:

$$U_{TOT} = mgA\left[\frac{1}{2}\tilde{u}^2 - \frac{1}{24}\tilde{u}^4\right] - \frac{2mg}{A}x^2 - mgA\left[\tilde{u}^2 - \frac{1}{3}\tilde{u}^4\right]$$

$$- 2mg\,x\left[-\tilde{u} + \frac{1}{6}\tilde{u}^3\right] =$$

$$= -2mgA\left[\frac{1}{A^2}x^2 + \frac{1}{4}\tilde{u}^2 - \frac{1}{A}x\tilde{u}\right] + \left[\frac{7}{24}mgA\tilde{u}^4 - \frac{1}{3}mg\,x\tilde{u}^3\right]$$

$$= -2mgA\left[\frac{1}{A}x - \frac{1}{2}\tilde{u}\right]^2 + \left[\frac{7}{24}mgA\tilde{u}^4 - \frac{1}{3}mg\,x\tilde{u}^3\right]$$

ai termini di 2° ordine $U<0$ tranne che nel caso $x = \frac{1}{2}A\tilde{u}$

nella restrizione $x = \frac{1}{2}A\tilde{u}$. in questo caso occorrono i termini del 4° ordine:

$$\left(\frac{7}{24} - \frac{1}{6}\right) mgA\tilde{u}^4 = \frac{1}{8} mgA\tilde{u}^4 > 0.$$ cioè $U_{TOT} > 0$ nella

restrizione. il potenziale è positivo

non ho né max né min (ma non sto riconoscendo questo dalle

prime derivate parziali non nulle(*)) quindi non posso

applicare Lyapunov Chetayev..

(*) infatti ho dovuto fare uno sviluppo fino al 4° ordine nel

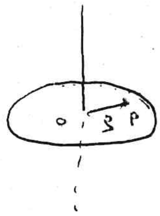
caso della restrizione $x = \frac{1}{2}A\tilde{u}$.

$$H = (2mg)^2 - \Delta^2 (m\omega^2 - k)^2$$

RICORDANDO CHE DEVE VALERE LA (7) PER CUI $\Delta(k - m\omega^2) > 2mg$

AVREMO CHE $H\big|_{S_5, S_6} < 0$ QUINDI S_5, S_6 SONO INSTABILI

"EQUAZIONI DI MOTO"



$$I_O^{\Pi} = \sigma \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} m$$

ENERGIA CINETICA: $T = T_\gamma + T_\Pi$

DOVE $T_\gamma = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ED $T_\Pi = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + T'_\Pi$ CON $T'_\Pi = \frac{1}{2} I_\Pi \omega_\Pi^2$

DOVE I_Π E' IL MOMENTO DI INERZIA CALCOLATO RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE PER G ED ORTOGONALE AL PIANO $\overline{\Pi}$.

$$I_\Pi = \frac{1}{2} m r^2$$

PER CALCOLARE ω_Π RICORDIAMO CHE NEL CASO DEL ROTOLAMENTO PURO LA VELOCITA' DI TRASCINAMENTO DEL PUNTO DI CONTATTO ~~DR~~ $\tilde{T}$ TRA I DUE DISCHI DEVE ESSER NULLA DA CUI

$$\underline{V}_\tau(\tilde{T}) = V_\tau(G) + \omega_\Pi \wedge (\tilde{T} - G)$$

$$\Rightarrow \quad |\underline{V}_\tau(G)| = |\underline{\omega}_\Pi \wedge (\tilde{T} - G)|$$

ESSENDO $|\underline{V}_\tau(G)| = (R + r)\dot{\theta}$

$$|\omega_\Pi \wedge (\tilde{T} - G)| = |\omega_\Pi \underline{e}_3 \wedge r \underline{e}_\rho| = \omega_\Pi r$$

DA CUI: $$\omega_\Pi^2 = \left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 \dot{\theta}^2$$

QUINDI:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m \cancel{r^2}\right) \frac{\Delta^2}{\cancel{r^2}} \dot{\theta}^2$$

ESSENDO $\dot{G} = [\dot{x} + \Delta \cos\theta\, \dot{\theta},\ \Delta \sin\theta\, \dot{\theta}]$

$$\dot{G}^2 = \dot{x}^2 + \Delta^2 \dot{\theta}^2 + 2\Delta \cos\theta\, \dot{x}\dot{\theta}$$

$$T = m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m \Delta^2 \dot{\theta}^2 + m \Delta \cos\theta\, \dot{x}\dot{\theta}$$

DA CUI:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2 m \dot{x} + m \Delta \cos\theta\, \dot{\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2 m \ddot{x} + m \Delta \cos\theta\, \ddot{\theta} - m \Delta \sin\theta\, \dot{\theta}^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{3}{2} m \Delta^2 \dot{\theta} + m \Delta \cos\theta\, \dot{x} \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = - m \Delta \sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m \Delta^2 \ddot{\theta} + m \Delta \cos\theta\, \ddot{x} - m \Delta \sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta}$$

DA CUI ESSENDO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} + m\Delta\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - m\Delta\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 = \dfrac{\partial U_{TOT}}{\partial x} \\ m\Delta\cos\varphi\,\ddot{x} + \dfrac{3}{2}m\Delta^2\ddot{\varphi} = \dfrac{\partial U_{TOT}}{\partial \varphi} \end{cases}$$

ESSENDO:

$$Q_x = \frac{\partial U_{TOT}}{\partial x} = (m\omega^2 - k)(2x + \Delta\sin\varphi)$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial U_{TOT}}{\partial \varphi} = -mg\Delta\sin\varphi + (m\omega^2 - k)(x + \Delta\sin\varphi)\Delta\cos\varphi$$

"INTEGRALI PRIMI"

AVREMO CERTAMENTE COME INTEGRALE PRIMO L'ENERGIA

$$E = T - U$$

INOLTRE NEL CASO $k = m\omega^2$ $\quad Q_x = 0$

DA CUI ESSENDO $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \text{costante}$$

(CIOÈ LA X SARÀ UNA VARIABILE CICLICA)

$\Rightarrow$ MOTO.

CHE È UN INTEGRALE PRIMO.

"STUDIO DEI PICCOLI MOTI"

CONSIDERIAMO LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO OTTENUTA PER $k \geq m\omega^2$ $\quad S_3 = (0,0)$. E LINEARIZZIAMO ATTORNO AD ESSA LE EQUAZ. DI MOTO.

$$2m\ddot{x} + m\Delta\ddot{\varphi} = (m\omega^2 - k)(2x + \Delta\varphi)$$

$$m\cancel{\Delta}\ddot{x} + \frac{3}{2}m\Delta^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = \cancel{\Delta}(m\omega^2 - k)x + \cancel{\Delta}[\Delta(m\omega^2 - k) - mg]$$

OSSERVIAMO CHE ~~PERCHÉ~~ (9A)

$$T = m\dot{x}^2 + \frac{3}{4} m a^2 \dot{\theta}^2 + m a \cos\theta\, \dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m a \cos\theta\,. = \text{cost.}$$

MA $2m\dot{x} + m a \cos\theta\,\dot{\theta} = \underbrace{m\dot{x}}_{Q_x^{x}} + \underbrace{[m(\dot{x} + a\cos\theta\,\dot{\theta})]}_{Q_x^{P}}$

COMPONENTE X DELLA QUANTITA' DI MOTO DEL SISTEMA SI CONSERVA

INFATTI PER $K = m\omega^2$ FORZA ELASTICA E FORZA CENTRIFUGA

SI BILANCIA, QUINDI L'UNICA FORZA AGENTE SARA' LA FORZA

PESO INFATTI $U_{TOT} = mg\, a \cos\theta$ CHE AGISCE LUNGO LA

VERTICALE ~~DALL~~ DALLA 1ª EQUAZ CARDINALE

$$R^{(ext)} = \dot{Q} \qquad \text{DA CUI SE} \quad \underline{R}^{(ext)} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{u} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(Q \cdot u) = 0 \qquad \underline{Q} \cdot \underline{u} = \text{cost.}$$

CIOE' LA QUANTITA DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA SI CONSERVA

LUNGO LA DIREZIONE $\underline{u}$ (IN QUESTO CASO L'ASSE X)

CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO

$$x = x_0 \, e^{\lambda t} \qquad \varphi = \varphi_0 \, e^{\lambda t}$$

DA CUI:

$$2\{m\lambda^2 - (m\omega^2 - k)\} x_0 + \Delta\{m\lambda^2 - (m\omega^2 - k)\}\varphi_0 = 0$$

$$2\{m\lambda^2 - (m\omega^2 - k)\} x_0 + \{3m\Delta\lambda^2 - 2[\Delta(m\omega^2 - k) - mg]\}\varphi_0 = 0$$

AVREMO SOLUZIONE NON BANALE SE:

$$2[m\lambda^2 - (m\omega^2 - k)] \cdot \{3m\Delta\lambda^2 - 2[\Delta(m\omega^2 - k) - mg] - \Delta[m\lambda^2 - (m\omega^2 - k)]\} = 0$$

DA CUI: se $k > m\omega^2$

$$\begin{cases} \lambda^2 = \dfrac{(m\omega^2 - k)}{m} < 0 & \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\bar{\lambda}}\, i \\ \lambda^2 = \dfrac{\Delta \overbrace{(m\omega^2 - k)}^{<0} - 2mg}{2m\Delta} < 0 & \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\bar{\bar{\lambda}}}\, i \end{cases}$$

QUINDI AVREMO 4 RADICI IMMAGINARIE PURE DA CUI COMPOSIZIONE DI MOTI ARMONICI.

Se $k = m\omega^2$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{\Delta} < 0$$

DA CUI LA COMPOSIZIONE DI UN MOTO UNIFORME E DI UN MOTO ARMONICO, LA PRESENZA DI UN MOTO UNIFORME CI DICE CHE LA LINEARIZZAZIONE NON ERA LECITA. (NEL SENSO CHE NON CI CONSENTE DI DARE INFORMAZIONI SUL SISTEMA ORIGINARIO)