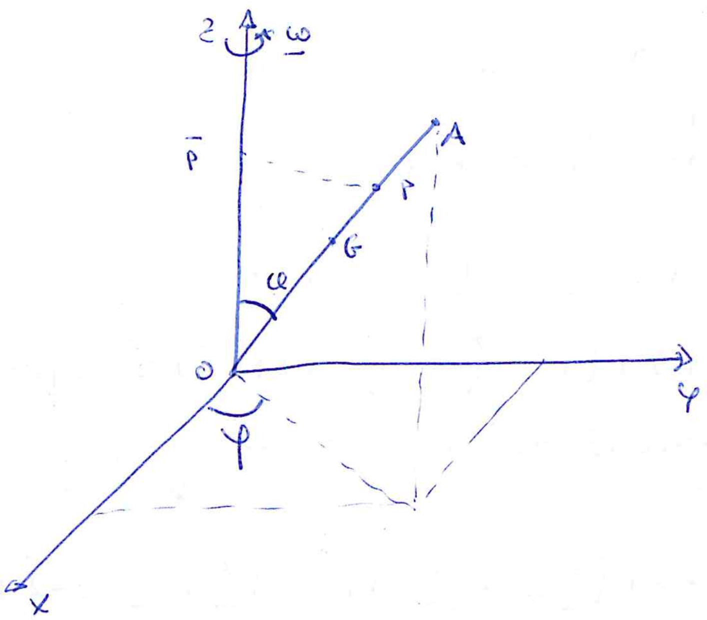
[Un'as]ta omogenea $\overline{OA}$, di massa m e lunghezza 2ℓ, si può muovere (1)
[nel]lo spazio mantenendo fisso l'estremo O nel riferimento che si muove di moto rotatorio attorno alla verticale passante per O.

Si chiede di:

1) determinare le config. di equilibrio relativo e studiarne (se possibile) la stabilità
2) trovare le equazioni di moto ed eventuali integrali primi
3) studiare i piccoli moti attorno alle configurazioni nelle quali l'asta è verticale



Forze:

1) Forza peso $\underline{F}_p = mg(0,0,-1)$ su G.

2) Forza centrifuga su singolo punto $\underline{F}_c = m_P\,\omega^2\,(P-\bar{P})$ su P (con $\bar{P}$ proiezione di P sull'asse di rotazione)

3) Forza di Coriolis

$$\underline{F}_{cor.} = -2\,m_P\,\underline{\omega}\wedge\underline{\dot{P}} \quad \text{su } P.$$

4) Forza non uniforme

$$\underline{F}^{(n.unif)} = -m_P\,\underline{\dot{\omega}}\wedge(P-\bar{P}) \quad \text{su } P.$$

Punti:

$A \equiv \{2\ell\sin\alpha\cos\varphi,\ 2\ell\sin\alpha\sin\varphi,\ 2\ell\cos\alpha\}$

$G \equiv \{\ell\sin\alpha\cos\varphi,\ \ell\sin\alpha\sin\varphi,\ \ell\cos\alpha\}$

$P \equiv \{s\sin\alpha\cos\varphi,\ s\sin\alpha\sin\varphi,\ s\cos\alpha\}$

"METODO DELLE SOLLECITAZIONI"

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE

$$\underline{a}_c = 2\,\underline{\omega} \wedge \underline{v} \qquad \underline{v}_a(P) = \underline{v}_a(O) + \underline{\omega} \wedge (P-O) \Rightarrow \underline{a}_a(P) = \underline{a}_o + \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) + \underline{\omega} \wedge (\underline{v}_a(P) - \underline{v}_a(O))$$

DA CUI

$$\underline{a}_\tau = \underline{a}_o + \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) + \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge (P-O)]$$

NEL CASO DEL MOTO PURAMENTE ROTATORIO $\underline{a}_o = 0$

$$\underline{a}_\tau = \underbrace{\dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O)}_{\text{ACCELERAZIONE NON UNIFORME}} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge (P-O)]}_{\text{ACCELERAZIONE CENTRIPETA}}$$

SE L'ASSE DI ROTAZIONE È $\underline{e}_3$ $\quad \underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_3$ AVREMO:

$$\dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) = \dot{\underline{\omega}} \wedge [(P-\bar{P}) + \cancel{(\bar{P}-O)}] = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) = \dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{t}$$

ESSENDO $\underline{t}$ IL VETTORE TANGENTE AL MOTO ROTATORIO

ANALOGAMENTE

$$\underline{\omega} \wedge \{\underline{\omega} \wedge [(P-\bar{P}) + \cancel{(\bar{P}-O)}]\} = -[\underline{\omega} \wedge (P-\bar{P})] \wedge \underline{\omega} = -\{\omega^2 (P-\bar{P}) -$$

$$- \cancel{[(P-\bar{P}) \cdot \underline{\omega}]}\,\underline{\omega}\} = -\omega^2 (P-\bar{P}) \quad \leftarrow \text{ACCELERAZIONE CENTRIPETA}$$

QUINDI PER CALCOLARE I CONTRIBUTI DELLE SOLLECITAZIONI

AVREMO:

$$-m_p \underline{a}_c - m_p \underline{a}_\tau = \underbrace{-2 m_p\, \underline{\omega} \wedge \dot{P}}_{\text{CORIOLIS}} \underbrace{- m_p\, \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P})}_{\text{NON UNIFORME}} \underbrace{+ m_p \omega^2 (P-\bar{P})}_{\text{CENTRIFUGA}}.$$

DA CUI

$$Q_\alpha^{(APP)} = -2 m_p [\underline{\omega} \wedge \dot{P}] \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha} - m_p [\dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P})] \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha} + m_p \omega^2 (P-\bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha}$$

NEL CASO DI UN CORPO CONTINUO

$$Q_\alpha^{(APP)} = -\int 2[\underline{\omega} \wedge \dot{P}] \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha}\, dm - \int \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha}\, dm +$$

$$+ \int \omega^2 (P-\bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_\alpha}\, dm$$

SOLLECITAZIONI FORZA PESO:

$$\begin{cases} Q_\alpha^{F_p} = F_p \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \alpha} = mg(0,0,-1) \cdot \{\ell \cos\alpha \cos\varphi,\ \ell \cos\alpha \sin\varphi,\ -\ell \sin\alpha\} \\ \qquad = + mg\ell \sin\alpha \\ Q_\varphi^{F_p} = F_p \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

SOLLECITAZIONI FORZA CENTRIFUGA

(SINGOLO PUNTO)

$$Q_\alpha^{F_c} = m_p \omega^2 (P - \bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha}$$

$$\bar{P} = (0, 0, s\cos\alpha) \quad \Rightarrow (P - \bar{P}) = (s \sin\alpha \cos\varphi,\ s \sin\alpha \sin\varphi,\ 0)$$

$$Q_\alpha^{F_c} = m_p \omega^2 [s \sin\alpha \cos\varphi,\ s \sin\alpha \sin\varphi,\ 0] \cdot [s \cos\alpha \cos\varphi,\ s \cos\alpha \sin\varphi,\ -s \sin\alpha] =$$

$$= m_p \omega^2 s^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

DA CUI INTEGRANDO SU TUTTI I PUNTI DELL'ASTA:

$$^{(T)}Q_\alpha^{F_c} = \int_0^{2\ell} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\, s^2 \underbrace{\sigma\, ds}_{dm} = \sigma \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^{2\ell} =$$

$$= \underbrace{\sigma}_{\frac{m}{2\ell}} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{8}{3}\ell^3 = \frac{4}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

$$Q_\varphi^{F_c} = m_p \omega^2 (P - \bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} = m_p \omega^2 [s \sin\alpha \cos\varphi,\ s \sin\alpha \sin\varphi,\ 0] \cdot [-s \sin\alpha \sin\varphi,\ s \sin\alpha \cos\varphi\ \ 0]$$

$$= 0$$

DA CUI $\quad ^{(T)}Q_\varphi^{F_c} = 0$

SOLLECITAZIONI FORZA DI CORIOLIS

$$Q_\vartheta^{F_{cor.}} = -2 m_p \underline{\omega} \wedge \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = -2 m_p \underline{\omega} \wedge \left[\cancel{\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\dot\vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\dot\varphi \right] \cdot \frac{\partial P}{\partial\vartheta}$$

$$= -2 m_p \left(\underline\omega \wedge \frac{\partial P}{\partial\varphi}\dot\varphi\right)\cdot\frac{\partial P}{\partial\vartheta} =$$

$$= -2 m_p \dot\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -s\sin\vartheta\sin\varphi & s\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ s\cos\vartheta\cos\varphi & s\cos\vartheta\sin\varphi & -s\sin\vartheta\end{vmatrix}$$

$$= -2 m_p \dot\varphi\,\omega\left[-s^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right] = 2 m_p \omega\dot\varphi\, s^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

INTEGRANDO SU TUTTI I PUNTI

$$Q_\vartheta^{(T)F_{cor}} = 2\omega\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \int_0^{2\ell} \sigma s^2\, ds = \cancel{2}\omega\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{m}{\cancel{2}\ell}\right)\frac{8\ell^3}{3} =$$

$$= \frac{8}{3} m\ell^2\omega\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

ANALOGAMENTE AVREMO:

$$Q_\varphi^{F_{cor.}} = -2 m_p \underline\omega\wedge\dot P\cdot\frac{\partial P}{\partial\varphi} = -2m_p\underline\omega\wedge\left[\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\dot\vartheta + \cancel{\frac{\partial P}{\partial\varphi}\dot\varphi}\right]\cdot\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$

$$= -2m_p\dot\vartheta \begin{vmatrix}0&0&\omega\\ s\cos\vartheta\cos\varphi & s\cos\vartheta\sin\varphi & -s\sin\vartheta \\ -s\sin\vartheta\sin\varphi & s\sin\vartheta\cos\varphi & 0\end{vmatrix} =$$

$$= -2m_p\omega\dot\vartheta\left[s^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right] = -2m_p\omega\dot\vartheta\, s^2\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

DA CUI INTEGRANDO

$$Q_\varphi^{(T)F_{cor}} = -2\omega\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\,\sigma\int_0^{2\ell} s^2\, ds = -\frac{8}{3}m\ell^2\omega\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

$$dQ_\alpha^{(NON.UNIF)} = -dm\, \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha} = -dm$$

$$-dm \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dot{\omega} \\ s\,\mathrm{sen}\alpha \cos\varphi & s\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\varphi & 0 \\ s\cos\alpha\cos\varphi & s\cos\alpha\,\mathrm{sen}\varphi & -s\,\mathrm{sen}\alpha \end{vmatrix} = 0$$

QUINDI $\quad Q_\alpha^{(NON.UNIF.)} = 0$

ANALOGAMENTE:

$$dQ_\varphi^{(N.UNIF)} = -dm\, \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} =$$

$$= -dm \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dot{\omega} \\ s\,\mathrm{sen}\alpha\cos\varphi & s\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\varphi & 0 \\ -s\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\varphi & s\,\mathrm{sen}\alpha\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -dm\, s^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\dot{\omega}$$

DA CUI INTEGRANDO:

$$Q_\varphi^{(N.UNIF)} = -\dot{\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha\;\sigma\int_0^{2\ell} s^2\,ds = -\dot{\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha \cdot \frac{m}{2\ell}\;\frac{8\ell^3}{3} =$$

$$\boxed{Q_\varphi^{N.UNIF} = -\frac{4}{3} m\ell^2\,\dot{\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha}$$

LE FORZE PESO E CENTRIFUGA AMMETTONO UN POTENZIALE USUALE (CIOÈ UN POTENZIALE POSIZIONALE) LA FORZA DI CORIOLIS AMMETTE UN POTENZIALE GENERALIZZATO. (+ UN POTENZIALE <u>NON</u> UNIFORME SE $\dot{\omega} \neq 0$)

SE QUINDI CONSIDERIAMO LE FORZE CONSERVATIVE

$$Q_\alpha^{F_p} + Q_\alpha^{(\tau)F_c} = + mgl \sin\alpha + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$Q_\varphi^{F_p} + Q_\varphi^{(\tau)F_c} = 0$$

QUINDI IL RELATIVO POTENZIALE SARÀ:

$$U_{F_p} + U_{F_c} = \int \left(+ mgl \sin\alpha + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\right) d\alpha + c$$

$$= - mgl\cos\alpha + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \underbrace{\int \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha}_{\frac{\sin^2\alpha}{2}} + c$$

$$U_{F_p} + U_{F_c} = - mgl\cos\alpha + \frac{2}{3} m l^2 \omega^2 \sin^2\alpha$$

"POTENZIALI GENERALIZZATI" RETRO ⇒

IL POTENZIALE DELLA FORZA DI CORIOLIS È UN POTENZIALE GENERALIZZATO. PER CUI:

$$-\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right\} = Q_\alpha$$

QUINDI U NON SI PUÒ RICAVARE DA UNA SEMPLICE INTEGRAZIONE

RICORDIAMO CHE: $U_{app} = T_a - T_r$

CHE NEL CASO DI MOTO PERMANENTE ROTATORIO (ANCHE NON UNIFORME) SAPPIAMO CHE:

$$U_{app} = \underbrace{-(\overset{a}{m}\,\overset{b}{\omega} \wedge \overset{c}{v}) \cdot (P-O)}_{\text{POTENZIALE FORZE DI CORIOLIS}} + \underbrace{\frac{1}{2} m [\omega \wedge (P-O)]^2}_{\text{POTENZIALE FORZE CENTRIFUGHE.}}$$

→ RETRO

$$\hookrightarrow -(b \wedge c)\cdot \underline{a} = (m(P-O) \wedge \underline{v}) \cdot \underline{\omega} = K_O \cdot \omega$$

→ (<u>NOTA</u>: IN REALTÀ SE $\dot{\omega} \neq 0$ CI DA ANCHE)

$$\frac{1}{2} m \left[\omega \wedge (P-O)\right]^2 = \frac{1}{2} m \left\{ \underline{\omega} \wedge \left[(P-\bar{P})+(\bar{P}-O)\right]\right\}^2$$

$$\text{Se } \omega \uparrow\uparrow (\bar{P}-O) \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2} m \left\{\omega \wedge (P-\bar{P})\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\bar{\omega} \wedge (P-\bar{P})\right] \cdot \left[\omega \wedge (P-\bar{P})\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{\left[\bar{\omega} \wedge (P-\bar{P})\right] \wedge \underline{\omega}\right\} \cdot (P-\bar{P}) = \frac{1}{2} m \left\{(P-\bar{P}) \wedge \left[\omega \wedge (P-\bar{P})\right]\right\} \cdot \underline{\omega}$$

$$= -\frac{1}{2} m \left\{\left[\bar{\omega} \wedge (P-\bar{P})\right] \wedge (P-\bar{P})\right\} \cdot \underline{\omega} =$$

$$= -\frac{1}{2} m \left\{\cancel{\left[\underline{\omega} \cdot (P-\bar{P})\right]}(P-\bar{P}) - (P-\bar{P})^2 \underline{\omega}\right\} \cdot \underline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (P-\bar{P})^2$$

"NOTA:"

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE NEL CASO DELLE FORZE APPARENTI ABBIAMO:

$$U^{(APP)} = \underline{K_O} \cdot \underline{\omega} - m\, \underline{a_O} \cdot (P-O) + \frac{1}{2} m \left[\omega \wedge (P-O)\right]^2$$

DOVE $\underline{K_O} \cdot \underline{\omega} = \left[m (P-O) \wedge \underline{v}\right] \cdot \underline{\omega} = \left[m\, \underline{\omega} \wedge (P-O)\right] \cdot \underline{v} = -\left[m\, \underline{\omega} \wedge \underline{v}\right] \cdot (P-O)$

$m\, \underline{a_O} \cdot (P-O) = 0$ SE IL MOTO È PURAMENTE ROTATORIO

QUINDI SE $\underline{a_O} = 0$ AVREMO

$$U^{APP} = -\left[m\, \underline{\omega} \wedge \underline{v_r}\right] \cdot (P-O) + \frac{1}{2} m \omega^2 (P-\bar{P})^2$$

↳ QUESTO CONTRIBUTO DA UNA PARTE CI DARÀ IL POTENZIALE GENERALIZZATO DI CORIOLIS, MA ANCHE IL POTENZIALE ASSOCIATO ALLA FORZA DI TRASCINAMENTO NON UNIFORME $(-m\, \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O))$.

NELLA PROSSIMA PAGINA CALCOLEREMO SEPARATAMENTE I DUE CONTRIBUTI

$$U = -m_P \left[\underline{\omega} \wedge \dot{P}\right] \cdot (P-O)$$

E

$$U = \frac{1}{2} m_P \omega^2 (P-\bar{P})^2$$

Quindi nel caso di singola particella avremo. $\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$

$$U_{Foor.} = -(m\omega \wedge \dot{P})\cdot(P-O) =$$

$$= -m \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ (s\cos\alpha\cos\varphi)\dot{\alpha} + (-s\sin\alpha\sin\varphi)\dot{\varphi} & (s\cos\alpha\sin\varphi)\dot{\alpha} + (s\sin\alpha\cos\varphi)\dot{\varphi} & (-s\sin\alpha)\dot{\alpha} \\ s\sin\alpha\cos\varphi & s\sin\alpha\sin\varphi & s\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= m\omega s^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}$$

Quindi calcoliamo il potenziale totale

$$\cancel{Q_\alpha = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{Foor}}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial U_{cor}}{\partial\alpha}\right\} = \frac{\partial U_{cor}}{\partial\alpha} = 2m\omega}$$

$$U^T_{cor.} = m\omega\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}\,\underbrace{\bar{\sigma}}_{\frac{m}{2\ell}}\int_0^{2\ell} s^2\,ds = \frac{4}{3}m\ell^2\omega\dot{\varphi}\sin^2\alpha$$

<u>Quindi:</u> si calcoliamo le sollecitazioni.

$$Q_\alpha^{T\,cor.} = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{cor}}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial U_{cor}}{\partial\alpha}\right\} = \frac{\partial U_{cor}}{\partial\alpha} = \frac{8}{3}m\ell^2\omega\dot{\varphi}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$Q_\varphi^{T\,cor} = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{cor}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial U_{cor}}{\partial\varphi}\right\} = -\frac{8}{3}m\ell^2\omega\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\alpha}$$

(Vero solo se ω = costante. Altrimenti avremo anche $\frac{4}{3}m\ell^2\sin^2\alpha\,\dot{\omega}$ che fa parte degli acc. di trascinamento non uniformi.

Notiamo inoltre che

$F_c = -2m\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}$ non produce lavoro. $F_c\cdot\delta P = (\underline{F_c}\cdot\underline{v})\,\delta t = 0$

Quindi non varia nulla sulla conservazione della energia

nel caso di moto puramente rotatorio uniforme la forza di trascinamento si comporta da forza conservativa. (forza centrifu

AVREMMO POTUTO CALCOLARE DIRETTAMENTE I POTENZIALI DELLE FORZE PESO E FORZA CENTRIFUGA.

INFATTI SE $F = K(P-\bar{P}) \Rightarrow U = \frac{1}{2} K (P-\bar{P})^2$ $\qquad P-\bar{P} = x_h e_h$

INFATTI $\underline{F} = \frac{\partial U}{\partial x_h} \underline{e}_h = \frac{1}{2} K \frac{\partial (x_k x_k)}{\partial x_h} \underline{e}_h = K x_h \underline{e}_h = K(P-\bar{P})$

SE LA FORZA È COSTANTE

$F = \text{cost.} \Rightarrow U = F \cdot (P-O)$ $\qquad$ INFATTI $\underline{F} = \frac{\partial U}{\partial x_h} \underline{e}_h = F_k \frac{\partial x_k}{\partial x_h} e_h$

$= F_k \delta_{kh} e_h = F_h \underline{e}_h$

QUINDI

$\underline{F} = m\omega^2 (P-\bar{P}) \Rightarrow U = \frac{1}{2} m_p \omega^2 (P-\bar{P})^2 =$ $\qquad \Rightarrow$ RETRO

$= \frac{1}{2} m_p \omega^2 s^2 \sin^2\alpha \Rightarrow U_c^T = \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2\alpha \, \sigma \int_0^{2\ell} s^2 \, ds =$

$= \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2\alpha \frac{m}{2\ell} \frac{8\ell^3}{3} = \frac{2}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin^2\alpha$

$F_p = mg(0,0,-1) \Rightarrow U_p = mg(0,0,-1) \cdot (G-O) =$

$= -mg\ell\cos\alpha.$

DA CUI AVREMO:

$$U_{TOT} = -mg\ell\cos\alpha + \frac{2}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin^2\alpha + \underbrace{\frac{4}{3} m \ell^2 \omega \dot{\varphi} \sin^2\alpha}_{\text{POT. DI CORIOLIS (POT. GENERALIZZATO)}} \qquad (*)$$

—

NOTA (*) SE $\dot{\omega} \neq 0$ AVREMMO AVUTO UN ALTRO TERMINE $-\frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\omega} \sin^2\alpha$.

CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO: (CON $\dot{\omega}=0$)

$$Q_\alpha^{GR.} + \left[Q_\alpha^{(c)} + Q_\alpha^{(P)}\right] = Q_\alpha^{GR.} + \frac{\partial U^{(c)+(P)}}{\partial \alpha} = \frac{8}{3} m\ell^2 \omega \dot{\varphi} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha +$$

$$+ mg\ell \operatorname{sen}\alpha + \frac{4}{3} m\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \Big|_{\dot{\varphi}=\dot{\alpha}=0} = 0$$

$$Q_\varphi^{(GR)} + \underbrace{\left[Q_\varphi^{(c)} + Q_\varphi^{(P)}\right]}_{\shortparallel \atop 0} = -\frac{8}{3} m\ell^2 \omega \dot{\alpha} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \Big|_{\dot{\varphi}=\dot{\alpha}=0} = 0$$

MA PER L'EQUILIBRIO PONIAMO IL SISTEMA CON ATTO DI MOTO NULLO

QUINDI $\dot{\varphi} = \dot{\alpha} = 0$

DA CUI:

$$\begin{cases} Q_\alpha^{(TOT)}\Big|_{\dot{\varphi}=\dot{\alpha}=0} = \frac{4}{3}\cancel{m}\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cancel{m}g\cancel{\ell}\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ Q_\varphi^{(TOT)}\Big|_{\dot{\varphi}=\dot{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \operatorname{sen}\alpha \left\{ 1 + \frac{4}{3}\frac{\ell\omega^2}{g}\cos\alpha \right\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0 & \Rightarrow \alpha = 0, \pi \\ \cos\alpha = -\frac{3g}{4\ell\omega^2} & (-1 \leq \cos\alpha \leq 1) \end{cases}$$

$$\forall \varphi$$

DA CUI $-\frac{3g}{4\ell\omega^2} \leq 1$ SEMPRE VERIFICATA (SE $-\frac{3g}{4\ell\omega^2} = -1$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

CASO GIÀ CONSIDERATO)

NOTA:

ASSUMIAMO COMUNQUE CHE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} \neq 1$

SE $-1 < -\frac{3g}{4\ell\omega^2} \Rightarrow \frac{3g}{4\ell\omega^2} < 1$ AVREMO

ALTRE DUE POSSIBILITÀ $(\bar{\alpha}, \varphi)$ $(-\bar{\alpha}, \varphi)$ $\bar{\alpha} = \arccos\left(-\frac{3g}{4\ell\omega^2}\right)$

QUINDI:

i) SE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} > 1 \Rightarrow (\alpha, \varphi) = \{(0, \varphi); (\pi, \varphi)\} \quad \forall \varphi$

2) SE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} < 1 \Rightarrow (\alpha, \varphi) = \{(0, \varphi); (\pi, \varphi); (\bar{\alpha}, \varphi); (-\bar{\alpha}, \varphi)\} \quad \forall \varphi$

NOTA: LE DUE COPPIE DI COORDINATE $(0, \varphi)$, (π, φ) $\forall\varphi$ CORRISPONDONO IN REALTÀ A DUE SOLE CONFIGURAZIONI DEL SISTEMA IN QUANTO VIENE A MANCARE LA CONDIZIONE $(\det J \neq 0)$ DI BIUNIVOCITÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE IN TERMINI DELLE COORDINATE $\{\theta, \varphi\}$.

NON ESSENDOCI LA INVERTIBILITÀ (TRA COORDINATE CARTESIANE E SFERICHE) VIENE A DECADERE LA CONDIZIONE DI UNA UNICA "MAPPATURA" O "CARTA" PER LA VARIETÀ DELLE CONFIGURAZIONI.

PER INTORNI PICCOLI DELLE CONFIGURAZIONI CHE DESCRIVONO L'ASTA SULL'ASSE z, I PARAMETRI LAGRANGIANI DEVONO ESSERE SOSTITUITI DA ALTRE COORDINATE GENERALIZZATE PER GARANTIRE LA BIUNIVOCITÀ, E UNA OPPORTUNA REGOLARITÀ, DELLA RAPPRESENTAZIONE

SI POSSONO USARE COME NUOVE COORDINATE LAGRANGIANE:

1) LE COORDINATE NEL PIANO (x, y) DEL BARICENTRO DELL'ASTA
   ESSENDO $G = \{x, y, \pm\sqrt{\ell^2 - (x^2+y^2)}\}$

2) LE COORDINATE NEL PIANO DELL'ESTREMO A DELL'ASTA (x, y)
   ESSENDO COSÌ $A \equiv \{x, y, \pm\sqrt{(2\ell)^2 - (x^2+y^2)}\}$

NOTA: ANCHE QUESTO CAMBIAMENTO DI VARIABILI NON È UNIVOCO NEL SENSO CHE AD UNA COPPIA (x, y) CORRISPONDONO DUE DISTINTI VALORI DI $z = \pm\sqrt{\dots}$ CON DUE PUNTI DISTINTI.
SE PERÒ CONSIDERIAMO SEPARATAMENTE I DUE SEMISPAZI IL CAMBIAMENTO È "UNIVOCO".
NEL CONSIDERARE PUNTI VICINI ALL'ASSE z CONSIDEREREMO I DUE SEMISPAZI SEPARATAMENTE.

UTILIZZEREMO QUINDI UNA RAPPRESENTAZIONE A TRE CARTE (LEGANDO APPENA [illegible] SE L'ASTA È VERTICALE [illegible])

(SOLO TRASCURANDO CORIOLIS) DETTO (NON NASCOSTO IN GENERALE) SECONDO LYAPUNOV)

PER CALCOLARE SE LE POSIZIONI ESTREMALI SONO MAX O MINIMI ⑧

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\dot\varphi=\omega} = mgl\cos\alpha + \frac{4}{3}ml^2\omega^2\left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right]$$

$\frac{3g}{4l\omega^2} > 1$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=0} = mgl + \frac{4}{3}ml^2\omega^2 > 0 \quad \text{MIN.} \Rightarrow \text{INSTABILE (??)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} = -mgl + \frac{4}{3}ml^2\omega^2 < 0 \quad \boxed{\text{MAX STABILE}}$$

$$\left(\frac{4}{3}ml^2\omega^2 < mgl \Rightarrow \frac{mgl}{\frac{4}{3}ml^2\omega^2} = \frac{3}{4}\frac{g}{l\omega^2} > 1\right)$$

SE $\frac{3g}{4l\omega^2} < 1$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=0} = mgl + \frac{4}{3}ml^2\omega^2 > 0 \quad \text{MIN INSTABILE (??)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} > 0 \quad \text{POICHÉ } -mgl + \frac{4}{3}ml^2\omega^2 > 0 \quad \text{INSTABILE (??)}$$

$$\left(\text{ESSENDO } \frac{3g}{4l\omega^2} < 1\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\bar\alpha} = mgl\cos\alpha + \frac{4}{3}ml^2\omega^2\left[\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\right]$$

$$= mgl\cos\alpha + \frac{4}{3}ml^2\omega^2\left[2\cos^2\alpha - 1\right]\Big|_{\alpha=\bar\alpha,\,-\bar\alpha}$$

$$= mgl\left(-\frac{3g}{4l\omega^2}\right) + \frac{4}{3}ml^2\omega^2\left[2\cdot\frac{9g^2}{16l^2\omega^4} - 1\right]$$

$$= \frac{4}{3}ml^2\omega^2\left\{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\frac{g}{l\omega^2}\right)^2 - 1}_{<0}\right\} < 0$$

$$\boxed{\text{MAX} \Rightarrow \text{STABILE}}$$

NOTA: "RICORDIAMO CHE $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ NON POTREBBERO ESSERE STUDIATE CON QUESTA COORDINATA

ABBIAMO CHE SE DEF.

$$\mathcal{L} = T + U^{(c)} \qquad \text{AVREMO} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(altr)}$$

ALLORA SE CALCOLO L'ENERGIA GENERALIZZATA

$$H = T - U^{(c)} = \dot q^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \mathcal{L}$$

$$\frac{dH}{dt} = \cancel{\ddot q^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha}} + \dot q^\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\right]\dot q^\alpha = Q_\alpha^{(altr)}\dot q^\alpha$$

OSSERVIAMO CHE IN QUESTO CASO LE $Q_\alpha^{(altr)} = Q_\alpha^{(Coriolis)}$

PERCHÉ LE FORZE CENTRIFUGHE AMMETTONO IL POTENZIALE

QUINDI $$Q_\theta^{(cor)}\dot\theta + Q_\varphi^{(cor)}\dot\varphi = \frac{8}{3} m \ell^2 \omega \dot\theta \dot\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$- \frac{8}{3} m \ell^2 \omega \dot\theta \dot\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

QUINDI $\frac{dH}{dt} = 0 \qquad H = T - U = \text{COSTANTE}$

LE FORZE DI CORIOLIS RIENTRANO TRA LE FORZE "DISSIPATIVE"

INQUANTO $Q_\alpha \dot q^\alpha \le 0$ (IN QUESTO CASO $Q_\alpha \dot q^\alpha = 0$)

QUINDI LE SOLUZIONI STABILI, DEDOTTE DALLO STUDIO DEL SOLO POTENZIALE CONSERVATIVO, SONO ANCORA STABILI

PERCHÉ LE FORZE "NON CONSERVATIVE" SONO DISSIPATIVE CIOÈ $Q_\alpha \dot q^\alpha \le 0$ (NEL NOSTRO CASO $Q_\alpha \dot q^\alpha = 0$)

QUINDI ANCHE INCLUDENDO LA FORZA DI CORIOLIS

SE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} > 1$ LA $\theta = 0$ È ANCORA STABILE

ENERGIA CINETICA:

PER IL SINGOLO PUNTO

$$T_P = \frac{1}{2} m_P \dot{P}^2 = \frac{1}{2} m_P \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right]^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = [s \cos\alpha \cos\varphi , \; s \cos\alpha \, \text{sen}\varphi , \; - s \, \text{sen}\alpha]$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = [- s \, \text{sen}\alpha \, \text{sen}\varphi , \; s \, \text{sen}\alpha \cos\varphi , \; 0]$$

DA CUI:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right)^2 = s^2 \cos^2\alpha + s^2 \text{sen}^2\alpha = s^2 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 = s^2 \text{sen}^2\alpha \\ \frac{\partial P}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$T_P = \frac{1}{2} m_P (s^2 \dot{\alpha}^2 + s^2 \text{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi}^2)$$

INTEGRANDO SU TUTTA L'ASTA

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\ell} \sigma \, ds \, (s^2 \dot{\alpha}^2 + s^2 \text{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\ell} \right) (\dot{\alpha}^2 + \text{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi}^2) \cdot \underbrace{\int_0^{2\ell} s^2 \, ds}_{\frac{1}{3} 8 \ell^3} =$$

$$T = \frac{2}{3} m \ell^2 (\dot{\alpha}^2 + \text{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi}^2)$$

NOTA: $\underbrace{\text{KONIG.}}_{\text{(O ANCHE IL MOTO DI PURA ROTAZIONE ATTORNO AD UN PUNTO FISSO)}}$ DI PIÙ DIFFICILE APPLICAZIONE PERCHÉ $\omega = \dot{\varphi} \underline{u} + \dot{\alpha} \underline{u}'$

EQUAZIONI DI MOTO:

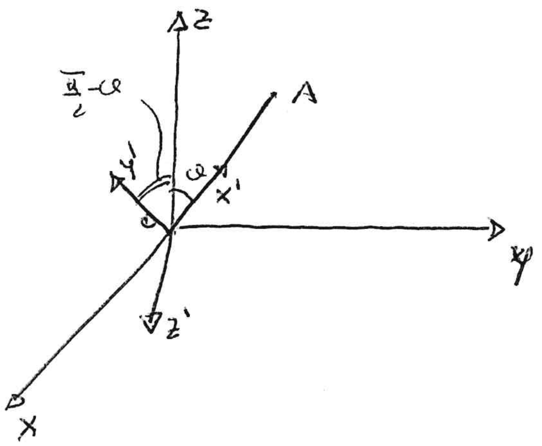
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{4}{3} m \ell^2 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{4}{3} m \ell^2 \, \text{sen}\alpha \cos\alpha \, \dot{\varphi}^2 \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha^{(T)}$$

) SE FISSO φ AVRÒ UNA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE ORTOGONALE AL PIANO CONTENENTE L'ASTA E L'ASSE z CON VELOCITA' ANGOLARE $\dot\theta$ CIOE' $\underline{\omega}_1 = \dot\theta\, \underline{u}'$
L'ASSE u' COINCIDE CON L'ASSE z' DEL RIF. PRINCIPALE DI INERZIA CHE CONSIDEREREMO)

SE FISSO θ AVRÒ UNA ROTAZIONE ATTORNO L'ASSE z CON VELOCITA' ANGOLARE
$\underline{\omega}_2 = \dot\varphi\, \underline{u}$ ($\underline{u}$ VERSORE ASSE $\underline{z}$)

LLORA CONSIDERO IL RIFERIMENTO "PRINCIPALE DI INERZIA" GIA' USATO PRIMA
SSE x' COINCIDENTE CON L'ASTA $\overline{OA}$
SSE $y' \perp x'$ NEL PIANO CONTENENTE L'ASSE z E L'ASTA $\overline{OA}$
SSE $z' \perp$ AL PIANO CONTENENTE L'ASSE z E L'ASTA $\overline{OA}$



IN QUESTO CASO $z' = u'$ E $u = z$
CALCOLIAMO LE COMPONENTI DI $u' = z'$ ED $u = z$ NEL RIFERIMENTO $\{O, x', y', z'\}$

$u' = z' \equiv (0, 0, 1)$

$\underline{u} = \underline{z} \equiv \{\cos(z, x'), \cos(z, y'), 0\} =$

$= \{\cos\theta, \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)}_{\sin\theta}, 0\} = \{\cos\theta, \sin\theta, 0\}$

QUINDI NEL RIFERIMENTO $\{O, x', y', z'\}$ SE CALCOLIAMO LA VELOCITA' ANGOLARE

$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$ AVREMO $\underline{\omega}_1 = \dot\theta\, \underline{u}' = (0, 0, \dot\theta)$

$\underline{\omega}_2 = \dot\varphi\, u = (\dot\varphi\cos\theta, \dot\varphi\sin\theta, 0)$

DA CUI $\underline{\omega} = \{\dot\varphi\cos\theta, \dot\varphi\sin\theta, \dot\theta\}$ NEL RIF. $\{O, x', y', z'\}$ CHE E'
RINCIPALE DI INERZIA. QUINDI ESSENDO UN MOTO RIGIDO CON PUNTO FISSO AVREMO:

$T = \frac{1}{2} I_{\alpha'\beta'}\, \omega^{\alpha'} \omega^{\beta'} =$ ESSENDO $I_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix}$

AVREMO

$$T = \frac{1}{2}\left\{ I_{2'2'} (\omega^{2'})^2 + I_{3'3'} (\omega^{3'})^2 \right\} = \frac{2}{3} ml^2 \left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2 \right)$$

$$\boxed{\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\alpha} - \frac{4}{3} m l^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, \dot{\varphi}^2 = Q_\alpha^{(T)} = mgl \operatorname{sen}\alpha + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \frac{8}{3} m l^2 \omega \dot{\varphi} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha .}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}\, 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, \dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

DA cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi^{(T)}$$

$$\boxed{\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{8}{3} m l^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, \dot{\varphi} \dot{\alpha} = Q_\varphi^{T} = -\frac{8}{3} m l^2 \omega \dot{\alpha} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha .}$$

"INTEGRALI PRIMI"

DAL MOMENTO CHE LA $F_{cor.}$ NON COMPIE LAVORO

$$\delta L = F_{cor} \cdot \delta P = \underline{F}_{cor} \cdot \frac{\delta P}{\delta t} \delta t = \underline{F}_{cor} \cdot \underline{v}\, dt = 0$$

SI CONSERVA L'ENERGIA TOTALE $\Rightarrow$ RETRO

$E = T - U$ DOVE U È IL POTENZIALE DELLE SOLE FORZE CONSERVATIVE

$$\boxed{E = \frac{2}{3} m l^2 (\dot{\alpha}^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\varphi}^2) + mgl \cos\alpha - \frac{2}{3} m l^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha .}$$

INOLTRE ABBIAMO UNA VARIABILE CICLICA φ PERCHÉ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi^{(cor)} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{cor}}{\partial \dot{\varphi}} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T + U_{cor})}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T + U_{cor}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{COSTANTE}$$

UN ALTRO MODO PER VEDERE CHE L'ENERGIA ASSOCIATA ALLE FORZE CONSERVATIVE SI "CONSERVA" È QUELLO DI

1) MOLTIPLICO LA 1ª EQUAZIONE PER $\dot{\theta}$

2) MOLTIPLICO LA 2ª EQUAZ. PER $\dot{\varphi}$ E SOMMO

INFATTI

1) $\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{4}{3} m\ell^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot{\varphi}^2\dot{\theta} - mg\ell \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}$

$- \frac{4}{3} m\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot{\theta} - \frac{8}{3} m\ell^2\omega\, \dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$

2) $\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi}\dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\theta + \frac{8}{3} m\ell^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot{\varphi}^2\dot{\theta} + \frac{8}{3} m\ell^2\omega\, \dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$

DA CUI SOMMANDO:

$$\underbrace{\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\theta}^2\right)} + \underbrace{\frac{4}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi}\dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\theta + \frac{4}{3} m\ell^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot{\varphi}^2\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3} m\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right)}$$

$$\underbrace{- mg\ell \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(mg\ell\cos\theta\right)} \underbrace{- \frac{4}{3} m\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, \dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{3} m\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)} = 0$$

DA CUI

$$\frac{d}{dt}\left\{ \underbrace{\frac{2}{3} m\ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + mg\ell\cos\theta - \frac{2}{3} m\ell^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta}_{E = T - V} \right\} = 0$$

Da cui

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left\{ \frac{2}{3} m \ell^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \operatorname{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{4}{3} m \ell^2 \omega \operatorname{sen}^2\alpha \, \dot{\varphi} \right\} = K$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{4}{3} m \ell^2 \omega \operatorname{sen}^2\alpha = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{3} m \ell^2 \operatorname{sen}^2\alpha \left(\dot{\varphi} + \omega \right) = K}$$

MOTI LINEARIZZATI

$$F(\varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta, \ddot\varphi, \ddot\theta) = \frac{4}{3} m l^2 \ddot\theta + \frac{4}{3} m l^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \dot\varphi^2 - mgl \operatorname{sen}\theta$$
$$- \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \frac{8}{3} m l^2 \omega \dot\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$F\Big|_{(\theta,\varphi)=S_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta}\Big|_{S_1} = -mgl\cos\theta - \frac{4}{3} m l^2 \omega^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\Big|_{S_1} =$$
$$= -mgl - \frac{4}{3} m l^2 \omega^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big|_{S_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot\theta}\Big|_{S_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot\varphi}\Big|_{S_1} = -\frac{8}{3} m l^2 \omega \operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big|_{S_1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot\theta} = \frac{4}{3} m l^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial \ddot\varphi}\Big|_{S_1} = 0$$

$S_1 = (0, \varphi)\ \forall\varphi$

$S_2 = (\pi, \varphi)\ \forall\varphi$

$$\boxed{\frac{4}{3} m l^2 \ddot\theta = \left(mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2\right)\theta}$$

NOTA:
$G(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi, \ddot\theta, \ddot\varphi) \Rightarrow$ nello sviluppo avremo un'identità $0 = 0$ $\Rightarrow$
questo indica che i parametri lagrangiani non sono buoni

NON VI È UNICITÀ NELLE INVERSIONI.

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m l^2 \ddot\theta = \left(mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2\right)\theta \\ 0 = 0 \end{cases}$$ ← ATTORNO AA $S_1 \equiv (0, \varphi)\ \forall\varphi$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m l^2 \ddot\theta = +\left(-mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2\right)(\theta - \pi) \\ 0 = 0 \end{cases}$$ ← ATTORNO AA $S_2\ (\pi, \varphi)$

NEL 1° CASO $\theta = \theta_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{4}{3} m l^2 \lambda^2 = \left(mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2\right)$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2}{\frac{4}{3} m l^2} = a > 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{a}$$ MOTO ESPONENZIALE

NEL 2° CASO: $\theta - \pi = \theta_0 e^{\lambda t}$ $\qquad \lambda^2 = + \dfrac{\left(-mgl + \frac{4}{3} m l^2 \omega^2\right)}{\frac{4}{3} m l^2} = a < 0$

~~[illegible]~~

NEL 1° CASO MOTI ARMONICI → SE $\dfrac{3g}{4l\omega^2} > 1 \Rightarrow -mgl + \frac{4}{3} m l \omega^2 < 0$

[illegible] → SE $\dfrac{3g}{[illegible]} < 1 \Rightarrow -mgl + \frac{4}{3} m l \omega^2 > 0$

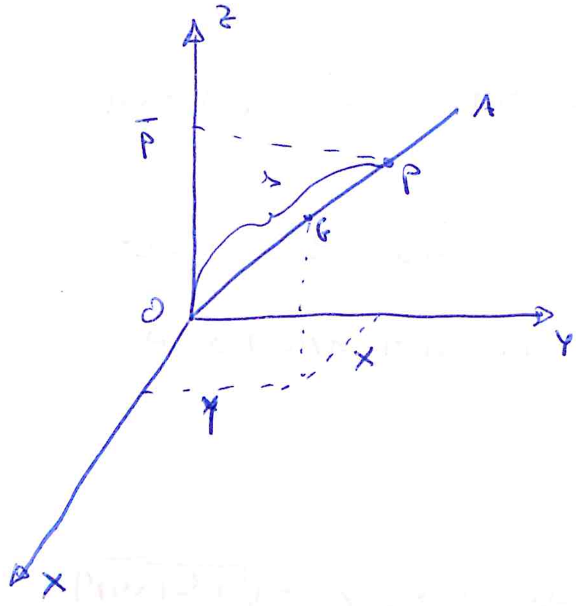
NOTIAMO CHE IL TERMINE DI FORZA DI CORIOLIS
NON HA MAI TERMINI LINEARI NELLO SVILUPPO ATTORNO A QUESTI
QUINDI A LIVELLO LINEARE E' COME SE NON CI FOSSE.

LO STUDIO DELLA STABILITÀ, FATTO AVENDO TRASCURATO LA FORZA
DI CORIOLIS, HA QUINDI UNA EQUIVALENZA CON L'ANALISI
LINEARE. ANCHE SE LA MAPPATURA NON È VALIDA E QUINDI
IL PROBLEMA VA ANALIZZATO CON NUOVE COORDINATE.

SCEGLIAMO COME NUOVE VARIABILI LAGRANGIANE

$(\varphi, \psi) \to x, y$ ossia x, y coordinate nel piano di G.

NOTA: per uguali valori di $x, y \Rightarrow$ punti differenti (nella coordinata z) quindi: invertibilità non è univoca $\Rightarrow$ retro



in tutto lo spazio

$$G \equiv \left\{ x,\, y,\, \pm\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)} \right\}$$

Ci restringeremo allo studio nell'intorno dell'asse z ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi$) quindi o nel semispazio superiore o nel semispazio inferiore.

$$G-O : \ell = (P-O) : \lambda$$

$$\Rightarrow (P-O) = \frac{\lambda}{\ell}(G-O)$$

$$P \equiv \left\{ \frac{\lambda}{\ell}x,\ \frac{\lambda}{\ell}y,\ \pm\frac{\lambda}{\ell}\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)} \right\}$$

$$\bar{P} = \left\{ 0,\ 0,\ \pm\frac{\lambda}{\ell}\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)} \right\}$$

$$U_p = mg\,(0,0,-1)\cdot(G-O) = \mp mg\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}$$

$$U_c^{(P)} = \frac{1}{2}m_p\,\omega^2(P-\bar{P})^2 = \frac{1}{2}m_p\,\omega^2\frac{\lambda^2}{\ell^2}(x^2+y^2)$$

da cui $U_c^{(T)} = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\ell^2}(x^2+y^2)\,\sigma\int_0^{2\ell}\lambda^2 d\lambda = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\cancel{\ell^2}}(x^2+y^2)\left(\frac{m}{2\ell}\right)\frac{1}{3}8\cancel{\ell^3} =$

$$= \frac{3}{3}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$U_p + U_c^T = \mp mg\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)} + \frac{2}{3}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$dQ_x^{(P)\,COR.} = -2dm_p\,\underline{\omega}\wedge\dot{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} = -2m_p\,\underline{\omega}\wedge\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}} + \frac{\partial P}{\partial y}\dot{y}\right)\cdot\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$= -2dm_p\,\dot{y}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & \frac{\lambda}{\ell} & (\dots) \\ \frac{\lambda}{\ell} & 0 & (\dots) \end{vmatrix} = +2dm_p\,\dot{y}\,\omega\frac{\lambda^2}{\ell^2}$$

da cui integrando:

$$Q_x^{(T)\,COR} = 2\frac{\omega}{\ell^2}\dot{y}\,\sigma\int_0^{2\ell}\lambda^2 d\lambda = \cancel{2}\frac{\omega}{\cancel{\ell^2}}\dot{y}\frac{m}{\cancel{2\ell}}\frac{8\cancel{\ell^3}}{3} = \frac{8}{3}m\omega\dot{y}$$

$$dQ_y^{(COR)} = -2\,dm\left[\omega\wedge\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}\right]\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = -2\omega\lambda^2\dot{x}\,dm \Rightarrow Q_y^{(COR)} = -\frac{8}{3}m\omega\dot{x}$$

QUINDI SE PASSO DALLE COORDINATE CARTESIANE $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{z})$ ... NUOVE COORDINATE $x, y \pm\sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)}$ L'INVERSIONE NON È UNIVOCA.

SIA A L'ESTREMO DELL'ASTA

COORDINATE CARTESIANE $\bar{X}, \bar{Y}, z \Rightarrow (\rho, \theta, \varphi)$ CON $\rho = \ell$ FISSO

QUINDI DUE PARAMETRI LAGRANGIANI.

$$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{z}) \to (\rho, \theta, \varphi)$$ TRANNE QUANDO $\rho \sin\theta = 0$

QUINDI $\theta = 0, \pi$ CIOÈ SULL'ASSE ZETA IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI NON È UNIVOCO.

ANALOGAMENTE

$$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{z}) \to (\bar{X}, \bar{Y}, z) \to (x, y, \pm\sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)})$$

AD UNA UNICA COPPIA $(x,y) \Rightarrow$ DUE VALORI DI $z = \pm\sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)}$

CIOÈ DUE PUNTI DISTINTI QUINDI IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI È UNIVOCO SOLO NEI DUE SEMISPAZI SEPARATAMENTE.

RICORDIAMO CHE

$y = \sin(x) \Rightarrow x = \arcsin(y)$ solo se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi/2$

$y = \cos x \Rightarrow x = \arccos(y)$ solo se $0 \le x \le \pi$.

CIOÈ DOVE LA FUNZIONE È MONOTONA CRESCENTE (O DECRESCENTE) IN MODO CHE SI POSSA CALCOLARE LA SUA INVERSA IN MODO UNICO.

$$Q_y^{(P,\,cor)} = -2m_p(\omega \wedge \dot{P})\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = -2m_p\left[\bar{\omega}\wedge\left(\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}+\cancel{\frac{\partial P}{\partial y}\dot{y}}\right)\right]\cdot\frac{\partial P}{\partial y}$$ (14)

$$= -2m_p\dot{x}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{\ell} & 0 & (\dots) \\ 0 & \frac{1}{\ell} & (\dots) \end{vmatrix} = -2m_p\dot{x}\frac{1^2}{\ell^2}\omega$$

$$Q_y^{(T)\,cor} = -2\frac{\omega}{\ell^2}\dot{x} \int_0^{2\ell} d^2 = -\frac{\cancel{2}\omega}{\cancel{\ell^2}}\dot{x}\left(\frac{m}{\cancel{2\ell}}\right)\frac{8\ell^3}{3} = -\frac{8}{3}m\omega\dot{x}$$

$$Q_x^T = \frac{\partial U}{\partial x} + Q_x^{(cor)} = \mp\frac{mg\,(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}} + \frac{4}{3}m\omega^2 x + \frac{8}{3}m\omega\dot{y}$$

$$Q_y^T = \frac{\partial U}{\partial y} + Q_y^{(cor)} = \pm\frac{mg\,y}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}} + \frac{4}{3}m\omega^2 y - \frac{8}{3}m\omega\dot{x}$$

Condizioni di equilibrio per atto di moto nullo. $\dot{x}=\dot{y}=0$

"RETRO" ⇒

$Q_x^T = 0 \quad Q_y^T = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$

$S_1 \equiv (0,0,-\ell) \qquad S_2 = (0,0,\ell)$

A due diverse configurazioni corrispondono la stessa coppia di par. Lagrangiani.

Energia cinetica $\dot{P} = \left\{\frac{1}{\ell}\dot{x},\ \frac{1}{\ell}\dot{y},\ \mp\frac{1}{\ell}\frac{\dot{x}x+\dot{y}y}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}\right\}$

$$\frac{1}{2}m_p\dot{P}^2 = \frac{1}{2}m_p\frac{1^2}{\ell^2}\left\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{(\dot{x}x+\dot{y}y)^2}{\ell^2-(x^2+y^2)}\right\}$$

da cui integrando.

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{\ell^2}}\left\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{(\dot{x}x+\dot{y}y)^2}{[\ell^2-(x^2+y^2)]}\right\}\frac{m}{2\cancel{\ell}}\frac{8\cancel{\ell^3}}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}m\left\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{(\dot{x}x+\dot{y}y)^2}{[\ell^2-(x^2+y^2)]}\right\}$$

14B

$$Q_x^T\Big|_{\dot x=\dot y=0}=0 \Rightarrow \pm\frac{mg\,x}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}+\frac{4}{3}m\omega^2x=0$$

$$Q_y^T\Big|_{\dot x=\dot y=0}=0 \Rightarrow \pm\frac{mg\,y}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}+\frac{4}{3}m\omega^2y=0$$

$$\Rightarrow \left\{\pm\frac{mg}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}+\frac{4}{3}m\omega^2\right\}x=0$$

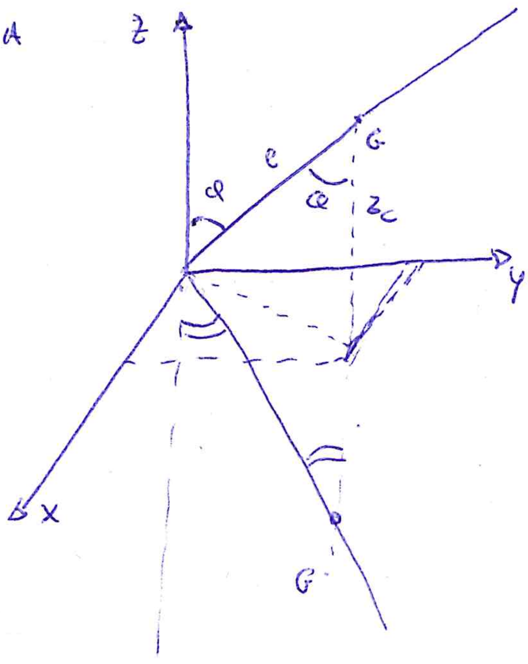
$$\Rightarrow \left\{\pm\frac{mg}{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}+\frac{4}{3}m\omega^2\right\}y=0$$

DA CUI $x=0$ e $y=0$ $\Rightarrow S_1\{0,0,\ell\}$, $S_2\equiv\{0,0,-\ell\}$

OPPURE $$\pm\frac{\cancel{m}g}{\underbrace{\sqrt{\ell^2-(x^2+y^2)}}_{z_G}}+\frac{4}{3}\cancel{m}\omega^2=0$$

$$\Rightarrow \pm\frac{\ell}{z_G}=-\frac{4\ell\omega^2}{3g}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{z_G}{\ell}=-\dfrac{3g}{4\ell\omega^2}\Rightarrow\\[2mm] -\dfrac{z_G}{\ell}=-\dfrac{3g}{4\ell\omega}\end{cases}$$

MA



$$|z_G|=\ell\cos\alpha \Rightarrow \frac{|z_G|}{\ell}=\cos\alpha=-\frac{3g}{4\ell\omega^2}$$

$$\Rightarrow \bar\alpha=\arccos\left(-\frac{3g}{4\ell\omega^2}\right)$$

$\Rightarrow$ DA CUI $(\bar\alpha,\varphi)$ $(-\bar\alpha,\varphi)$

NOTA: OSSERVIAMO CHE CON QUESTE NUOVE VARIABILI (DOVE LA BIUNIVOCITÀ È VALIDA SOLO NEI DUE SEMISPAZI PRESI SEPARATAMENTE) I TERMINI DI CORIOLIS SONO GIÀ LINEARI NELLE VARIABILI ESSENDO

$$Q_x^{(cor)} = \frac{8}{3} m\omega \dot{y} \quad \text{ED} \quad Q_y^{(cor)} = -\frac{8}{3} m\omega \dot{x}$$

QUESTO È VERO ANCHE PER I TERMINI DI FORZA CENTRIFUGA

$$Q_x^{(cent)} = \frac{4}{3} m\omega^2 x \quad \text{ED} \quad Q_y^{(cent)} = \frac{4}{3} m\omega^2 y$$

HA SENSO STUDIARE LA STABILITÀ TRASCURANDO LE FORZE DI CORIOLIS CHE IN QUESTO CASO SONO PURE LINEARI. IN GENERALE NO

FACCIAMOLO:

$$Q_x = \pm \frac{mg}{\sqrt{e^2-(x^2+y^2)}}\, x + \frac{4}{3} m\omega^2 x \Rightarrow U_{xx} = \frac{4}{3} m\omega^2 \pm \frac{mg}{\sqrt{e^2-(x^2+y^2)}} \pm \frac{mg\, x^2}{[e^2-(x^2+y^2)]^{3/2}}$$

$$Q_y = \pm \frac{mg}{\sqrt{e^2-(x^2+y^2)}}\, y + \frac{4}{3} m\omega^2 y \Rightarrow U_{yy} = \frac{4}{3} m\omega^2 \pm \frac{mg}{\sqrt{e^2-(x^2+y^2)}} \pm \frac{mg\, y^2}{[\quad]^{3/2}}$$

$$U_{xy} = U_{yx} = \pm mg \frac{x \cdot y}{[e^2-(x^2+y^2)]^{3/2}}$$

$S_1 \equiv (0, 0, e)$

$S_2 = (0, 0, -e)$

$$U_{xx}|_{S_1} = \frac{4}{3} m\omega^2 + \frac{mg}{e} = U_{yy}|_{S_1} > 0 \qquad H|_{S_1} > 0 \Rightarrow \text{INSTABILE}$$

$$U_{xy}|_{S_1} = 0$$

$$\begin{cases} U_{xx}|_{S_2} = U_{yy}|_{S_2} = \frac{4}{3} m\omega^2 - \frac{mg}{e} \\ U_{xy}|_{S_2} = 0 \end{cases} \qquad H|_{S_2} > 0$$

$S_2 \quad \frac{3g}{4e\omega^2} > 1 \quad U_{xx}|_{S_2} = U_{yy}|_{S_2} < 0 \qquad$ STABILE

$S_2 \quad \frac{3g}{4e\omega^2} < 1 \quad U_{xx}|_{S_2} = U_{yy}|_{S_2} > 0 \qquad$ INSTABILE $\Rightarrow$ SEGUE ROTR

NEL CASO DELLE CONF. $(\bar{\alpha}, \varphi)$ $(-\bar{\alpha}, \varphi)$

AVREMO SEMPRE $H(x,y)\Big|_{\substack{\bar{\alpha},\varphi \\ -\bar{\alpha},\varphi}} = 0$

NOTA 2:
OSSERVO INOLTRE CHE ANCHE IN QUESTO CASO

$$\frac{dH}{dt} = Q_\alpha^{(COR)} \dot{q}^\alpha = Q_x^{(COR)} \dot{x} + Q_y^{(COR)} \dot{y} = \frac{8}{3} m\omega \dot{y}\dot{x} - \frac{8}{3} m\omega \dot{x}\dot{y} = 0$$

QUINDI LE CONFIGURAZIONI STABILI RIMANGONO TALI ANCHE IN PRESENZA DELLA FORZA DI CORIOLIS.

CIOÈ LA $S_2 \equiv (0,0,-\ell)$ PER $\frac{3g}{4\ell\omega^2} \gtrless 1$ STABILE

NOTA 3:
NEL CASO LINEARE (I SOLI TERMINI DELLO VARIABILI (x,y))

$S_2 \equiv (0,0,-\ell)$ È STABILE SEMPRE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} \gtrless 1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{4}{3} m \dot{x} + \frac{2(\dot{x}x + \dot{y}y)x}{[e^2 - (x^2+y^2)]^2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{4}{3} m \ddot{x} + \text{T. NON LINEAR.}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{T. NON LINEAR.}$$

QUINDI L'UNICO SE CONSIDERIAMO PICCOLE OSCILLAZIONI LE EQUAZ. DI MOTO LINEARIZZATE ATTORNO (0,

$$T \simeq \frac{2}{3} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

DA CUI

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{4}{3} m \ddot{x} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \simeq 0\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4}{3} m \ddot{y} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \simeq 0\right)$$

ANALOGAMENTE QUANDO LINEARIZZIAMO LE SOLLECITAZIONI

$$Q_x = \pm \frac{mg\,x}{\sqrt{e^2 - (x^2+y^2)}} + \frac{4}{3} m\omega^2 x + \frac{8}{3} m\omega \dot{y}$$

$$\simeq \left(\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m\omega^2\right) x + \frac{8}{3} m\omega \dot{y}$$

$$Q_y = \pm \frac{mg\,y}{\sqrt{e^2 - (x^2+y^2)}} + \frac{4}{3} m\omega^2 y - \frac{8}{3} m\omega \dot{x}$$

$$\simeq \left(\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m\omega^2\right) y - \frac{8}{3} m\omega \dot{x}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m \ddot{x} = \pm \frac{mg}{e} x + \frac{4}{3} m\omega^2 x + \frac{8}{3} m\omega \dot{y} \\ \frac{4}{3} m \ddot{y} = \pm \frac{mg}{e} y + \frac{4}{3} m\omega^2 y - \frac{8}{3} m\omega \dot{x} \end{cases}$$

CERCO SOLUZIONI $x = x_0 e^{\lambda}$ $y = y_0 e^{\lambda}$

$$\left[\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2 - \frac{4}{3} m \lambda^2\right] x_0 + \left(\frac{8}{3} m \omega \lambda\right) y_0 = 0$$

$$\left[\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2 - \frac{4}{3} m \lambda^2\right] y_0 + \left(-\frac{8}{3} m \omega \lambda\right) x_0 = 0$$

DA CUI L'EQUAZIONE SECOLARE

$$\left[\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2 - \frac{4}{3} m \lambda^2\right]^2 + \frac{64}{9} m^2 \omega^2 \lambda^2 = 0$$

$$\frac{16}{9} m^2 \lambda^4 + \left[-\frac{8}{3} m \left(\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2\right) + \frac{64}{9} m^2 \omega^2\right] \lambda^2 + \left(\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2\right)^2 = 0$$

$$\frac{16}{9} m^2 \lambda^4 - \frac{8}{3} m \left[\pm \frac{mg}{e} - \frac{4}{3} m \omega^2\right] \lambda^2 + \left(\pm \frac{mg}{e} + \frac{4}{3} m \omega^2\right)^2 =$$

$\lambda^2 = z \implies a z^2 + b z + c = 0$

SE CALCOLIAMO IL $\frac{\Delta}{4}$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{16}{9} m^2 \left\{ \left[\underbrace{\pm \frac{mg}{e}}_{a} - \underbrace{\frac{4}{3} m \omega^2}_{b}\right]^2 - \left(\underbrace{\pm \frac{mg}{e}}_{a} + \underbrace{\frac{4}{3} m \omega^2}_{b}\right)^2 \right\}$$

$$= \mp \frac{16}{3} m^2 \cdot \frac{16}{3} m^2 \frac{g \omega^2}{e}$$

ALLORA SE CONSIDERIAMO LA CONF. PIÙ BASSA $(0, 0, -e)$

AVREMO $\frac{\Delta}{4} = \frac{(16)^2}{27} m^4 \frac{g \omega^2}{e} > 0$ DUE SOLUZIONI REALI DISTINTE

DUE RADICI λ^2 REALI NEGATIVE ($a z^2 + b z + c = 0$ $a, b, c > 0$

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} < 0$ $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} > 0$

$z_1, z_2 < 0$)

$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{|z_1|}$ $\boxed{z = -\left[\omega^2 + \frac{3g}{4e}\right] \pm \sqrt{\frac{3g\omega^2}{e}}}$

$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|z_2|}$ MOTI ARMONICI (QUESTI MOTI SONO ASSOCIATI AL PENDOLO DI FOUC

CONF. PIÙ ALTA $(0, 0, e)$ $\frac{\Delta}{4} < 0$ $\lambda^2 = \tilde{a} + i \tilde{b}$

λ_1, λ_2 COMPLESSI A PARTE REALE NON NULLA. MOTI SONO SMORZATI O

ALLORA NEL CASO IN CUI $\frac{\Delta}{4} < 0$

AVREMO RADICI COMPLESSE DEL TIPO

$$\lambda^2 = \tilde{a} + i\tilde{b}$$

CHE AMMETTERANNO SOLUZIONI DEL TIPO

$$\lambda = \pm \left[\sqrt{\frac{\rho + \tilde{a}}{2}} + i\, k \sqrt{\frac{\rho - \tilde{a}}{2}} \right] \qquad \Rightarrow \underline{\text{RETRO}}$$

$$\text{CON} \quad k = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{b} = 0 \\ \dfrac{\tilde{b}}{|\tilde{b}|} & \text{se } \tilde{b} \neq 0 \end{cases} \qquad \text{CON} \quad \rho = \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}$$

LE PARTI REALI SARANNO $\pm\sqrt{\frac{\rho + \tilde{a}}{2}}$ DA CUI AVREMO MOTI SMORZATI NEL CASO IN CUI $-\sqrt{\frac{\rho+\tilde{a}}{2}}$ E MOTI ESPONENZIALI CRESCENTI (NEL TEMPO) NEL CASO IN CUI $\sqrt{\frac{\rho+\tilde{a}}{2}}$.

(QUESTO A PRESCINDERE DAL FATTO CHE $\frac{3g}{4\ell\omega^2} \gtrless 1$)

"NOTA!"

PER $\alpha = 0$ ($S_1 \equiv (0, 0, +\ell)$) $\Delta/4 < 0$

~~DA CUI PER LA PARTE REALE POSITIVA~~

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = \tilde{a} + i\tilde{b} \\ \\ \lambda_2^2 = \hat{a} - i\tilde{b} \end{cases} \qquad \text{CON} \quad \hat{a} = \omega^2 \left[\frac{3g}{4\ell\omega^2} - 1 \right] \qquad \hat{b} = \sqrt{\frac{3g\,\omega^2}{\ell}}$$

DA CUI CONSIDERANDO LA PARTE REALE POSITIVA $\sqrt{\frac{\rho + a}{2}}$ AVREMO

DEI MOTI ~~ESPONENZIALI~~ (CRESCENTI) (~~INDIPENDENTEMENTE~~ DAL FATTO CHE $\frac{3g}{\dots} \gtrless \dots$)

17A

NOTA: SE CONSIDERO $\lambda^2 = (u+iv)^2 = a+ib$ CON $b\neq 0$

ALLORA:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - \dfrac{b^2}{4u^2} = a \\ v = \dfrac{b}{2u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u^4 - (4a)u^2 - b^2 = 0 & (1) \\ v = \dfrac{b}{2u} & (2) \end{cases}$$

DALLA 1ª $u^2 = x \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 4ax - b^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{a \cancel{\pm} \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$ (SCARTO IL SEGNO − PERCHÉ $u^2 = x \geq 0$)

DA CUI $u^2 = x = \dfrac{\rho + a}{2}$ (CON $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$) $\Rightarrow \boxed{u = \pm\sqrt{\dfrac{\rho+a}{2}}}$

DALLA (2) $\Rightarrow v = \dfrac{b}{2u} = \pm \dfrac{b}{\sqrt{2}\sqrt{\rho+a}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}\, b\sqrt{\rho+a}}{2(\rho+a)} = \pm \dfrac{b}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{\rho+a}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\rho+a}\,(a-\sqrt{a^2+b^2})}{\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-b^2} = \pm \frac{b}{\sqrt{2}\, b^2} \sqrt{\rho+a}\,\underbrace{(\rho-a)}_{\sqrt{(\rho-a)^2}}$$ (PERCHÉ $\rho - a \geq 0$)

$$= \pm \frac{b}{\sqrt{2}\,b^2}\sqrt{\rho+a}\,\sqrt{(\rho-a)}\,\sqrt{\rho-a} = \pm\frac{b}{\sqrt{2}\,b^2}\sqrt{\rho-a}\,\sqrt{\rho^2-a^2} =$$

$$= \pm \frac{b\sqrt{b^2}}{b^2}\sqrt{\frac{\rho-a}{2}} = \pm \frac{\cancel{|b|}\, b}{|b|^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\rho-a}{2}} = \pm \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}$$

$v = \pm \dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\rho-a}{2}}$ QUINDI SE $b \neq 0$ $\lambda = u+iv = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\rho+a}{2}} + i\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\rho-a}{2}}\right]$

SE $b = 0 \Rightarrow \lambda^2 = a \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \pm\sqrt{|a|} & \text{SE } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|} & \text{SE } a \leq 0 \end{cases}$

DA CUI LA FORMULA GENERALE:

$$\boxed{\lambda = \pm\left[\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + ik\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right] \quad \text{CON} \quad k = \begin{cases} 1 & \text{SE } b = 0 \\ \dfrac{b}{|b|} & \text{SE } b \neq 0 \end{cases}}$$

PER $a = \bar{u}$ $\quad S_2 = (0, 0, -e)$ $\quad A|_4 > 0$ $\quad z_1, z_2 \in R$

ESSENDO $\quad a z^2 + b z + c = 0$ $\quad$ CON $\quad a, b, c > 0$ $\quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} < 0$ $\quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} >$

DA CUI $\quad z_1, z_2 < 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{|z_1|} \qquad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|z_2|}$$ MOTI ARMONICI;

INDIPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE $\frac{3g}{4e\omega^2} \gtrless 1$

"CONFRONTO CON IL MOTO ESATTO

PER LA STABILITÀ"

MOTO ESATTO:

$S_2 = (0, 0, -e)$

SE $\frac{3g}{4e\omega^2} > 1$ $\quad u_{xx}|_{S_2} = u_{yy}|_{S_2} = \frac{4}{3} m\omega^2 - \frac{mg}{e} < 0$ $\quad H|_{S_2} > 0$ $\quad$ STABILE

MOTO LINEARIZZATO

$S_2 \equiv (0, 0, -e)$ $\quad$ STABILE SEMPRE INDIPENDENTEMENTE DAL

FATTO CHE $\quad \frac{3g}{4e\omega^2} \gtrless 1$

(NEL CASO $\quad \frac{3g}{4e\omega^2} = 1$ $\quad c = 0$ $\quad \Rightarrow \quad a z^2 + b z = z(a z + b) = 0$

DA CUI $\quad z = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 0$ MOTI UNIFORMI $\quad$ e $z = -\frac{b}{a} < 0$ (MOTO ARMONICO.)

"PER LA INSTABILITÀ NON HA ~~senso~~

SENSO IL CONFRONTO"