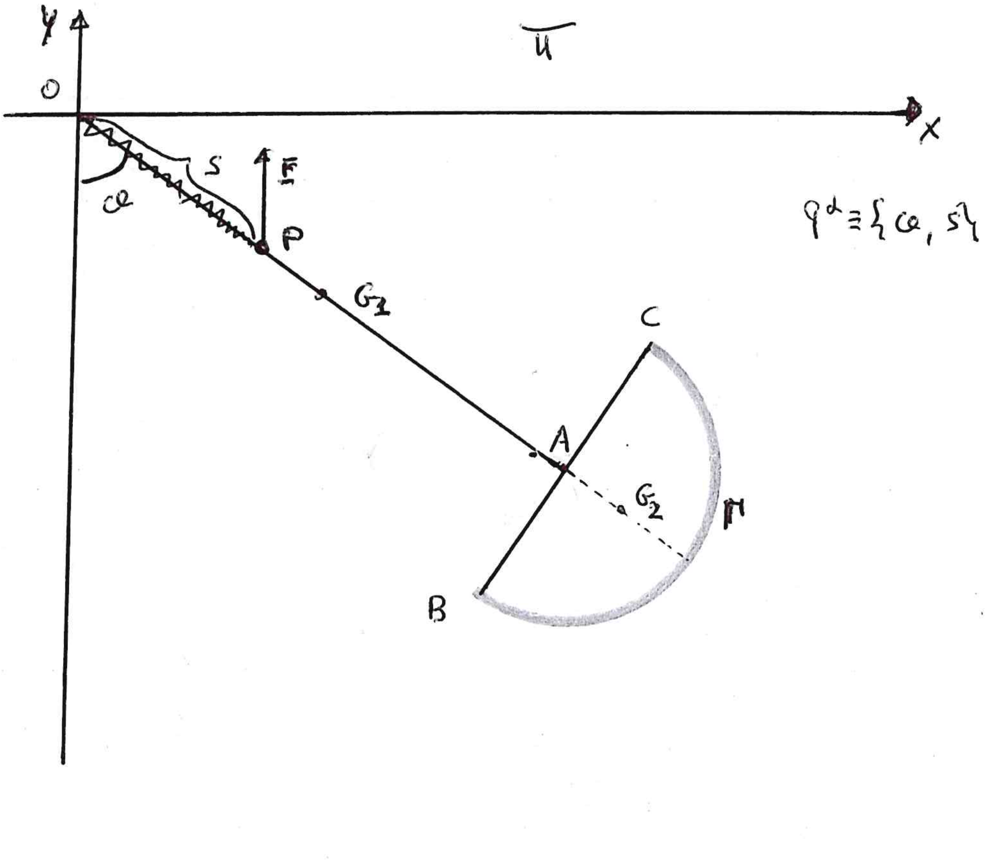
Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 20.12.2024

Un sistema materiale S, posto in un piano verticale Π, é costituito da an'asta omogenea OA di massa m, baricentro G_1 e lunghezza $2\,l$, da un semidisco omogeneo Γ di massa m, baricentro G_2 e raggio $l/2$, e da un punto materiale P di massa m. L'asta é libera di ruotare attorno al suo estremo O fissato nel piano, il punto P é libero di scorrere sull'asta OA, ed all'estremitá A dell'asta é saldato il centro della base CB del semidisco Γ in modo che la stessa base CB si mantenga ortogonale ad OA, con il baricentro G_2 del semidisco posto esternamente all'asta OA (vedi figura). Introducendo in Π il sistema di coordinate $\{O, x, y\}$ (con y verticale ascendente) utilizzeremo come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che l'asta OA forma con la verticale discendente e la distanza s del punto P dall'estremo O dell'asta (con $0 \leq s \leq 2l$). Oltre alle forze peso, agenti sulle varie parti del sistema S, il punto P é collegato tramite una molla di costante elastica $k > 0$ all'origine delle coordinate O ed inoltre, sempre su P, agisce una forza costante di modulo F parallela all'asse delle ordinate nel verso della y ascendente, essendo

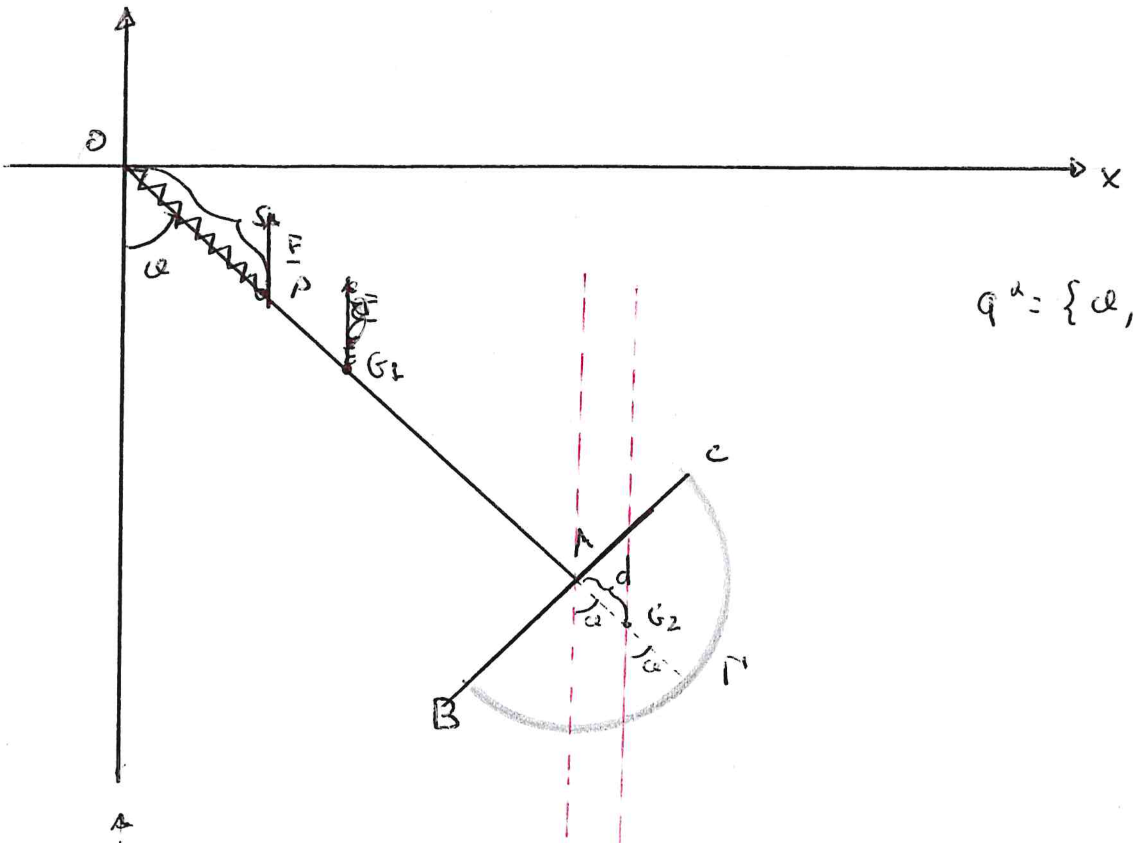
$$\{\mathbf{F}_1 = -k\,(P - O),\ P\} \qquad \text{ed} \qquad \{\mathbf{F} = F\,(0,1),\ P\}.$$

Supponendo tutti i vincoli lisci, si chiede di:

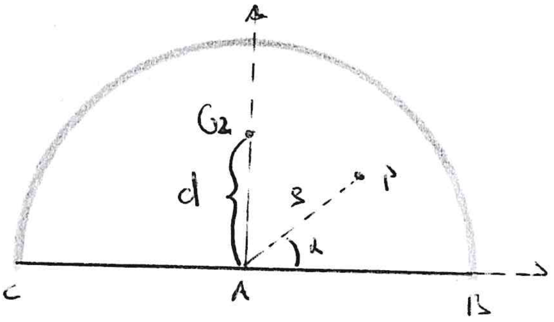
1. Determinare tutte le possibili configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema, studiando la stabilità-instabilità delle suddette configurazioni,
2. Scrivere le equazioni di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
3. Studiare i moti in prima approssimazione attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui l'asta occupa la posizione piú bassa consentita dai vincoli.
4. Supponendo infine che il piano Π possa ruotare attorno all'asse $\vec{y}$, con velocitá angolare uniforme ω, determinare esplicitamente il potenziale centrifugo associato al sistema S.



1



$q^\alpha = \{\varphi, s\}$



CALCOLIAMO LA POSIZIONE $\overline{AG_2} = d$ DEL BARICENTRO DEL SEMIDISCO

$$\overline{AG} = \frac{1}{m} \iint \rho \sin\alpha \, dm =$$

$$= \frac{1}{\cancel{m}} \frac{2\cancel{m}}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} \underbrace{\left[-\cos\alpha\right]_0^\pi}_{2} = \frac{4R}{3\pi}$$

ESSENDO $R = \ell/2$ ALLORA AVREMO $d = \overline{AG_2} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{2\ell}{3\pi}$

DEFINIAMO LE COORDINATE DEI PUNTI DI INTERESSE

$P = \{s \sin\varphi, -s\cos\varphi\}$ $\qquad G_1 = \{\ell \sin\varphi, -\ell\cos\varphi\}$

$G_2 = \{(2\ell + d)\sin\varphi, -(2\ell+d)\cos\varphi\}$

LE FORZE AGENTI SONO: 1) FORZA ELASTICA $\{\underline{F}_P = -K(P-O), P\}$

2) FORZA COSTANTE $\{\underline{F} = |F|(0,1), P\}$

FORZE PESO $\{F_{OA}^{peso} = mg(0,-1), G_1\}$ $\qquad \{F_P^{peso} = mg(0,-1), P\}$

$\{F_\Gamma^{peso} = mg(0,-1), G_2\}$

NEL CASO IN CUI IL PIANO π SIA IN ROTAZIONE ATTORNO L'ASSE y CON VELOCITÀ ANGOLARE UNIFORME ω AVREMO LE FORZE CENTRIFUGHE AGENTI SUI: PUNTO P, ASTA $\overline{OA}$, SCHIAISCO M.

METODO DEL POTENZIALE:

$$U^{PESO}_{\overline{OA}} = mg(0,-1)\cdot(G_1-O) = mg\ell\cos\varphi$$

$$U^{PESO}_{P} = mg(0,-1)\cdot(P-O) = mgs\cos\varphi$$

$$U^{PESO}_{M} = mg(0,-1)\cdot(G_2-O) = mg(2\ell+d)\cos\varphi$$

$$U^{ELASTICA} = -\frac{1}{2}K(P-O)^2 = -\frac{1}{2}Ks^2$$

$$U^{F} = |F|(0,1)\cdot(P-O) = -|F|s\cos\varphi$$

NOTA: NEL CASO IN CUI IL PIANO π SIA IN ROTAZIONE AVREMO (4° QUESITO)

1) $$U^{CENTR.}_{\overline{OA}} = \frac{1}{2}\omega^2\int(P-\bar{P})^2\,dm \qquad \forall P\in\overline{OA}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 I^{\overline{OA}}_{y,O}$$

INDICANDO CON $P\in\overline{OA}$ $\quad P=(x\sin\varphi,\ -x\cos\varphi)$

$$I^{\overline{OA}}_{y,O} = \int(x\sin\varphi)^2\,dm = \frac{m}{2\ell}\int_0^{2\ell}(x\sin\varphi)^2\,dx = \frac{m}{2\ell}\sin^2\varphi\int_0^{2\ell}x^2\,dx$$

$$= \frac{m}{2\ell}\sin^2\varphi\,\frac{8\ell^3}{3} = \frac{4}{3}m\ell^2\sin^2\varphi$$

DA CUI $$U^{CENTR.}_{\overline{OA}} = \frac{2}{3}m\ell^2\omega^2\sin^2\varphi$$

2) $$U^{CENTR}_{P} = \frac{1}{2}\omega^2 m(P-\bar{P})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 s^2\sin^2\varphi.$$

3) FORZA CENTRIFUGA SUL SCHIAISCO M

$$U^{CENTR}_{M} = \frac{1}{2}\omega^2\int(P-\bar{P})^2\,dm \qquad \forall P\in M$$

DA CUI

$$U_{P}^{CONTR} = \frac{1}{2}\,\omega^2\, I^{M}_{Y,O} \qquad (1)$$

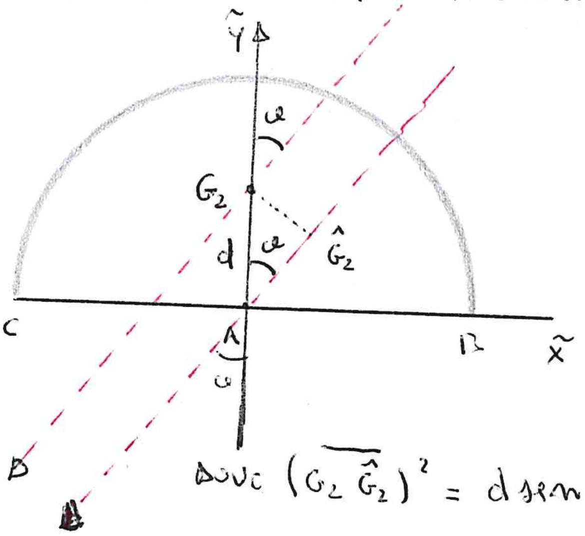
PER CALCOLARE LA (1) POSSIAMO UTILIZZARE DUE METODI:

$\boxed{1^{\circ}\ \text{METODO}}$. DAL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

$$I^{M}_{Y,O} = I^{M}_{Y,G_2} + m\,(G_2 - \bar{G}_2)^2 \qquad (2)$$

(CON $\bar{G}_2$ LA PROIEZIONE DI G_2 SULL'ASSE $\vec{Y}$)

L'ASSE PARALLELO ALL'ASSE $\vec{Y}$ PASSANTE PER G_2 NON E' UN ASSE PASSANTE PER UN PUNTO DI SIMMETRIA DEL SISTEMA (VEDI FIGURA), ALLORA



CONVIENE APPLICARE DI NUOVO IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER CONSIDERANDO I DUE ASSI (PARALLELI) IN FIGURA UNO PASSANTE PER G_2 E L'ALTRO PER IL PUNTO A (CHE E' UN PUNTO DI SIMMETRIA DI M)

$$I^{M}_{Y,A} = I^{M}_{Y,G_2} + m\,(\overline{G_2\hat{G}_2})^2$$

DOVE $(\overline{G_2\hat{G}_2})^2 = d\,sen\alpha$ DA CUI $I^{M}_{Y,G_2} = I^{M}_{Y,A} - m\,d^2 sen^2\alpha$ (3)

CALCOLIAMO QUINDI $I^{M}_{Y,A}$. SE CONSIDERIAMO IL RIF. PRINCIPALE DI INERZIA $(A,\hat{x},\hat{y})$ IN QUESTO RIFERIMENTO AVREMO

$$I^{M}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{11} \end{pmatrix}$$

ESSENDO $I_{11} = \iint y^2\,dm = \iint (\rho\, sen\,\alpha)^2\,dm$

$$= \frac{2m}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R \rho^3\,d\rho}_{R^4/4}\ \underbrace{\int_0^{\pi} sen^2\alpha\,d\alpha}_{\pi/2} = \frac{1}{4}\,mR^2$$

IL VERSORE DELL'ASSE (PARALLELO ALL'ASSE Y) PASSANTE PER A SARA' DATO DA: $\hat{Y} = \{-sen\alpha,\ -cos\alpha,\ 0\}$ DA CUI IL MOMENTO DI INERZIA

$$I^{M}_{Y,A} = I^{M}_{\alpha\beta}\,\hat{Y}_\alpha\,\hat{Y}_\beta = I_{11}\,(sen^2\alpha + cos^2\alpha) = I_{11} \quad \leftarrow \text{COSTANTE}$$

QUINDI UTILIZZANDO LA (2) E LA (3) AVREMO

$$I^{M}_{Y,O} = I_{11} - m d^2 sen^2\alpha + m\,(2\ell + d)^2 sen^2\alpha = I_{11} + m\,(4\ell^2 + \cancel{d^2} + 4\ell d - \cancel{d^2})\,sen^2\alpha$$

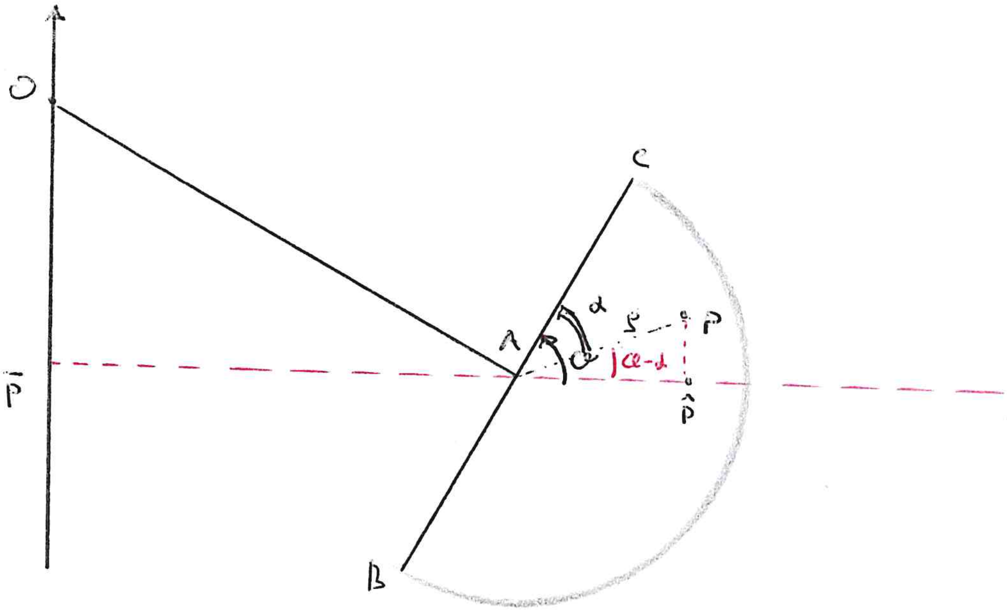
$$\boxed{I^{M}_{YO} = I_{11} + 4m\ell\,(\ell + d)\,sen^2\alpha} \qquad (4)$$

CON $I_{11} = \frac{1}{4}mR^2$ = COSTANTE

DA CUI

$$\boxed{U_P^{cent} = 2 m \ell \omega^2 (\ell + d) \, \text{sen}^2\theta + \text{cost}}$$

II° METODO: "INTEGRAZIONE DIRETTA"



ALLORA $P \equiv \{ x_A + A\hat P ,\ y_A - P\hat P \} = \{ 2\ell \,\text{sen}\theta + \rho\cos(\theta-\alpha) ,\ -2\ell\cos\theta + \rho\,\text{sen}(\theta-\alpha)$

DA CUI $P - \bar P \equiv \{ 2\ell\,\text{sen}\theta + \rho\cos(\theta-\alpha) ,\ 0 \}$ DALLA INTEGRAZIONE

$$I^{II}_{y,O} = \int (P-\bar P)^2 dm = \int \{4\ell^2\,\text{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2(\theta-\alpha) + 4\ell\,\text{sen}\theta\,\rho\cos(\theta-\alpha)\}\,dm$$

$$= 4\ell^2\,\text{sen}^2\theta \underbrace{\int dm}_{m} + \frac{2m}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3\,d\rho \int_0^\pi \cos^2(\theta-\alpha)\,d\alpha \ +$$

$$+ \frac{2m}{\pi R^2}\,4\ell\,\text{sen}\theta \cdot \int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \cos(\theta-\alpha)\,d\alpha = 4\ell^2 m\,\text{sen}^2\theta$$

$$+ \frac{2m}{\pi R^2}\,\frac{R^4}{4}\int_0^\pi \frac{1+\cos(2(\theta-\alpha))}{2}\,d\alpha + \frac{8m}{\pi R^2}\,\ell\,\text{sen}\theta \cdot \frac{R^3}{3}\underbrace{\left[-\text{sen}(\theta-\alpha)\right]_0^\pi}_{2\,\text{sen}\theta}$$

$$= 4m\ell^2\,\text{sen}^2\theta + \frac{16}{3}\frac{mR}{\pi}\,\ell\,\text{sen}^2\theta + \frac{mR^2}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\underbrace{\cancel{\left[\text{sen}[2(\theta-\alpha)]\right]_0^\pi}}_{0}\right.$$

$$= \frac{1}{4}mR^2 + 4m\ell^2\,\text{sen}^2\theta + 4m\overbrace{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)}^{d}\ell\,\text{sen}^2\theta$$ DA CUI

$$\boxed{I^{II}_{y,O} = I_{11} + 4\ell(\ell+d)\,m\,\text{sen}^2\theta}$$

CHE È LO STESSO RISULTATO (4) OTTENUTO CON IL I° METODO

SE PER ADESSO TRASCURIAMO I POTENZIALI CENTRIFUGHI AVREMO

$$U_{TOT} = mgs\cos\alpha + mg(3\ell+d)\cos\alpha - \frac{1}{2}Ks^2 - Fs\cos\alpha + K_{ost}.$$

MENTRE PER IL POTENZIALE CENTRIFUGO TOTALE AVREMO

$$U_{TOT}^{CENT} = \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2}{3}m\ell^2\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2m\ell(\ell+d)\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha + K_{ost}$$

CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI "SENZA" POTENZIALE CENTRIFUGO:

$$\begin{cases} Q_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = -\{(mg-F)s + mg(3\ell+d)\}\operatorname{sen}\alpha \\ Q_s = \dfrac{\partial U}{\partial s} = (mg-F)\cos\alpha - Ks \end{cases}$$

NOTA. CONSIDERIAMO SOLTANTO LE POSIZIONI ORDINARIE ED ESCLUDIAMO LE POSIZIONI DI CONFINE $s=0$ ED $s=2\ell$ ($0<s<2\ell$).

"EQUILIBRIO"

$Q_\alpha = 0$ E $Q_s = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} -\{mg(3\ell+d) + (mg-F)s\}\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ (mg-F)\cos\alpha - Ks = 0 \end{cases}$

DALLA 1^a $\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi$

DALLA II^a AVREMO $\Rightarrow s = \begin{cases} \dfrac{mg-F}{K} & \text{PER } \alpha=0 \\ -\dfrac{(mg-F)}{K} & \text{PER } \alpha=\pi \end{cases}$

$S_1 = \left(0, \dfrac{mg-F}{K}\right)$ INOLTRE ESSENDO $0<s<2\ell \Rightarrow \boxed{mg - 2K\ell < F < mg}$ (a)

$S_2 = \left(\pi, -\dfrac{(mg-F)}{K}\right)$ ESSENDO $0<s<2\ell \Rightarrow \boxed{mg < F < mg + 2K\ell}$ (b)

SEMPRE DALLA 1^a SI OTTIENE ANCHE CHE

$s = \dfrac{mg(3\ell+d)}{(F-mg)}$ $\Rightarrow$ ESSENDO $0<s<2\ell$ $\boxed{mg < \dfrac{mg(5\ell+d)}{2\ell} < F}$ (c)

DA CUI SOSTITUENDO NELLA II^a AVREMO.

$\cos\alpha = -\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2}$ ACCETTABILE SOLO SE $\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2} < 1$

IN QUESTO CASO AVREMO ALTRE DUE CONFIG. DI EQUILIBRIO

$S_3 = (\bar{\alpha}, \bar{s})$ ED $S_4 = (-\bar{\alpha}, \bar{s})$

CON: $\bar{s} = \dfrac{mg(3\ell+d)}{F-mg}$ E $\bar{\alpha} = \arccos\left\{-\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2}\right\}$

SOLUZIONI ACCETTABILI SOTTO LE DUE CONDIZIONI $\begin{cases} mg < \dfrac{mg(5\ell+d)}{2\ell} < F \\ \dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2} < 1 \end{cases}$

NOTA:

PER L'EQUILIBRIO NON CONSIDERIAMO IL CASO $\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2} = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -1$

DA CUI $\alpha = \pi$ E QUINDI NUOVAMENTE LA CONFIGURAZIONE S_2

QUINDI RIEPILOGANDO

1) PER $\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2} > 1$ AVREMO SOLTANTO S_1, ED S_2 (CON LE ULTERIORI CONDIZIONI (a) e (b))

2) PER $\dfrac{mgK(3\ell+d)}{(F-mg)^2} < 1$ (E L'ULTERIORE CONDIZIONE (C) ~~[illegible]~~ $mg < \dfrac{mg(5\ell+d)}{2\ell} < F$)

AVREMO S_3, S_4 ED S_2 SE $mg < \dfrac{mg(5\ell+d)}{2\ell} < F < mg + 2K\ell$

$(\alpha, s) = \left\{ S_2 = \left(\pi, -\dfrac{mg-F}{K}\right) ; S_3 = (\bar{\alpha}, \bar{s}) ; S_4 = (-\bar{\alpha}, \bar{s}) \right\}$

MA NON LA S_1 (IN QUANTO NON VARREBBE LA CONDIZIONE (a) $\Rightarrow F < mg$)

"ANALISI DELLA STABILITÀ"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\{(mg-F)s + mg(3\ell+d)\}\cos\alpha \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -K < 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial s \partial \alpha} = (F-mg)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

1) $S_1 \equiv \left(0, \frac{mg-F}{k}\right)$ $\qquad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_1} = -\left\{ mg\ell + \frac{(mg-F)^2}{k} + mg(2\ell+d)\right\} < 0$

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \alpha}\right|_{S_1} = 0 \quad \Rightarrow H|_{S_1} > 0 \Rightarrow$ MAX $\Rightarrow$ STABILE

2) $S_2 = \left(\pi, -\frac{mg-F}{k}\right)$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_2} = mg(3\ell+d) - \frac{(mg-F)^2}{k}$$

quindi i sottocasi:

2A) Se $\frac{mgk(3\ell+d)}{(mg-F)^2} < 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_2} < 0$ da cui $H|_{S_2} > 0 \Rightarrow$ MAX $\Rightarrow$ STABILE

2B) Se $\frac{mgk(3\ell+d)}{(mg-F)^2} > 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_2} > 0$ da cui $H|_{S_2} < 0 \Rightarrow$ NO MAX $\Rightarrow$ INSTABILE

2C) Se $\frac{mgk(3\ell+d)}{(mg-F)^2} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_2} = 0 \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right| = -k < 0 \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \alpha}\right|_{S_2} = 0$

$H|_{S_2} = 0 \Rightarrow$ OCCORRERÀ UNO STUDIO LOCALE

3) $S_3 = (\bar{\alpha}, \bar{s})$ E $S_4 = (-\bar{\alpha}, \bar{s})$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\right|_{S_3, S_4} = -\left\{ mg(3\ell+d) + (mg-F) \cdot \frac{mg(3\ell+d)}{(F-mg)} \right\} \cos(\bar{\alpha}) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \alpha}\right|_{S_3, S_4} = (F-mg) \operatorname{sen} \bar{\alpha}$$

da cui $H|_{S_3, S_4} = -(F-mg)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha < 0 \Rightarrow$ NO MAX $\Rightarrow$ INSTABILE

"Energia cinetica"

$$T = T_P + T_{\bar{OA}} + T_{II}$$

$$T_P = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 \qquad \dot{P} = \{ \dot{s} \operatorname{sen}\varphi + s\dot{\varphi}\cos\varphi, \ -\dot{s}\cos\varphi + s\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \}$$

$$\dot{P}^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{T_P = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2)}$$

ENERGIA CINETICA ASTA $\bar{OA}$

$$T_{\bar{OA}} = \frac{1}{2} I^{\bar{OA}}_{z,O} \dot{\varphi}^2 \qquad I^{\bar{OA}}_{z,O} = \int_0^{2\ell} x^2 dm = \frac{m}{2\ell}\int_0^{2\ell} x^2 dx =$$

$$= \frac{m}{2\ell}\frac{8\ell^3}{3} = \frac{4}{3} m \ell^2$$

DA CUI $\boxed{T_{\bar{OA}} = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\varphi}^2}$

ENERGIA CINETICA DEL SEMIDISCO:

$$T_{II} = \frac{1}{2} m \dot{G}_2^2 + T' \qquad \text{DOVE} \quad T' = \frac{1}{2} I^{II}_{z,G_2}\dot{\varphi}^2$$

$$\dot{G}_2 = \{ (2\ell+d)\dot{\varphi}\cos\varphi, \ (2\ell+d)\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \} \qquad \dot{G}_2^2 = (2\ell+d)^2\dot{\varphi}^2$$

$$I^{II}_{z,A} = I^{II}_{z,G_2} + md^2 \qquad I^{II}_{zA} = \iint \rho^2 dm = \frac{2m}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi d\alpha$$

$$= \frac{2m}{\cancel{\pi} R^2}\frac{R^4}{4}\cancel{\pi} = \frac{1}{2} m R^2$$

(NOTA: ALTRIMENTI SI OSSERVA CHE $I^{II}_{zA} = I^{II}_{33} = 2 I_{11} = \frac{1}{2} m R^2$.)

DA CUI: $I^{II}_{z,G_2} = I^{II}_{z,A} - md^2 = \left(\frac{1}{2} m R^2 - md^2\right) = \left(\frac{1}{8} m\ell^2 - md^2\right)$

$$T_{II} = \frac{1}{2} m (2\ell+d)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} m\ell^2 - md^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (4\ell^2 + \cancel{d^2} + 4\ell d)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{16} m\ell^2 - \frac{1}{2}\cancel{md^2}\right)\dot{\varphi}^2$$

$$T_P = \left(\frac{33}{16} m e^2 + 2 m e d\right)\dot{\alpha}^2 = 2 m e \left[\frac{33}{32} e + d\right]\dot{\alpha}^2$$

OPPURE APPLICANDO IL "METODO PUNTUALE"

$$P \equiv \{ 2e \sin\alpha + \rho \cos(\alpha-\lambda),\ -2e\cos\alpha + \rho \sin(\alpha-\lambda)\}$$

$$\dot{P} = \{ 2e \cos\alpha\,\dot{\alpha} - \rho \sin(\alpha-\lambda)\,\dot{\alpha},\ 2e\sin\alpha\,\dot{\alpha} + \rho\cos(\alpha-\lambda)\,\dot{\alpha}\}$$

$$\dot{P}^2 = 4e^2\dot{\alpha}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 + 4e\,\dot{\alpha}^2\rho\sin\lambda$$

DA CUI INTEGRANDO

$$T_P = \frac{1}{2}\int \dot{P}^2 dm = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{ 4e^2\underbrace{\iint dm}_{m} + \iint \rho^2 dm + 4e\iint \rho\sin\lambda\, dm\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{4me^2 + \frac{2m}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{R^4/4}\underbrace{\int_0^\pi d\lambda}_{\pi} + 4e\frac{2m}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R \rho^2 d\rho}_{R^3/3}\underbrace{\int_0^\pi \sin\lambda\, d\lambda}_{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{4me^2 + \frac{mR^2}{2} + \frac{16}{3}\frac{mR}{\pi}e\right\} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{4me^2 + \frac{1}{2}mR^2 + 4me\underbrace{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)}_{d}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{4me^2 + \frac{1}{2}mR^2 + 4med\right\} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left\{4me(e+d) + \frac{1}{2}m\left(\frac{e}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 2me\left[d + \frac{33}{32}e\right]\dot{\alpha}^2$$ STESSO RISULTATO OTTENUTO CON KONIG.

$$T_{TOT} = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\alpha}^2) + 2me\left(d + \frac{33}{32}e\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{2}{3}me^2\dot{\alpha}^2$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\alpha}^2) + 2me\left[d + \underbrace{\left(\frac{33}{32} + \frac{1}{3}\right)}_{131/96}e\right]\dot{\alpha}^2$$

$$\boxed{T_{TOT} = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\alpha}^2) + 2me\left[d + \frac{131}{96}e\right]\dot{\alpha}^2}$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m s^2 \dot\theta + 4 m \ell \left(d + \frac{131}{96} \ell \right) \dot\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m s^2 \ddot\theta + 4 m \ell \left(d + \frac{131}{96} \ell \right) \ddot\theta + 2 m s \dot s \dot\theta$$

DA CUI LA 1ª EQUAZIONE DI LAGRANGE:

1) $$\boxed{m s^2 \ddot\theta + 4 m \ell \left(d + \frac{131}{96} \ell \right) \ddot\theta + 2 m s \dot s \dot\theta = Q_\theta = -mg(3\ell + d)\,\mathrm{sen}\,\theta - (mg - F)\, s\, \mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot s} = m \dot s \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot s} = m \ddot s \qquad \frac{\partial T}{\partial s} = m s \dot\theta^2$$

DA CUI LA IIª EQUAZ. DI LAGRANGE:

$$\boxed{m \ddot s - m s \dot\theta^2 = Q_s = -k s + (mg - F)\cos\theta.}$$

INTEGRALI PRIMI:

1) FORZE SONO TUTTE CONSERVATIVE DA CUI $E = T - U = \text{cost.}$

2) NON ABBIAMO VARIABILI CICLICHE

3) LE EQUAZIONI SONO ACCOPPIATE

"MOTI LINEARIZZATI"

ATTORNO ALLA CONFIGURAZIONE STATICA $C_1 = \left(0, \frac{mg - F}{k}\right) = (0, \bar s)$

SE LINEARIZZIAMO AVREMO:

$$\cancel{m\frac{(mg-F)^2}{k^2}} \quad m \bar s^2 \ddot\theta + 4 m \ell \left(d + \frac{131}{96}\ell \right) \ddot\theta =$$

$$= \cancel{Q_\theta\big|_{C_1}} + \underbrace{\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}\Big|_{C_1}}_{-\left\{\frac{(mg-F)^2}{k} + mg(3\ell+d)\right\}} \theta + \underbrace{\cancel{\frac{\partial Q_\theta}{\partial s}\Big|_{C_1}}}_{=0} (s - \bar s)$$

DA CUI:

$$m\left\{\bar{s}^2 + 4\ell\left(d + \frac{131}{96}\ell\right)\right\}\ddot{\varphi} = -\left\{\frac{(mg-F)^2}{k} + mg(3\ell+d)\right\}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -A\varphi \qquad \text{CON } A = \frac{\frac{(mg-F)^2}{k} + mg(3\ell+d)}{m\left[\bar{s}^2 + 4\ell\left(d+\frac{131}{96}\ell\right)\right]} > 0$$

CERCANDO SOLUZIONI $\varphi = \varphi_0 e^{\lambda t}$ AVREMO $\lambda^2 = -A < 0$

DA CUI DUE MOTI ARMONICI $\lambda = \pm i\sqrt{A}$

LINEARIZZIAMO LA II^a EQUAZIONE

$$m\ddot{s} = \cancel{Q_s|_{E_1}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}\Big|_{E_1}}}_{0}\varphi + \underbrace{\frac{\partial Q_s}{\partial s}\Big|_{E_1}}_{-k<0}(s-\bar{s})$$

DA CUI $\ddot{s} = -\frac{k}{m}(s-\bar{s})$ CERCANDO $s-\bar{s} = s_0 e^{\lambda t}$

OTTERREMO SOLUZIONI $\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ MOTI ARMONICI

CIOÈ STABILITA' LINEARE.