

Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 28.02.2025

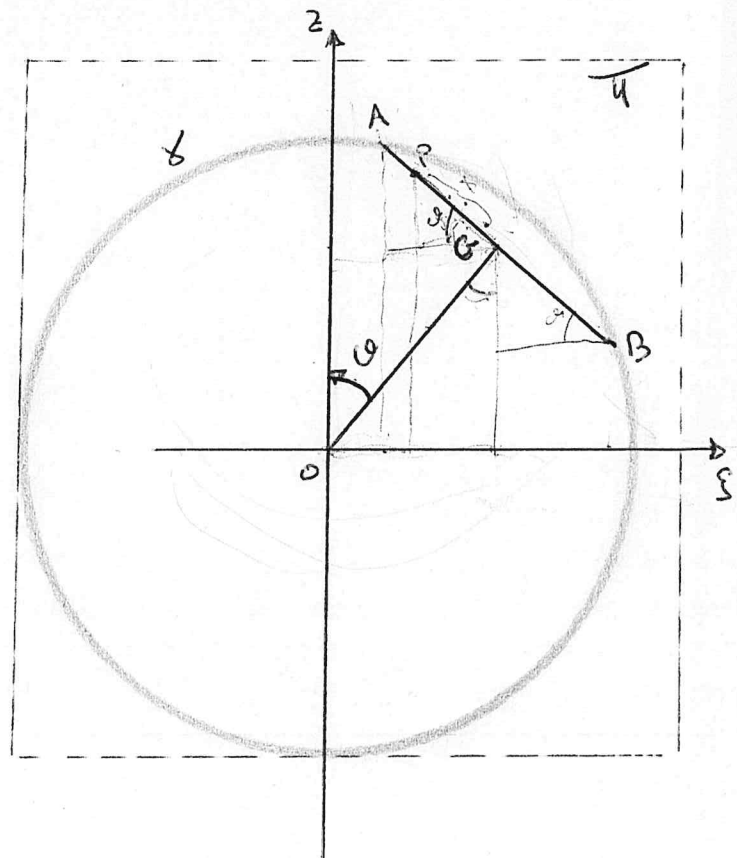
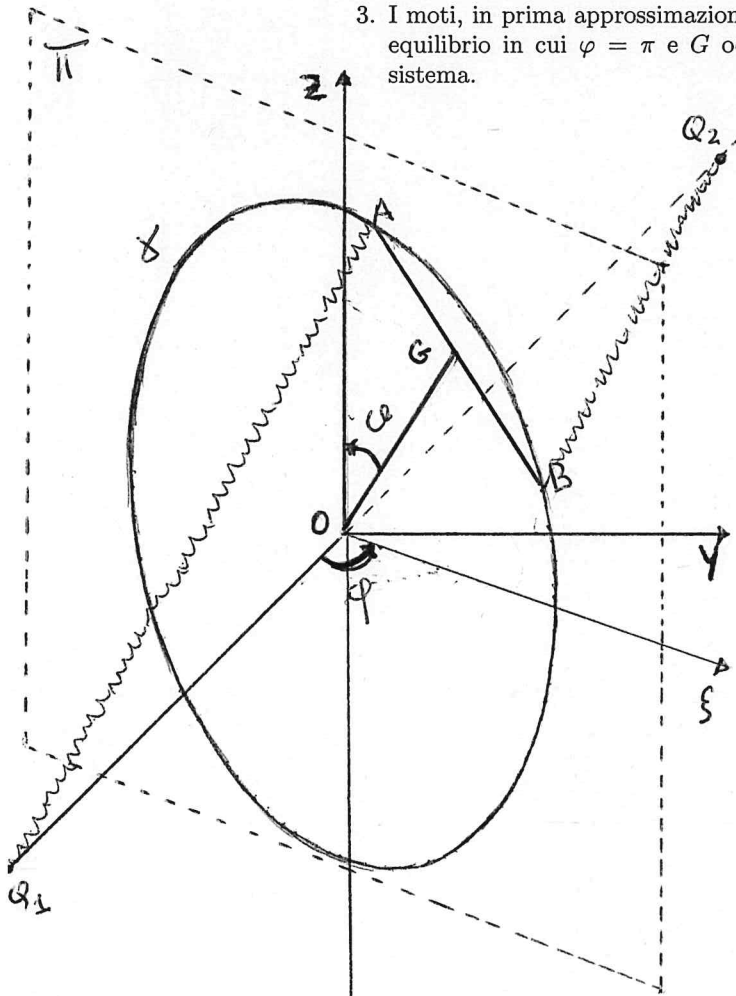
Un sistema materiale S (appartenente ad un piano verticale Π) sia costituito da una barra AB omogenea di massa M , lunghezza $2L$ e baricentro G , con i suoi estremi A e B vincolati a scorrere sul bordo di un anello circolare omogeneo γ di massa m , raggio R e spessore trascurabile. L'anello è libero di ruotare attorno a un asse verticale coincidente con un suo diametro. Si introducano un sistema di riferimento fisso $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ con origine nel centro dell'anello ed asse z coincidente con l'asse di rotazione verticale dell'anello ed un riferimento (posto nel piano Π) $\{O, \vec{\xi}, \vec{z}\}$ solidale con l'anello (vedi figura). Si utilizzino come coordinate lagrangiane i due angoli ϑ e φ indicati in figura, essendo φ l'angolo formato dalle direzioni di $\vec{x}$ e $\vec{\xi}$ e ϑ l'angolo formato da OG e l'asse $\vec{z}$ ascendente. Sul sistema oltre alla forza peso agiscono le due forze elastiche

$$\{F_1 = -k(A - Q_1), A\} \quad \text{ed} \quad \{F_2 = -k(B - Q_2), B\} \quad \text{con } k > 0,$$

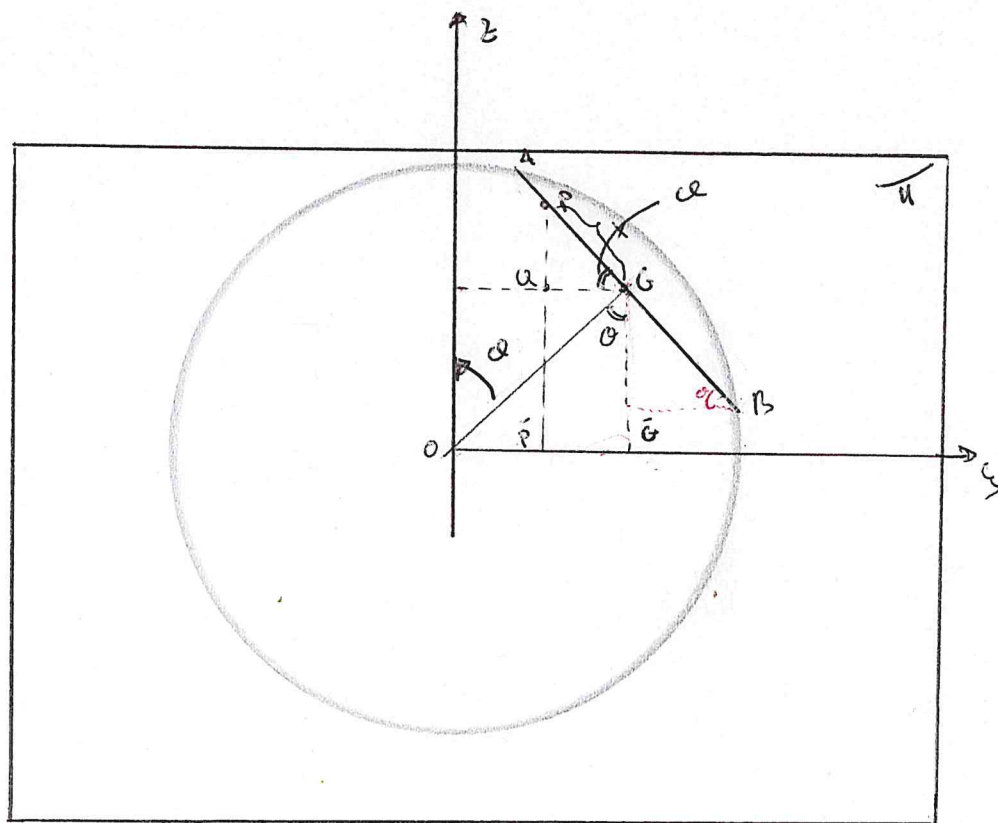
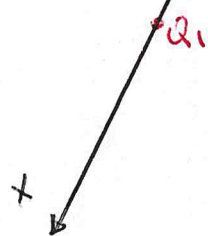
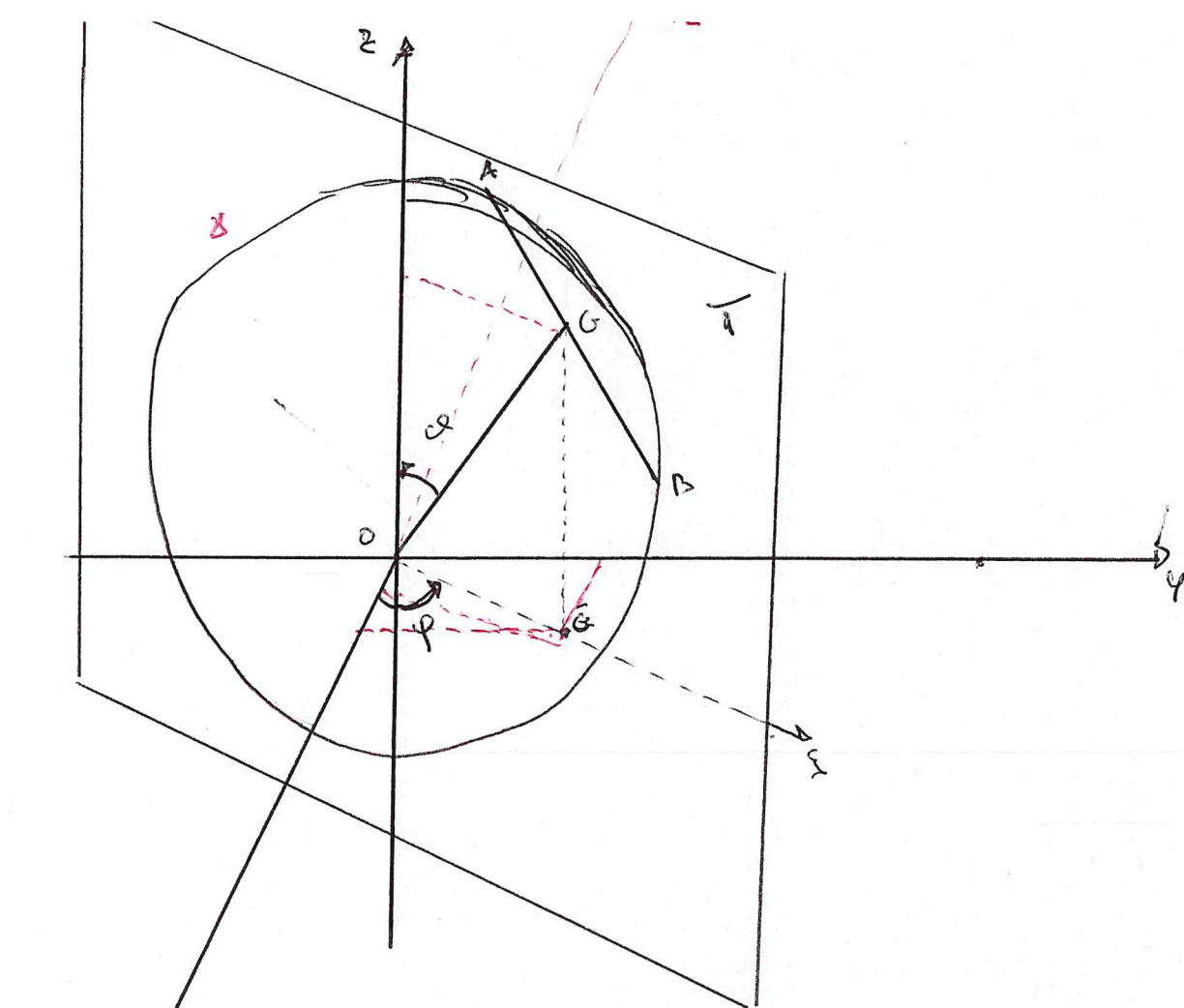
essendo $Q_1 = \{2R, 0, 0\}$ e $Q_2 = \{-2R, 0, 0\}$ due punti fissi (diametralmente opposti rispetto all'origine O) posti sull'asse fisso delle x .

Supponendo tutti vincoli lisci ed indicando, per semplicità, con d la distanza OG , si chiede di determinare nel riferimento fisso $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$:

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio, analizzando la loro stabilità ed instabilità soltanto nel caso in cui $(Mgd)/(4kRL) \neq 1$.
2. Le equazioni del moto del sistema, con gli eventuali integrali primi.
3. I moti, in prima approssimazione, attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui $\varphi = \pi$ e G occupa la posizione più alta possibile nel sistema.



(1)



NOTA OSSERVARE CHE DIFFERENZIALE DELLE COORDINATE SFERICHE
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq \theta \leq \pi$ ANCHE LO SPAZIO DELLE COORDINATE
 $\Sigma_2 = S_1 \times S_2$ SARA UNA SUPERFICIE "TORIALE".

$$\overline{OG} = \sqrt{R^2 - \rho^2} = d \quad \vec{GG} = \overline{OG} \cos \alpha; \quad \overline{OG} = \overline{OG} \sin \alpha$$

Quindi $G = \{d \sin \alpha \cos \varphi, d \sin \alpha \sin \varphi, d \cos \alpha\}$

$$Q_1 = \{2R, 0, 0\} \quad Q_2 = \{-2R, 0, 0\}$$

$$A = \{(d \sin \alpha - \rho \cos \alpha) \cos \varphi, (d \sin \alpha - \rho \cos \alpha) \sin \varphi, d \cos \alpha + \rho \sin \alpha\}$$

$$B = \{(d \sin \alpha + \rho \cos \alpha) \cos \varphi, (d \sin \alpha + \rho \cos \alpha) \sin \varphi, d \cos \alpha - \rho \sin \alpha\}$$

Se valutiamo un generico punto $P \in AB$ a partire dal suo baricentro (ossia X la distanza di P dal punto G sull'asse $\overline{AR}$)

$$P = \{(d \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi, (d \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi, d \cos \alpha + X \sin \alpha\}$$

$$\text{con } -\rho \leq X \leq \rho$$

"CALCOLO IL POTENZIALE"

$$U_{P_{\text{ext}}}^{\text{AR}} = M g (0, 0, -1) \cdot (G - 0) = -M g d \cos \alpha$$

$$U_{F_1} = -\frac{1}{2} K (A - Q_1)^2 = -\frac{1}{2} K \left\{ (d \sin \alpha - \rho \cos \alpha)^2 + 4R^2 - 4R (d \sin \alpha - \rho \cos \alpha) \cos \varphi + (d \cos \alpha + \rho \sin \alpha)^2 \right\} =$$

da cui:

$$U_{F_1} = -\frac{1}{2} K \left\{ d^2 + \rho^2 + 4R^2 - 4R (d \sin \alpha - \rho \cos \alpha) \cos \varphi \right\} =$$

$$U_{F_1} = 2KR (d \sin \alpha - \rho \cos \alpha) \cos \varphi + \text{cost}$$

$$U_{F_2} = -\frac{1}{2} K (B - Q_2)^2 = -\frac{1}{2} K \left\{ (d \sin \alpha + \rho \cos \alpha)^2 + 4R^2 + 4R (d \sin \alpha + \rho \cos \alpha) \cos \varphi + (d \cos \alpha - \rho \sin \alpha)^2 \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} K \left\{ d^2 + \rho^2 + 4R^2 + 4R (d \sin \alpha + \rho \cos \alpha) \cos \varphi \right\}$$

da cui

$$U_{F_2} = -2KR (d \sin \alpha + \rho \cos \alpha) \cos \varphi$$

DA CUI IL POTENZIALE TOTALE:

3

$$U_{TOT} = -Mgd \cos \varphi - 4kR\ell \cos \varphi \cos \psi$$

DA CUI LE SOLUZIONI

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Mgd \sin \varphi + 4kR\ell \sin \varphi \cos \psi$$

$$Q_\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi} = 4kR\ell \cos \varphi \sin \psi$$

Q.

"EQUILIBRIO"

$$Q_\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi [Mgd + 4kR\ell \cos \psi] = 0 & (1) \end{cases}$$

$$Q_\psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \sin \psi = 0 & (2) \end{cases}$$

DALLA (1) $\sin \varphi = 0$ DALLA (2) $\sin \psi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi ; \psi = 0, \pi$.

DA CUI LE 4 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

$$(\varphi, \psi) = \{ S_1 = (0, 0) ; S_2 = (0, \pi) ; S_3 = (\pi, 0) ; S_4 = (\pi, \pi) \}$$

SCRIVERE DALLA (1)

$$\cos \psi = - \frac{Mgd}{4kR\ell} \Rightarrow \psi = \arccos \left\{ - \frac{Mgd}{4kR\ell} \right\} \quad \text{POICHÉ}$$

$$\text{ACCAPIÀ} \quad -1 \leq - \frac{Mgd}{4kR\ell} \Rightarrow \frac{Mgd}{4kR\ell} \leq 1$$

NOTA: OSSERVARE CHE NEL CASO LINEARE $\frac{Mgd}{4kR\ell} = 1 \Rightarrow \cos \psi = 1 \Rightarrow \psi = \pi$

LA (2) QUANTO (1) È SODDISFATTA MA AUTOMATICAMENTE ANCHE LA (2) $\forall \varphi$

ALLORA PER $\frac{Mgd}{4kR\ell} \leq 1$ AVREMO 4 SOLUZIONI $(\varphi, \bar{\psi}) \quad \forall \varphi.$

NEL CASO IN CUI $\frac{Mgd}{4kR\ell} < 1$ AVREMO ALLORA LE 4 SOLUZIONI

AGGIUNTO DATO DALLA (2) $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \pi/2$ E $\bar{\psi}_\pm, -\bar{\psi}_\pm$
 CON $\bar{\psi}_\pm = \arccos \left\{ -Mgd/4kR\ell \right\}$

Se $\frac{Mgd}{4kRr} > 1$ 4 CONFIGURAZIONI

$$(a, \varphi) \equiv \{ s_1 \equiv (0, 0) ; s_2 \equiv (0, \bar{u}) ; s_3 \equiv (\bar{u}, 0) ; s_4 \equiv (\bar{u}, \bar{u}) \}$$

Se $\frac{Mgd}{4kRr} = 1$ 8 SOLUZIONI: $\{ (a, \bar{u}) \} \forall a.$

Se $\frac{Mgd}{4kRr} < 1$ 8 CONFIGURAZIONI AI GLOUILLIUM

$$(a, \varphi) \equiv \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \equiv (-\frac{\bar{u}}{2}, \bar{\varphi}) ; s_6 \equiv (-\frac{\bar{u}}{2}, -\bar{\varphi}) ; s_7 \equiv (\frac{\bar{u}}{2}, \bar{\varphi}) ; s_8 \equiv (\frac{\bar{u}}{2}, -\bar{\varphi}) \}$$

"STABILITÀ"

CALCOLIAMO LE DERIVATE II.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = Mgd \cos a + 4kRr \cos a \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 4kRr \cos a \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial \varphi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial a} = -4kRr \sin a \sin \varphi$$

A cui:

1) $s_1 = (0, 0)$ $U_{\varphi\varphi}|_{s_1} = 4kRr > 0$ $\nabla^2 HAX \Rightarrow$ instabile

2) $s_2 = (0, \bar{u})$ $\begin{cases} U_{\varphi\varphi}|_{s_2} = -4kRr < 0 \\ U_{a\varphi}|_{s_2} = 0 \\ U_{aa}|_{s_2} = Mgd - 4kRr \end{cases}$

Quindi se A) $\frac{Mgd}{4kRr} < 1$ $U_{aa} < 0 \Rightarrow H|_{s_2} > 0$ $\nabla^2 HAX \Rightarrow$ stabile

B) $\frac{Mgd}{4kRr} > 1$ $U_{aa} > 0 \Rightarrow H|_{s_2} < 0$ $\nabla^2 HAX \Rightarrow$ instabile

C) $Mgd/4kRr = 1$ $U_{aa} = 0$ $H|_{s_2} = 0 \Rightarrow$ STABILITÀ LO CALI

3) $S_2 = (\bar{u}, 0)$ $U_{\varphi\varphi}|_{S_2} = -4KR\ell < 0$ $U_{\varphi\varphi}|_{S_2} = 0$

$M_{\alpha\alpha}|_{S_2} = -Mgd - 4KR\ell < 0$

Quindi $H|_{S_2} > 0 \Rightarrow \text{MAX} \Rightarrow \text{STABILE. sempre}$

4) $S_4 = (\bar{u}, \bar{u})$ $U_{\varphi\varphi}|_{S_4} = 4KR\ell > 0$ $\text{No MAX} \Rightarrow \text{instabile.}$

5) $\text{tutto le conf. possibili } \tilde{S} = (\alpha, \bar{u}) \forall \alpha \text{ per } \frac{Mgd}{4KR\ell} = 1$

$U_{\varphi\varphi}|_{\tilde{S}} = -4KR\ell \cos \alpha$ $U_{\alpha\alpha}|_{\tilde{S}} = 0$

$M_{\alpha\alpha}|_{\tilde{S}} = (Mgd - 4KR\ell) \cos \alpha = 0$

Quindi per $\frac{\bar{u}}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\bar{u}$ $\cos \alpha < 0$ $U_{\varphi\varphi} > 0$ $\text{No MAX} \Rightarrow \text{instabile}$

per $-\frac{\bar{u}}{2} \leq \alpha \leq \frac{\bar{u}}{2}$ $\cos \alpha \geq 0 \Rightarrow U_{\varphi\varphi} \leq 0 \Rightarrow \text{stabile locale.}$

6) Nel caso $\frac{Mgd}{4KR\ell} < 1$ studiamo la stabilità delle configurazioni S_5, S_6, S_7, S_8 .

5) $S_5 = (-\frac{\bar{u}}{2}, \bar{\varphi})$ $U_{\varphi\varphi}|_{S_5} = U_{\alpha\alpha}|_{S_5} = 0$ $U_{\alpha\varphi} = +4KR\ell \sin \bar{\varphi}$

Ma $H|_{S_5} = -(4KR\ell \sin \bar{\varphi})^2 < 0 \Rightarrow \text{No MAX instabile}$

6) $S_6 = (-\frac{\bar{u}}{2}, -\bar{\varphi})$ instabile come la S_5

7) $S_7 = (\frac{\bar{u}}{2}, \bar{\varphi})$ e $S_8 = (\frac{\bar{u}}{2}, -\bar{\varphi})$ instabile come la S_5

"CALCOLO DELLA ENERGIA CINETICA"

Utilizziamo il metodo più semplice (metodo portuale) ma alla fine in apporzione utilizziamo altri due metodi.

ESSENDO $\forall P \in A$ COORDINATE

6

$$P \equiv \{ (d \sin \alpha - x \cos \alpha) \cos \varphi, (d \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin \varphi, d \cos \alpha + x \sin \alpha \}$$

AVENDO:

$$\dot{P} = \left\{ (d \cos \alpha \ddot{c} + x \sin \alpha \ddot{c}) \cos \varphi - (d \sin \alpha - x \cos \alpha) \dot{\varphi} \sin \varphi, \right. \\ (d \cos \alpha \ddot{c} + x \sin \alpha \ddot{c}) \sin \varphi + (d \sin \alpha - x \cos \alpha) \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \left. - d \sin \alpha \dot{c} + x \cos \alpha \dot{c} \right\}$$

DA CUI $\dot{P}^2$ SARA:

$$\dot{P}^2 = (d \cos \alpha + x \sin \alpha)^2 \ddot{c}^2 + (d \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 \dot{\varphi}^2 + \\ + (x \cos \alpha - d \sin \alpha)^2 \dot{c}^2 = (d^2 + x^2) \ddot{c}^2 + [d^2 \sin^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha - \\ - 2 d x \sin \alpha \cos \alpha] \dot{\varphi}^2 \\ = d^2 (\ddot{c}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - (2 d \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2) x + \\ + (\dot{c}^2 + \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2) x^2$$

DA CUI INTEGRANDO:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{P}^2 dm = \frac{1}{2} \left\{ \cancel{d^2 (\ddot{c}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2)} \int_0^M dm - (2 d \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2) \int_{-e}^e x dm + (\dot{c}^2 + \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2) \int_{-e}^e x^2 dm \right\}$$

FUNZIONE DISPARI

$$= \frac{1}{2} M d^2 (\ddot{c}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} (\dot{c}^2 + \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2) \frac{M}{2e} \int_{-e}^e x^2 dx$$

$\frac{2}{3} e^3$

$$= \frac{1}{2} M d^2 (\ddot{c}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{8} M l^2 (\dot{c}^2 + \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2)$$

QUINDI

$$T_{AD} = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \ddot{c}^2 + \frac{1}{2} M \left(d^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 \alpha \right) \dot{\varphi}^2$$

CALCOLANDO ABESSO L'ENERGIA CINETICA DELL'ANULLO X

$$T_X = \frac{1}{2} \bar{I}_{2,0}^X \dot{\varphi}^2$$

$$\text{DOUG } P = (R \cos \alpha, R \sin \alpha) \quad \forall P \in X$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2,0}^X &= \int (P - \bar{P})^2 dm = \frac{m}{2\bar{u}R} \int_0^{2\bar{u}} (R^2 \cos^2 \alpha) R d\alpha = \\ &= \frac{m}{2\bar{u}} R^2 \int_0^{2\bar{u}} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{m}{2\bar{u}} R^2 \cdot \underbrace{\int_0^{2\bar{u}} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha}_{\bar{u}} = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

$$T_X = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_{\text{TOT}} = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \left(d^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 \alpha \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \dot{\alpha}^2$$

EQUAZ. DI LAGRANGE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = M \left(d^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \dot{\alpha} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = M \left(d^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \ddot{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} M \left\{ d^2 \cancel{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{1}{3} l^2 \cancel{\cos \alpha \sin \alpha} \right\} \dot{\varphi}^2 \\ &= M \left(d^2 - \frac{1}{3} l^2 \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

ANCHE

$$\begin{aligned} M \left(d^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \ddot{\alpha} - M \left(d^2 - \frac{1}{3} l^2 \right) \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 &= Q_\alpha = \\ &= M g d \sin \alpha + 4 M R l \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} M \left(d^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 \alpha \right) \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} + M \left(d^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} \\ &+ 2 M \sin \alpha \cos \alpha \left(d^2 - \frac{1}{3} l^2 \right) \dot{\alpha} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} = 0 \quad \text{da cui:}$$

(8)

$$\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} + M \left(d^2 \mu m^2 \omega + \frac{1}{3} \rho^2 \omega^2 \omega \right) \ddot{\varphi} + 2M \left(d^2 - \frac{1}{3} \rho^2 \right) \mu m \omega \dot{\varphi} = Q_{\varphi} = 4KR\rho \omega \sin \varphi$$

"FOTOGRAFIA PRIMA"

LE FORZE SONO TUTTE CONSERVATIVE E LA LAGRANGIANA NON DIPENDE IN MODO ESPLICITO DAL TEMPO, QUINDI SI CONSERVA L'ENERGIA TOTALE

$$E = T - U.$$

LE EQUAZIONI SONO ACCOPPIATE

NON ABBIAMO VARIABILI CICLICHE PER LA LAGRANGIANA.

"MOTI LINEARIZZANTI"

$$S_2 = (\alpha, \varphi) = (0, \bar{\varphi})$$

LINEARIZZANDO AVREMO

$$M \left(d^2 + \frac{1}{3} \rho^2 \right) \ddot{\varphi} = \cancel{Q_{\varphi}}_{S_2} + \underbrace{\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \alpha}}_{Mgd - 4KR\rho} \bigg|_{S_2} \alpha + \underbrace{\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi}}_{=0} \bigg|_{S_2} (\varphi - \bar{\varphi})$$

$$\text{da cui: } \boxed{M \left(d^2 + \frac{1}{3} \rho^2 \right) \ddot{\varphi} = (Mgd - 4KR\rho) \alpha} \quad (*)$$

ALLA $\bar{\varphi} = 0$, DI LAGRANGE:

$$m R^2 + \frac{1}{3} M \rho^2 \ddot{\varphi} = \cancel{Q_{\varphi}}_{S_2} + \underbrace{\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \alpha}}_{=0} \bigg|_{S_2} \alpha + \underbrace{\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi}}_{-4KR\rho} \bigg|_{S_2} (\varphi - \bar{\varphi})$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{6} M \rho^2 \ddot{\varphi} = -4KR\rho (\varphi - \bar{\varphi})} \quad (**)$$

CERCO SOLUZIONI AD C TITO
 $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$; $\varphi - \bar{\varphi} = \varphi_0 e^{\lambda t}$

$$\text{ALLA } \bar{\varphi} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = - \frac{4KR\rho}{\left(\frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{6} M \rho^2 \right)} < 0 \Rightarrow 2 \text{ MOTI ARMONICI}$$

$$\text{ALLA } \bar{\varphi} = 0 \Rightarrow M \left(d^2 + \frac{1}{3} \rho^2 \right) \lambda^2 = (Mgd - 4KR\rho)$$

$$\text{da cui } \lambda^2 = \frac{Mgd - 4KR\rho}{M \left(d^2 + \frac{1}{3} \rho^2 \right)} = A \Rightarrow$$

$A > 0$ ($Mgd/4KR\rho > 1$) MOTI PERIODICI

$A < 0$ ($Mgd/4KR\rho < 1$) MOTI ARMONICI

$A = 0$ ($Mgd/4KR\rho = 1$) MOTI UNIFORMI
 (MOVIMENTO DI CIRCOLO UNIFORME)

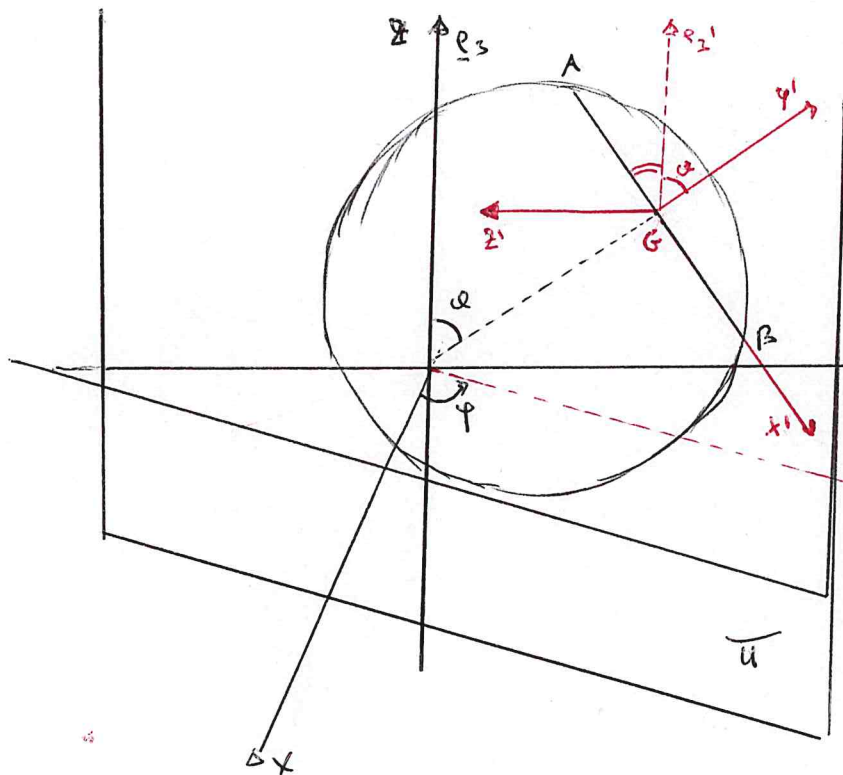
VALUTIAMO ANCHE DUE MODI ALTERNATIVI PER CALCOLARE L'ENERGIA CINETICA DELL'ASTA $\overline{AB}$.

1° METODO: TEOREMA DI KOENIG.

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M \vec{G}^2 + T'$$

$$T' = \frac{1}{2} I_{dP}^{(G)} \Omega_d \Omega_P$$

IN QUESTO CASO PER CALCOLARE T' FACENDO OPPORTUNE ROTAZIONI CI SPOSTIAMO DAL RIF. BARICENTRALE (NEL QUALE NON SAPPIAMO VALUTARE LA $\underline{\Omega}$) AD UN RIFERIMENTO "CENTRALE DI INERZIA" (DOVE INVECE POSSIAMO VALUTARE LA $\underline{\Omega}$), SEMPRE CENTRATO NEL BARICENTRO G . POSSIAMO FARE QUESTO OSSERVO T' INVARIANTE.



SCEGLIAMO COME ASSE x' DEL RIF. CENTRALE DI INERZIA L'ASSE CONTENENTE L'ASTA $\overline{AB}$

IN QUESTO CASO VREMMO SARE $P \equiv (x', 0, 0)$

DA CUI SE VALUTIAMO IL TENSORE DI INERZIA

$$\tilde{I}_{11}^{(G)} = 0$$

$$\tilde{I}_{22}^{(G)} = \int x^2 dm = \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3} M R^2$$

$$I_{33} = I_{11}^{(G)} + I_{22}^{(G)}$$

$$\tilde{I}_{1P}^{(G)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} M R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} M R^2 \end{pmatrix} \quad (1*)$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO SOLTANTO UN ROTAZIONE INDIPENDENTE QUINDI $\underline{\Omega}$ DI RIF. CENTRALI DI INERZIA AVANTI DUE ASSE COINCIDENTE CON x' E GLI ALTRI DUE (ORTOGONALI TRA LORO) SONTENUTI NEL PIANO ORTOGONALE ALL'ASSE x' (CUI È ALL'ASTA $\overline{AB}$). PER QUESTI NO SCEGLIAMO UNO OPPORTUNO AVANTI L'ASSE y' CONTENUTO NEL PIANO U (CUI CONTIENE L'ASTA $\overline{AB}$ E L'ASSE z), CUI L'ASSE y' SARÀ DIRETTO UTILE LA RETTA $\overline{OG}$. NOTARE L'ASSE z' SARÀ PARALLELO AL PIANO (x, y) (VEDI FIGURA), ALLORA IN QUESTO RIFERIMENTO SA PERÒ CALCOLARE $\underline{\Omega}$ COME LA SOMMA DI $\underline{\Omega}_1 + \underline{\Omega}_2 = \underline{\Omega}$

$\underline{L}_1$ si ottiene faccndo variare φ e fissando ψ

(10)

In questo caso sarà diretta lungo l'asse centrale di inerzia z' quindi

$$\underline{L}_1 = (0, 0, \dot{\psi})$$

$\underline{L}_2$ si ottiene faccndo variare ψ e fissando φ in questo caso l'asse di rotazione sarà $\underline{P}_2$ passante per G (vedi figura) stabiliamo valutarlo le sue componenti nel rif. centrale di inerzia $\{G, x', y', z'\}$. banalmente

$$\underline{P}_2 = \{-\omega \sin(\pi/2 - \alpha), \omega \cos \alpha, 0\} = \{-\omega \sin \alpha, \omega \cos \alpha, 0\}$$

quindi

$$\underline{L}_2 = \{-\omega \sin \alpha, \omega \cos \alpha, 0\} \dot{\varphi}$$

Averemo così la velocità angolare completa $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$ nel riferimento centrale di inerzia $\{G, x', y', z'\}$, essendo

$$\underline{L} = \{-\omega \sin \alpha \dot{\varphi}, \omega \cos \alpha \dot{\varphi}, \dot{\psi}\}$$

possiamo quindi valutare $T' = \frac{1}{2} \tilde{I}_{G,P}^T \underline{L}_2 \underline{L}_P$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \hat{I}_{22} L_2^2 + \hat{I}_{33} L_3^2 \right\} = \frac{1}{6} M R^2 (\omega^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)$$

$$T' = \frac{1}{6} M R^2 (\omega^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)$$

Se valutiamo quindi

$$\begin{aligned} \dot{G} &\equiv \left\{ d \omega \cos \alpha \dot{\psi} \cos \varphi - d \sin \alpha \sin \varphi \dot{\psi}, d \omega \sin \alpha \dot{\psi} \sin \varphi + d \sin \alpha \cos \varphi \dot{\psi}, \right. \\ &\quad \left. - d \sin \alpha \dot{\psi} \right\} \Rightarrow \dot{G}^2 = d^2 \dot{\psi}^2 + d^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} M d^2 (\dot{\psi}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{6} M R^2 (\omega^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{1}{3} R^2 \right) \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} M \left(d^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} R^2 \omega^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\varphi}^2$$

che è lo stesso risultato ottenuto con il metodo puntuale

2° METODO: SOSTITUIAMO CHE L'ORIGINE O È UN PUNTO FISSO PER LA SPARPA $\bar{AR}$, ALLORA POSSIAMO APPLICARE LA TEORIA PER IL CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO

$$T = \frac{1}{2} \tilde{I}_{AP}^{(0)} \Omega_A \Omega_A \quad (**)$$

DOVE IL TENSORE DI INERZIA È VALUTATO TRASLANDO IL RIF. CENTRALE DI INERZIA $\tilde{I}_{AP}^{(G)}$ LUNGO LA RETTA DI SINFONIA OG. FILO AFFARE GINCIANDO L'ORIGINE DEL NUOVO RIF. "PRINCIPALE DI INERZIA" CON L'ORIGINE O SEMPRE CON ASSI PARALLELI AA x', y', z' (CHE SONO GLI ASSI DEL RIF. CENTRALE DI INERZIA. $\{G, x', y', z'\}$)

ALLORA DALLA TEORIA SAPPIAMO:

$$\tilde{I}_{AP}^{(0)} = \tilde{I}_{AP}^{(G)} + I_{AP}^{(0)}(M, G)$$

DOVE $I_{AP}^{(0)}(M, G)$ È IL TENSORE ASSOCIATO AL RAPPRESENTO G CON RASSA M . . NON RIF. PRINCIPALE DI INERZIA $\{O, x', y', z'\}$

$$G \equiv (0, d, 0)$$

DA CHI:

$$\tilde{I}_{AP}^{(0)}(M, G) = M \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \quad (2*)$$

SOMMIAMO I DUE TENSORI (1*) E (2*) AVREMO

$$\tilde{I}_{AP}^{(0)} = \begin{pmatrix} M d^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} M \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} M \rho^2 + M d^2 \end{pmatrix}$$

DA CHI CALCOLANDO L'ENERGIA CINETICA DEL CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO

$$T = \frac{1}{2} \tilde{I}_{AP}^{(0)} \Omega_A \Omega_A \quad \text{CON } \Omega = \{-\dot{\theta} \hat{u}_\theta, \dot{\phi} \hat{u}_\phi, \dot{\psi} \hat{u}_\psi\}$$

AVREMO SEMPRE LO STESSO RISULTATO

$$T = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{1}{3} \rho^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \left(d^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \rho^2 \cos^2 \theta \right) \dot{\phi}^2$$