Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 18.04.2025

Sia dato un sistema S costituito da due aste omogenee, AC di massa m_1 e lunghezza l_1 e, AB di massa m_2 e lunghezza l_2, con $l_2 > l_1$, soggette ai seguenti vincoli. Le due aste sono incernierate in A, potendo tale estremo scorrere lungo una guida verticale fissa $\mathbf{r}$ (azze z in figura), gli altri due estremi B e C sono, a loro volta, reciprocamente vincolati a scorrere su una guida mobile orizzontale $\mathbf{s}$, di massa trascurabile, che interseca in un punto O fissato, la guida verticale $\mathbf{r}$, essendo comunque la guida $\mathbf{s}$ soltanto libera di ruotare attorno ad O nel piano orizzontale. Definendo quindi un sistema di riferimento $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ con gli assi $\vec{x}$ ed $\vec{y}$ nel piano orizzontale, individuiamo come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che l'asta AC forma con la verticale $\mathbf{r}$ e l'angolo φ che la guida mobile $\mathbf{s}$ forma con l'asse positivo delle $\vec{y}$ (come in figura). Oltre alla forza peso sul sistema agisce una forza di potenziale $-h\,\varphi^2$, (con $h > 0$) ed una forza elastica

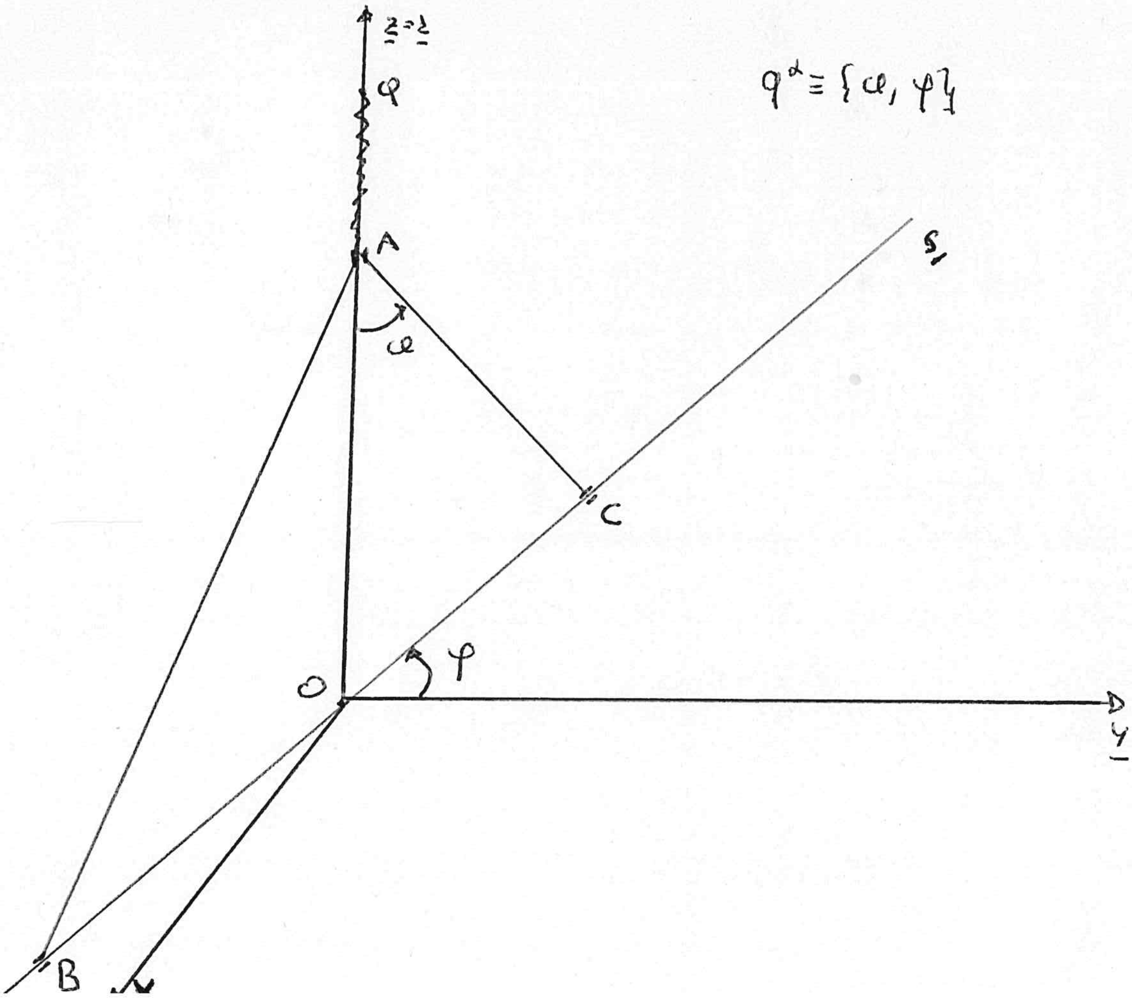
$$\{F = -k\,(A - Q),\ A\} \quad \text{con} \quad k > 0,$$

essendo $Q = \{0, 0, R\}$ con $R > l_1$. Supponendo tutti i vincoli senza attrito, si chiede di determinare nel riferimento fisso $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$:

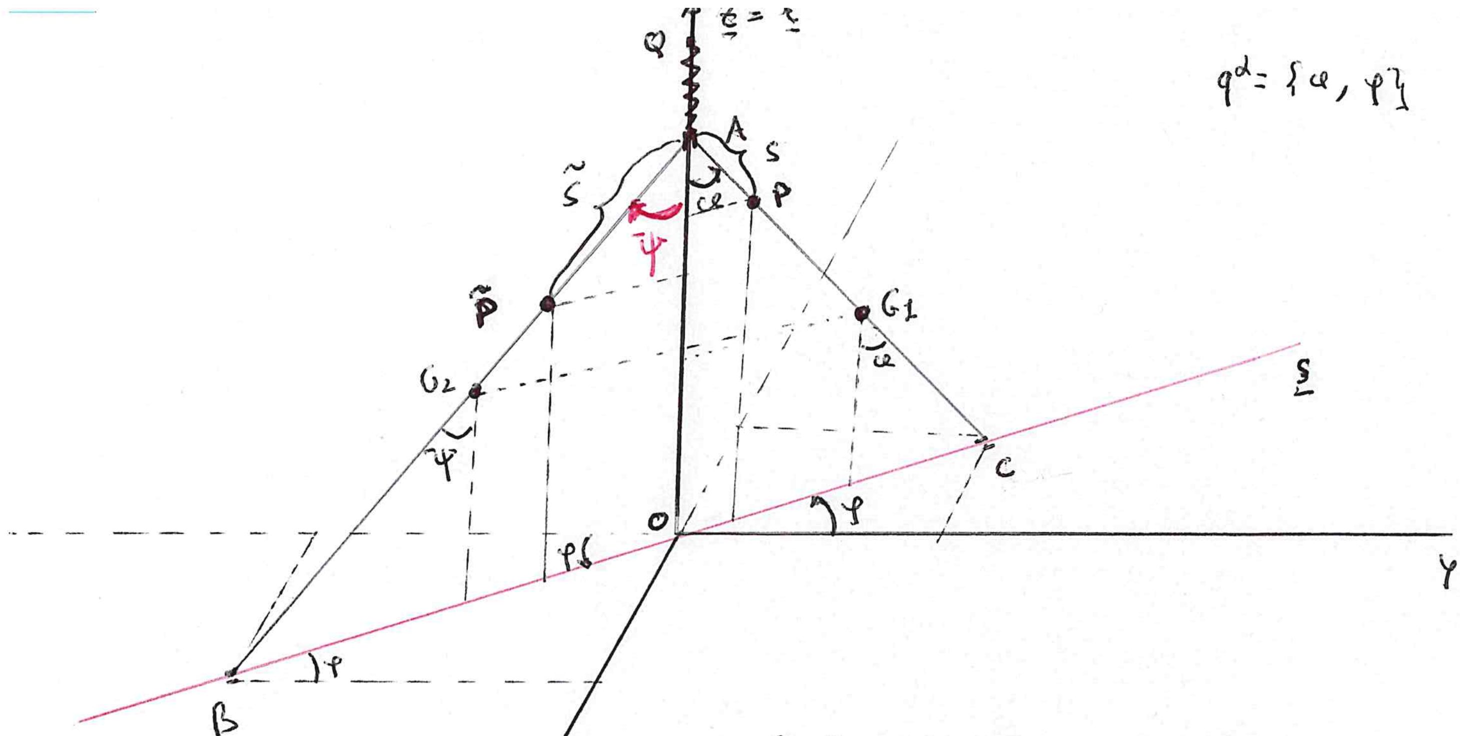
1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio analizzando la stabilitá ed instabilitá di queste configurazioni.

2. L'energia cinetica del sistema S.

3. Supponendo in aggiunta che, il riferimento $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ si muova di moto rotatorio uniforme, con velocitá angolare ω, attorno alla verticale (asse z) passante per O, si chiede di valutare le sollecitazioni aggiuntive, agenti sul sistema S, dovute alle forze apparenti. Determinando nel riferimento relativo le nuove configurazioni di equilibrio e discutendo se possibile, almeno in modo qualitativo, della loro stabilità.



$q^{\alpha} = \{\alpha, \varphi\}$



$Q \equiv \{0, 0, R\} \qquad R > \ell_1$

$A \equiv \{0, 0, \ell_1 \cos\alpha\} = \{0, 0, \ell_2 \cos\tilde{\psi}\}$

Da cui: $\boxed{\ell_1 \cos\alpha = \ell_2 \cos\tilde{\psi}} \Rightarrow \boxed{\cos\tilde{\psi} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \cos\alpha} \quad (1)$

$G_1 \equiv \{-\ell_1/2 \,\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\varphi, \; \ell_1/2 \,\text{sen}\,\alpha \cos\varphi, \; \ell_1/2 \cos\alpha\}$

$G_2 \equiv \{\ell_2/2 \,\text{sen}\,\tilde{\psi} \,\text{sen}\,\varphi, \; -\ell_2/2 \,\text{sen}\,\tilde{\psi} \cos\varphi, \; \ell_2/2 \cos\tilde{\psi}\}$

$P \in \overline{AC}$: $P \equiv \{-s \,\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\varphi, \; s \,\text{sen}\,\alpha \cos\varphi, \; (\ell_1 - s)\cos\alpha\}$

$\tilde{P} \in \overline{AB}$: $\tilde{P} \equiv \{\tilde{s} \,\text{sen}\,\tilde{\psi} \,\text{sen}\,\varphi, \; -\hat{s} \,\text{sen}\,\tilde{\psi} \cos\varphi, \; (\ell_2 - \hat{s})\cos\tilde{\psi}\}$

"METODO DEL POTENZIALE"

$U^{AC}_{peso} = m_1 g (0, 0, -1) \cdot (G_1 - O) = -\frac{1}{2} m_1 \ell_1 g \cos\alpha$

$U^{AB}_{peso} = m_2 g (0, 0, -1) \cdot (G_2 - O) = -\frac{1}{2} m_2 \ell_2 g \cos\tilde{\psi} =$ (per la (1))

$= -\frac{1}{2} m_2 \cancel{\ell_2} g \cdot \frac{\ell_1}{\cancel{\ell_2}} \cos\alpha = -\frac{1}{2} m_2 \ell_1 g \cos\alpha$

$U_F^{(elastica)} = -\frac{1}{2} k (Q - A)^2 = -\frac{1}{2} k (R - \ell_1 \cos\alpha)^2 = -\frac{1}{2} k \ell_1^2 \cos^2\alpha + kR\ell_1 \cos\alpha$ + cost.

$$U_{TOT} = -\frac{\ell_1}{2} M g \cos\alpha - \frac{1}{2} k \ell_1^2 \cos^2\alpha + kR\ell_1 \cos\alpha - h\varphi^2 + \text{cost} \quad (2)$$

Da cui le 2 sollecitazioni   dove $\boxed{M = m_1 + m_2}$ (3)

DERIVANDO AVREMO

$$Q_\alpha = \frac{\partial U_{TOT}}{\partial \alpha} = \frac{l_1}{2} M g \,\mathrm{sen}\alpha + K l_1^2 \,\mathrm{sen}\alpha \cos\alpha - K R l_1 \,\mathrm{sen}\alpha$$

(2bis)

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -2h\varphi$$

"EQUILIBRIO"

RISOLVIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} Q_\alpha = 0 \\ Q_\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} l_1 \,\mathrm{sen}\alpha \{ Mg + 2Kl_1\cos\alpha - 2KR \} = 0 & (4) \\ \varphi = 0 & (5) \end{cases}$$

DALLA (4) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a)}\ \mathrm{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi & (6) \\ \text{(b)}\ \cos\alpha = \dfrac{2KR - Mg}{2Kl_1} \ (7) \Leftrightarrow -1 < \dfrac{2KR - Mg}{2Kl_1} < 1 & (8) \end{cases}$$

ESCLUDIAMO I CASI IN CUI $\cos\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = 0, \pi$ CASI GIÀ DESCRITTI NEL CASO (a))

LE DUE CONDIZIONI (8) CI DARANNO I VALORI DI K CHE SODDISFANO LE RELAZIONI SEGUENTI

$$-2Kl_1 < 2KR - Mg \Rightarrow \frac{Mg}{2(R+l_1)} < K$$

$$2KR - Mg < 2Kl_1 \Rightarrow K < \frac{Mg}{2(R-l_1)}.$$

QUINDI

1) SE $K \geq \dfrac{Mg}{2(R-l_1)}$ e $K \leq \dfrac{Mg}{2(R+l_1)}$ (9)

AVREMO SOLTANTO DUE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

$$(\alpha, \varphi) = \{ S_1 \equiv (0,0) \ ; \ S_2 \equiv (\pi, 0) \} \quad (9\,\text{bis})$$

2) SE $\dfrac{Mg}{2(R+l_1)} < K < \dfrac{Mg}{2(R-l_1)}$ (10) ALLORA AVREMO 4 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

$$(\alpha, \varphi) \equiv \{ S_1 \equiv (0,0); \ S_2 \equiv (\pi, 0); \ S_3 = (\bar{\alpha}, 0) \ ; \ S_4 = (-\bar{\alpha}, 0) \} \quad (10\,\text{bis})$$

CON $\bar{\alpha} = \arccos \left\{ \dfrac{2KR - Mg}{2Kl_1} \right\}$ (11)

—o—

"STABILITA'"

CALCOLIAMO LE DERIVATE II e:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} = -2h < 0 & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial \varphi} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \dfrac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = \left(\dfrac{Mg}{2} - KR\right) \ell_1 \cos\varphi + K\ell_1^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{cases} \qquad (12)$$

QUINDI LA STABILITA' DIPENDERA' SOLO DAL SEGNO DELLA $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = U_{\varphi\varphi}$.

OSSERVIAMO CHE:

a) $$U_{\varphi\varphi}\Big|_{S_1=(0,0)} = \left(\frac{Mg}{2} - KR\right)\ell_1 + K\ell_1^2$$

b) $$U_{\varphi\varphi}\Big|_{S_2=(\pi,0)} = -\left(\frac{Mg}{2} - KR\right)\ell_1 + K\ell_1^2 \qquad (13)$$

c) $$U_{\varphi\varphi}\Big|_{S_3,S_4} = \frac{Mg - 2KR}{2}\,\ell_1 \cos\bar\varphi + K\ell_1^2 (2\cos^2\bar\varphi - 1) =$$

$$= -\underbrace{\frac{2KR - Mg}{2K\ell_1}}_{\cos\bar\varphi} K\ell_1^2 \cos\bar\varphi + K\ell_1^2 (2\cos^2\bar\varphi - 1) =$$

$$= K\ell_1^2 (\cos^2\bar\varphi - 1) < 0 \qquad (\text{PERCHE' } |\cos\bar\varphi| < 1)$$

"ANALIZZIAMO I VARI CASI"

) $\boxed{K < \dfrac{Mg}{2(R+\ell_1)}} \Rightarrow K\ell_1 < \dfrac{Mg}{2} - KR \Rightarrow \boxed{\left(\dfrac{Mg}{2} - KR\right)\ell_1 > K\ell_1^2}$

DA CUI CONSIDERANDO LA $(13)_a \Rightarrow U_{\varphi\varphi}\big|_{S_1} > 0 \Rightarrow$ NO MAX $\Rightarrow S_1$ INSTABILE

ANALOGAMENTE DALLA $(13)_b \Rightarrow U_{\varphi\varphi}\big|_{S_2} < 0 \Rightarrow$ MAX $\Rightarrow S_2$ STABILE

) $\boxed{K > \dfrac{Mg}{2(R-\ell_1)}} \Rightarrow (R - \ell_1)K > \dfrac{Mg}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\dfrac{Mg}{2} - KR\right)\ell_1 < -K\ell_1^2}$

DALLA $(13)_a \Rightarrow U_{\varphi\varphi}\big|_{S_1} < 0 \Rightarrow$ MAX $\Rightarrow S_1$ STABILE

DALLA $(13)_b \Rightarrow U_{\varphi\varphi}\big|_{S_2} > 0 \Rightarrow$ NO MAX $\Rightarrow S_2$ INSTABILE

3) SE CONSIDERO IL CASO

$$\frac{Mg}{2(R+\ell_1)} < k < \frac{Mg}{2(R-\ell_1)}$$

AVREMO:

A) $$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_1=(0,0)} = \left(\frac{Mg}{2} - kR\right)\ell_1 + k\ell_1^2 = \underbrace{\ell_1(R-\ell_1)}_{>0}\underbrace{\left\{\frac{Mg}{2(R-\ell_1)} - k\right\}}_{>0} > 0 \Rightarrow \text{NO MAX}$$

(S_1 INSTABILE)

B) $$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_2=(\pi,0)} = -\left(\frac{Mg}{2} - kR\right)\ell_1 + k\ell_1^2 = \underbrace{\ell_1(R+\ell_1)}_{>0}\underbrace{\left\{-\frac{Mg}{2(R+\ell_1)} + k\right\}}_{>0} > 0 \Rightarrow \text{NO MAX}$$

(S_2 INSTABILE)

C) $$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_3,S_4} < 0 \Rightarrow \text{MAX} \Rightarrow S_3, S_4 \text{ SONO STABILI.}$$

) $$k = \bar{k} = \frac{Mg}{2(R+\ell_1)} \Rightarrow \cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{\substack{\alpha=\pi \\ k=\bar{k}}} = -\left(\frac{Mg}{2} - \bar{k}R\right)\ell_1 + \bar{k}\ell_1^2 = \left\{-\frac{Mg}{2} + \frac{Mg}{2\cancel{(R+\ell_1)}}\cancel{(R+\ell_1)}\right\}\ell_1 = 0$$

$U_{\varphi\varphi} < 0$ $H=0$ $\Rightarrow$ OCCORRE STUDIO LOCALE (NON RICHIESTO NEI COMPITI)

) $$k = \tilde{k} = \frac{Mg}{2(R-\ell_1)} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \qquad \alpha = 0$$

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{\substack{\alpha=0 \\ k=\tilde{k}}} = \left(\frac{Mg}{2} - \tilde{k}R\right)\ell_1 + \tilde{k}\ell_1^2 = \left\{\frac{Mg}{2} - \frac{Mg}{2\cancel{(R-\ell_1)}}\cancel{(R-\ell_1)}\right\}\ell_1 = 0$$

$U_{\varphi\varphi} < 0$ $H=0$ $\Rightarrow$ OCCORRE UNO STUDIO LOCALE (NON RICHIESTO NEI COMPITI)

—o—

ENERGIA CINETICA (VALUTIAMOLA CON IL METODO PUNTUALE, COME SUGGERITO DURANTE LA PROVA SCRITTA)

CONSIDERIAMO IL GENERICO PUNTO $P \in A\bar{C}$

DERIVANDO AVREMO:

$$\dot{P} \equiv \{-s\dot{\alpha}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi - s\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi,\ s\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\varphi - s\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$-(\ell_1 - s)\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\}$$

DA CUI

$$v^2 = s^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + s^2\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\alpha + (\ell_1 - s)^2\dot{\alpha}^2\mathrm{sen}^2\alpha =$$
$$= (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\alpha)s^2 - (2\ell_1\dot{\alpha}^2\mathrm{sen}^2\alpha)s + \ell_1^2\dot{\alpha}^2\mathrm{sen}^2\alpha$$

da cui integrando

$$T_{AC} = \frac{1}{2}\int \dot{p}^2\,dm = \frac{1}{2}\left\{ (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha)\,\frac{m_1}{\ell_1}\overbrace{\int_0^{\ell_1} s^2\,ds}^{\ell_1^3/3} - \right.$$

$$\left. - (2\ell_1 \dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2\alpha)\,\frac{m_1}{\ell_1}\underbrace{\int_0^{\ell_1} s\,ds}_{\ell_1^2/2} + \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \overbrace{\int dm}^{m_1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} m_1 \ell_1^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha) - \cancel{\frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + \cancel{\frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = \frac{1}{6} m_1 \ell_1^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha)} \qquad (14)$$

Per il calcolo di T_{AB} la procedura è analoga, essendo

$$\dot{\tilde{p}} = \{ \tilde{s}\,\dot{\psi}\cos\psi \operatorname{sen}\varphi + \tilde{s}\,\dot{\varphi}\operatorname{sen}\psi\cos\varphi,\ -\tilde{s}\,\dot{\psi}\cos\psi\cos\varphi + \tilde{s}\,\dot{\varphi}\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi,$$

$$-(\ell_2 - \tilde{s})\operatorname{sen}\psi\,\dot{\psi} \}$$ da cui come nel caso precedente

$$\dot{\tilde{p}}^2 = \tilde{s}^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \tilde{s}^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\psi + (\ell_2 - \tilde{s})^2\operatorname{sen}^2\psi\,\dot{\psi}^2 =$$

$$= (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\psi)\,\tilde{s}^2 - (2\ell_2\operatorname{sen}^2\psi\,\dot{\psi}^2)\,\tilde{s} + \ell_2^2\operatorname{sen}^2\psi\,\dot{\psi}^2$$

da cui integrando esattamente come per l'asta $\overline{AC}$ avremo

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\int \dot{p}^2\,dm = \frac{1}{6} m_2 \ell_2^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\psi)$$

Per calcolare $\dot{\psi}^2$ e $\operatorname{sen}^2\psi$ utilizziamo la (1) derivando da cui:

$$-\dot{\psi}\operatorname{sen}\psi = -\frac{\ell_1}{\ell_2}\dot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^2 = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \dot{\alpha}^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\psi}$$

Ricordando che $\operatorname{sen}^2\psi = 1 - \cos^2\psi$ e utilizzando ancora la (1) avremo

$$\operatorname{sen}^2\psi = 1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}\cos^2\alpha = \frac{1}{\ell_2^2}\{\ell_2^2 - \ell_1^2\cos^2\alpha\}$$ ed

$$\dot{\psi}^2 = \frac{\ell_1^2\operatorname{sen}^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2\cos^2\alpha}\,\dot{\alpha}^2$$ da cui avremo

$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = \frac{1}{6} m_2 \ell_2^2 \left\{ \frac{\ell_1^2\operatorname{sen}^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2\cos^2\alpha}\,\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{\ell_2^2}(\ell_2^2 - \ell_1^2\cos^2\alpha) \right\}} \qquad (15)$$

da cui $T_{TOT} = T_{AC} + T_{AB}$

QUESITO N° 3 "FORZE APPARENTI"

PER CALCOLARE I POTENZIALI CENTRIFUGHI:

$$U^{AC}_{centr} = \frac{1}{2}\omega^2 \int (P-\bar{P})^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^{AC}_{z,0}$$

$$I^{AC}_{z,0} = \int s^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, dm = \operatorname{sen}^2\alpha \frac{m_1}{\ell_1} \underbrace{\int_0^{\ell_1} s^2 ds}_{\ell_1^3/3} = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

da cui $\boxed{U^{AC}_{centr} = \frac{1}{6} m_1 \ell_1^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$

ANALOGAMENTE:

$$U^{AB}_{centr} = \frac{1}{2}\omega^2 \int (\tilde{P}-\tilde{\bar{P}})^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^{AB}_{z,0}$$

$$I^{AB}_{z,0} = \int \tilde{s}^2 \operatorname{sen}^2\varphi \, dm = \operatorname{sen}^2\varphi \frac{m_2}{\ell_2} \int_0^{\ell_2} \tilde{s}^2 d\tilde{s} = \frac{1}{3} m_2 \ell_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$\boxed{U^{AB}_{centr} = \frac{1}{6} m_2 \ell_2^2 (1 - \cos^2\varphi)\omega^2 = \frac{1}{6} m_2 \omega^2 (\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha)}$$

"PER I POTENZIALI DI CORIOLIS"

$$dU^{AC}_{coriolis} = -dm\,[\omega \wedge \dot{P}] \cdot (P-O) = -dm \left[\omega \wedge \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)\right] \cdot (P-O) =$$

$$= -dm\,\dot{\alpha} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -s\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi & s\cos\alpha\cos\varphi & -(\ell_1 - s)\operatorname{sen}\alpha \\ -s\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi & s\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi & (\ell_1 - s)\cos\alpha \end{vmatrix} -$$

$$-dm\,\dot{\varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -s\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi & -s\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -s\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi & s\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi & (\ell_1 - s)\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\dot{\varphi}\,\omega\,dm\,(-s^2\operatorname{sen}^2\alpha) = (\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\alpha)\, s^2 dm$$ da cui integrando

$$\boxed{U^{AC}_{coriolis} = \omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\alpha \frac{m_1}{\ell_1}\int_0^{\ell_1} s^2 ds = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 \omega \dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\alpha}$$

CON LA STESSA PROCEDURA PER L'ASTA $\overline{AB}$ AVREMO

$$du^{AB}_{Coriolis} = - dm\, [\underline{\omega} \wedge \dot{\tilde P}] \cdot (P-O) = - dm \left[\omega \wedge \left(\frac{\partial \tilde P}{\partial \psi}\dot\psi + \frac{\partial \tilde P}{\partial \varphi}\dot\varphi\right)\right] \cdot (\tilde P - O)$$

$$= -dm\,\dot\psi \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ \tilde s\cos\psi\,\text{sen}\varphi & -\tilde s \cos\psi\cos\varphi & -(\ell_2-\tilde s)\,\text{sen}\psi \\ \tilde s \,\text{sen}\psi\,\text{sen}\varphi & -\tilde s\,\text{sen}\psi\cos\varphi & (\ell_2-\tilde s)\cos\psi\end{vmatrix} -$$

$$-dm\,\dot\varphi \begin{vmatrix} 0 & & \omega\\ \tilde s\,\text{sen}\psi\cos\varphi & +\tilde s\,\text{sen}\psi\,\text{sen}\varphi & 0 \\ \tilde s\,\text{sen}\psi\,\text{sen}\varphi & -\tilde s\,\text{sen}\psi\cos\varphi & (\ell_2-\tilde s)\cos\psi\end{vmatrix}$$

$$= -\dot\varphi\,\omega\, dm\,(-\tilde s^2\, \text{sen}^2\psi) = (\omega\dot\varphi\,\text{sen}^2\psi)\, s^2\, dm$$ DA CUI INTEGRANDO

$$U^{AB}_{Coriolis} = \omega\dot\varphi\,\text{sen}^2\psi \,\frac{m_2}{\ell_2}\int_0^{\ell_2}\tilde s^2\, d\tilde s = \frac13 m_2\ell_2^2\,\omega\dot\varphi\,\text{sen}^2\psi$$

DA CUI:

$$\boxed{U^{COR}_{AB} = \frac13 m_2 \ell_2^2\,\omega\dot\varphi\,(1-\cos^2\psi) = \frac13 m_2\,\omega\dot\varphi\,(\ell_2^2-\ell_1^2\cos^2\alpha)}$$

POSSIAMO QUINDI RISCRIVERE IL POTENZIALE CENTRIFUGO TOTALE IN MODO SEMPLIFICATO

$$\boxed{U^{TOT}_{CENT}} = \frac16 m_1\ell_1^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\alpha + \frac16 m_2\, \ell_1^2 \overbrace{\cos^2\alpha}^{1-\text{sen}^2\alpha}\,\omega^2 + \text{Kost.} =$$

$$= \frac16(m_1+m_2)\,\ell_1^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\alpha + \text{Kost.} = \boxed{\frac16 M\ell_1^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\alpha + \text{Kost.}}$$

ANALOGAMENTE PER CORIOLIS TOTALE:

$$\boxed{U^{TOT}_{Coriolis}} = \frac13 m_1\ell_1^2\,\omega\dot\varphi\,\text{sen}^2\alpha - \frac13 m_2\,\omega\dot\varphi\,\ell_1^2\overbrace{\cos^2\alpha}^{1-\text{sen}^2\alpha} + \frac13 m_2\,\omega\dot\varphi\,\ell_2^2$$

$$= \boxed{\frac13(m_1+m_2)\,\ell_1^2\,\omega\dot\varphi\,\text{sen}^2\alpha + \frac13 m_2\,\omega\,(\ell_2^2-\ell_1^2)\,\dot\varphi}$$

DA CUI LE SOLLECITAZIONI

$$Q^{CENT}_\alpha = \frac{\partial U^{TOT}_{CENT}}{\partial\alpha} = \frac13 M\ell_1^2\,\omega^2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha \;;\quad Q^{CENTR.}_\varphi = \frac{\partial U^{TOT}_{CENT}}{\partial\varphi} = 0$$

MENTRE RICORDANDO CHE $\boxed{\omega = \text{KOST}}$. PER LE SOLLECITAZIONI DI CORIOLIS AVREMO

$$Q^{Coriolis}_\alpha = -\left\{\frac{d}{dt}\cancel{\frac{\partial U^{TOT}_{COR}}{\partial\dot\alpha}} - \frac{\partial U^{COR}}{\partial\alpha}\right\} = \frac23 M\ell_1^2\,\omega\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$Q^{Coriolis}_\varphi = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U^{TOT}_{COR}}{\partial\dot\varphi} - \cancel{\frac{\partial U^{TOT}_{COR}}{\partial\varphi}}\right\} = -\frac23 M\ell_1^2\,\omega\dot\alpha\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

AVREMO QUINDI PER IL TERZO QUESITO LE DUE SOLLECITAZIONI TOTALI.

$$Q_\alpha^{TOT} = \ell_1 \operatorname{sen}\alpha \left\{ \left(\frac{Mg}{2} - KR\right) + \ell_1 \cos\alpha \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2\right)\right\} + \frac{2}{3} M \ell_1^2 \omega \dot{\varphi} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$Q_\varphi^{TOT} = -2h\varphi - \frac{2}{3} M \ell_1^2 \omega \dot{\alpha} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

"EQUILIBRIO"

$$\begin{cases} Q_\alpha^{TOT}\big|_{\dot\varphi=\dot\alpha=0} = 0 \\ Q_\varphi^{TOT}\big|_{\dot\varphi=\dot\alpha=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \ell_1 \operatorname{sen}\alpha \left\{ 2\ell_1 \left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)\cos\alpha + (Mg - 2KR)\right\} = 0 & (16) \\ 2h\varphi = 0 & (17) \end{cases}$$

DALLA (16) $\Rightarrow$ (a) $\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi$ (18)

(b) $\cos\alpha = \dfrac{2KR - Mg}{2\ell_1\left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)}$ (19) $\Leftrightarrow -1 < \dfrac{2KR - Mg}{2\ell_1\left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)} < 1$

(ANCORA UNA VOLTA ESCLUDIAMO I CASI IN CUI $\cos\alpha = \pm 1$ INCLUSI IN (a))

QUINDI IN MODO SIMILE AI CASI DEL QUESITO 1) AVREMO.

1) NEI CASI IN CUI:

$$K \geq \frac{Mg + \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2}{2(R - \ell_1)} \quad e \quad K \leq \frac{Mg - \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2}{2(R + \ell_1)}$$

(DOVE ESSENDO $K > 0$ NE SEGUE CHE $Mg - \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2 > 0$)

AVREMO SOLTANTO DUE CONFIGURAZIONI

$$(\alpha, \varphi) \equiv \{ S_1 \equiv (0,0) \; ; \; S_2 = (\pi, 0) \}$$

2) NEL CASO IN CUI $\dfrac{M\left(g - \frac{2}{3}\ell_1\omega^2\right)}{2(R+\ell_1)} < K < \dfrac{M\left(g + \frac{2}{3}\ell_1\omega^2\right)}{2(R - \ell_1)}$

AVREMO 4 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

$$(\alpha, \varphi) \equiv \{ S_1 \equiv (0,0) \; ; \; S_2 \equiv (\pi, 0) \; ; \; S_3 = (\bar\alpha, 0) \; ; \; S_4 = (-\bar\alpha, 0) \}$$

$$\text{CON } \bar\alpha = \arccos\left\{ \frac{2KR - Mg}{2\ell_1\left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)} \right\}$$

PER LA STABILITÀ:

"DISCUSSIONE QUALITATIVA"

TRASCURANDO LE FORZE DI CORIOLIS VALUTIAMO QUALI SONO "SOLTANTO" LE CONFIGURAZIONI STABILI E PER IL TEOREMA DI LYAPUNOV AVREMO CHE ANCHE IN PRESENZA DI CORIOLIS QUESTE RIMARRANNO STABILI IN QUANTO LA POTENZA $P_{CR} = Q_\alpha^{CR} \dot{q}^\alpha = 0$, MENTRE SULLE INSTABILI (SENZA CORIOLIS) NON SI POTRÀ DIRE NULLA SE CONSIDERIAMO ANCHE CORIOLIS.

"DISCUSSIONE QUANTITATIVA" $\boxed{\text{"ALLENAMENTO"}}$ (NON RICHIESTA) SOLO LA STABILITÀ

TRASCURANDO CORIOLIS AVREMO

$$U_{\varphi\varphi} = -2h < 0 \qquad U_{\varphi\alpha} = U_{\alpha\varphi} = 0$$

QUINDI LE CONF. STABILI SI HANNO QUANDO $U_{\alpha\alpha} < 0$

$$U_{\alpha\alpha} = \left(\frac{Mg}{2} - KR\right) \ell_1 \cos\alpha + \ell_1^2 \left(K + \frac{1}{3} M\omega^2\right) \overbrace{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}^{2\cos^2\alpha - 1}$$

CONSIDERO I VARI CASI:

1) $$U_{\alpha\alpha}\big|_{S_1=(0,0)} = \frac{\ell_1}{2} \left\{ (Mg - 2KR) + 2\ell_1 \left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)\right]$$

2) $$U_{\alpha\alpha}\big|_{S_2=(\pi,0)} = -\frac{\ell_1}{2} \left\{ (Mg - 2KR) - 2\ell_1 \left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)\right]$$

3) $$U_{\alpha\alpha}\big|_{S_3,S_4} = \frac{\ell_1}{2} \cos\bar{\alpha} \left\{ \overbrace{(Mg - 2KR) + \cancel{2}\cancel{\left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)} \cancel{\ell_1} \frac{(2KR - Mg)}{\cancel{2\ell_1}\cancel{\left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)}}}^{=0} \right]$$

$$- \ell_1^2 \left(K + \frac{1}{3} M\omega^2\right) \operatorname{sen}^2\bar{\alpha}. < 0$$

CONSIDERO I VARI CASI

1) $$K < \frac{Mg - \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2}{2(R + \ell_1)} \iff (Mg - 2KR) > 2\ell_1 \left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)$$

ALLORA $U_{\alpha\alpha}\big|_{\alpha=\pi} < 0$ MAX $\Rightarrow$ STABILE

) $$K > \frac{Mg + \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2}{2(R - \ell_1)} \Rightarrow (Mg - 2KR) < -2\ell_1 \left(K + \frac{M\omega^2}{3}\right)$$

ALLORA $U_{\alpha\alpha}\big|_{S_1=(0,0)} < 0$ MAX STABILE

③ $$\frac{Mg - \frac{2}{3} M\omega^2 \ell_1}{2(R+\ell_1)} < K < \frac{Mg + \frac{2}{3} M\omega^2 \ell_1}{2(R-\ell_1)}$$

IN QUESTO CASO SOLTANTO

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{S_3, S_4} < 0 \quad \exists \text{ MAX} \quad \text{CONF. STABILI}$$

INFINE NEI DUE CASI

④ $$K = \tilde{K} = \frac{Mg - \frac{2}{3} M\omega^2 \ell_1}{2(R+\ell_1)} \qquad \cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{\substack{S_2=(\pi,0) \\ K=\tilde{K}}} = 0 \qquad \text{STUDIO LOCALE}$$

⑤ $$K = \hat{K} = \frac{Mg + \frac{2}{3} M \ell_1 \omega^2}{2(R-\ell_1)} \qquad \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$U_{\alpha\alpha}\Big|_{\substack{S_1=(0,0) \\ K=\hat{K}}} = 0 \qquad \text{STUDIO LOCALE.}$$

SE QUINDI AGGIUNGIAMO ANCHE I TERMINI DI CORIOLIS ESSENDO LA POTENZA NULLA, LE CONF. STABILI RIMARRANNO STABILI, MENTRE SULLE ALTRE CONF. DI EQUILIBRIO NON POTREMO DIRE NULLA.

"APPENDICE N° 2" (PER STUDENTI BRAVI)

METODO ALTERNATIVO AL METODO PUNTUALE PER IL CALCOLO DELLA ENERGIA CINETICA, UTILIZZANDO IL TENSORE DI INERZIA.

METODO DI KONIG, ASTA $\overline{AC}$

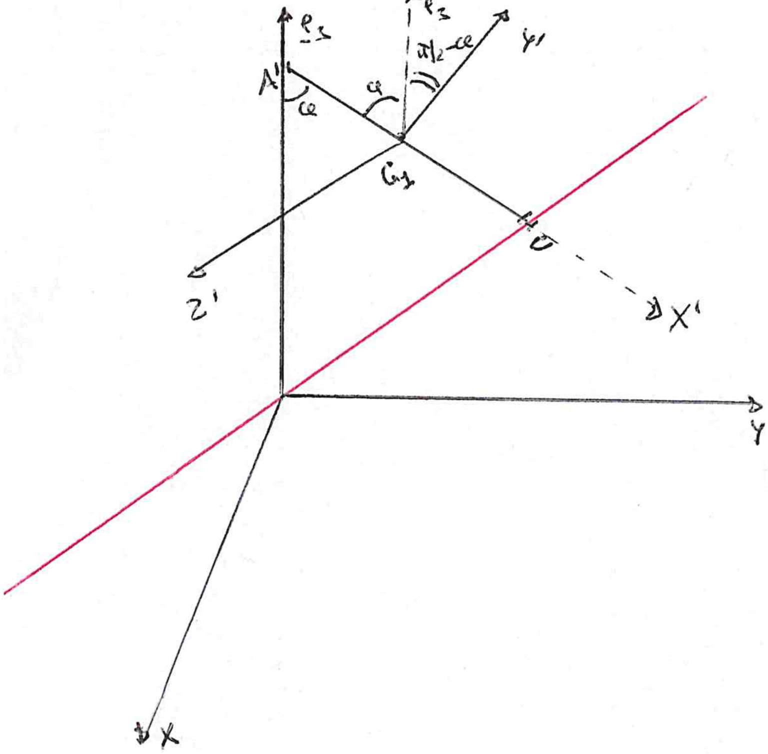
$$T_{\overline{AC}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{G}_1^2 + T'_{\overline{AC}}$$

$$\dot{G}_1 = \Big\{ -\ell_1/2\, \dot{\alpha} \cos\alpha \sin\varphi - \ell_1/2\, \dot{\varphi} \sin\alpha \cos\varphi,\ \ell_1/2\, \dot{\alpha} \cos\alpha \cos\varphi - \ell_1/2\, \dot{\varphi} \sin\alpha \sin\varphi,\ -\ell_1/2 \sin\alpha\, \dot{\alpha} \Big\}$$

$$\dot{G}_1^2 = \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 \dot{\alpha}^2 + \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha = \frac{\ell_1^2}{4} \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha \right)$$

T'_{AC} È L'ENERGIA CINETICA VALUTATA NEL RIF. BARICENTRALE SOLTANTO CHE ESSENDO UNA QUANTITÀ INVARIANTE POSSIAMO VALUTARLA

NEL RIF. CENTRALE DI INERZIA. DOVE L'ASSE x' CONTIENE L'ASTA AC (1



IN QUESTO CASO $\forall P \in \overline{AC}$ SARÀ DESCRITTO $P \equiv (x', 0, 0)$ $x' \in [-\frac{l}{2}, \ldots$

SEGUENDO VALUTIAMO IL TENSORE DI INERZIA

$$\bar{I}^{G_1}_{\alpha\beta} = \int dm \,(x'_c x'_c \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta)$$

AVREMO $\bar{I}^{G_1}_{11} = 0$

$$\bar{I}^{G_1}_{22} = \bar{I}^{G_1}_{33} = \int dm\, x^2 =$$

$$= \frac{m_1}{l_1} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} x^2\, dx = \frac{m_1}{l_1} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{l_1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} m_1 l_1^3$$

$$\bar{I}^{G_1}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \end{pmatrix}$$

CHIARAMENTE CI SONO ∞ RIFERIMENTI CENTRALI DI INERZIA AVENTI COME ASSE $\vec{x}$ L'ASSE x' CONTENENTE L'ASTA E COME ASSI $\vec{y}$ e $\vec{z}$ DUE QUALSIASI ASSI NEL PIANO ORTOGONALE AD x'.

PER CALCOLARE $T'_{AC} = \frac{1}{2} \bar{I}^{G_1}_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta$

SCEGLIAMO COME ASSE y' QUELLO ORTOGONALE AD x' CONTENUTO NEL PIANO PASSANTE PER L'ASSE $\underline{z}$ E PER L'ASTA (ASSE x').

FISSATO y' L'ASSE z' (NEL RIF. CENTRALE DI INERZIA) SARÀ PARALLELO AL PIANO x, y). ALLORA POTREMO SCRIVERE $\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$ DOVE:

) $\underline{\omega}_1$ SI OTTIENE MANTENENDO COSTANTE α E FACENDO VARIARE φ E SARÀ QUINDI DATO DA

$$\underline{\omega}_1 = \dot{\varphi}\, \underline{e}_3$$

ORA ADESSO VALUTIAMO $\underline{e}_3$ NEL RIF. CENTRALE DI INERZIA $\{G_1, x', y', z'\}$ AVREMO

$$\underline{e}_3 = \{-\cos\alpha,\ \cos(\pi/2 - \alpha),\ 0\} = \{-\cos\alpha,\ \mathrm{sen}\,\alpha,\ 0\}$$

DA CUI $\underline{\omega}_1 = \dot{\varphi}\,(-\cos\alpha,\ \mathrm{sen}\,\alpha,\ 0)$

) $\underline{\omega}_2$ SI OTTIENE FISSANDO φ E FACENDO VARIARE α (CON ASSE DI ROTAZIONE z')

$$\underline{\omega}_2 = \dot{\alpha}\, \underline{z}' = (0, 0, \dot{\alpha})$$

NEL RIF. CENTRALE DI INERZIA $\{G_1, x', y', z'\}$ AVREMO QUINDI

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \{-\dot{\varphi}\cos\alpha, \dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha, \dot{\alpha}\}$$

DA CUI

$$T'_{AC} = \frac{1}{2} I^{G_1}_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\omega_\beta = \frac{1}{2}\left(I^{G_1}_{22}\,\omega_2^2 + I^{G_1}_{33}\,\omega_3^2\right) =$$

$$= \frac{1}{24} m_1 \ell_1^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

QUINDI DAL TEOREMA DI KONIG.

$$T_{AC} = \frac{1}{2} m_1 \dot{G}_1^2 + T'_{AC} = \frac{1}{8} m_1 \ell_1^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right) +$$

$$+ \frac{1}{24} m_1 \ell_1^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right) = \frac{1}{6} m_1 \ell_1^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right).$$

CHE E' LO STESSO RISULTATO OTTENUTO CON IL METODO PUNTUALE.

PER L'ASTA $\overline{AB}$ PROCEDEREMO IN MODO ANALOGO CON KONIG.

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_2 \dot{G}_2^2 + T'_{AB} =$$

$$= \frac{1}{8} m_2 \ell_2^2 \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\psi\right) + \frac{1}{24} m_2 \ell_2^2 \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\psi\right)$$

$$= \frac{1}{6} m_2 \ell_2^2 \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\psi\right)$$

STESSO RISULTATO DEL METODO PUNTUALE DOVE ALLA FINE PORREMO :

$$\dot{\psi}^2 = \frac{\ell_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha}\,\dot{\alpha}^2 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}^2\psi = \frac{1}{\ell_2^2}\left\{\ell_2^2 - \ell_1^2\cos^2\alpha\right\}.$$

COME ABBIAMO GIA' VISTO.

$-\circ-$