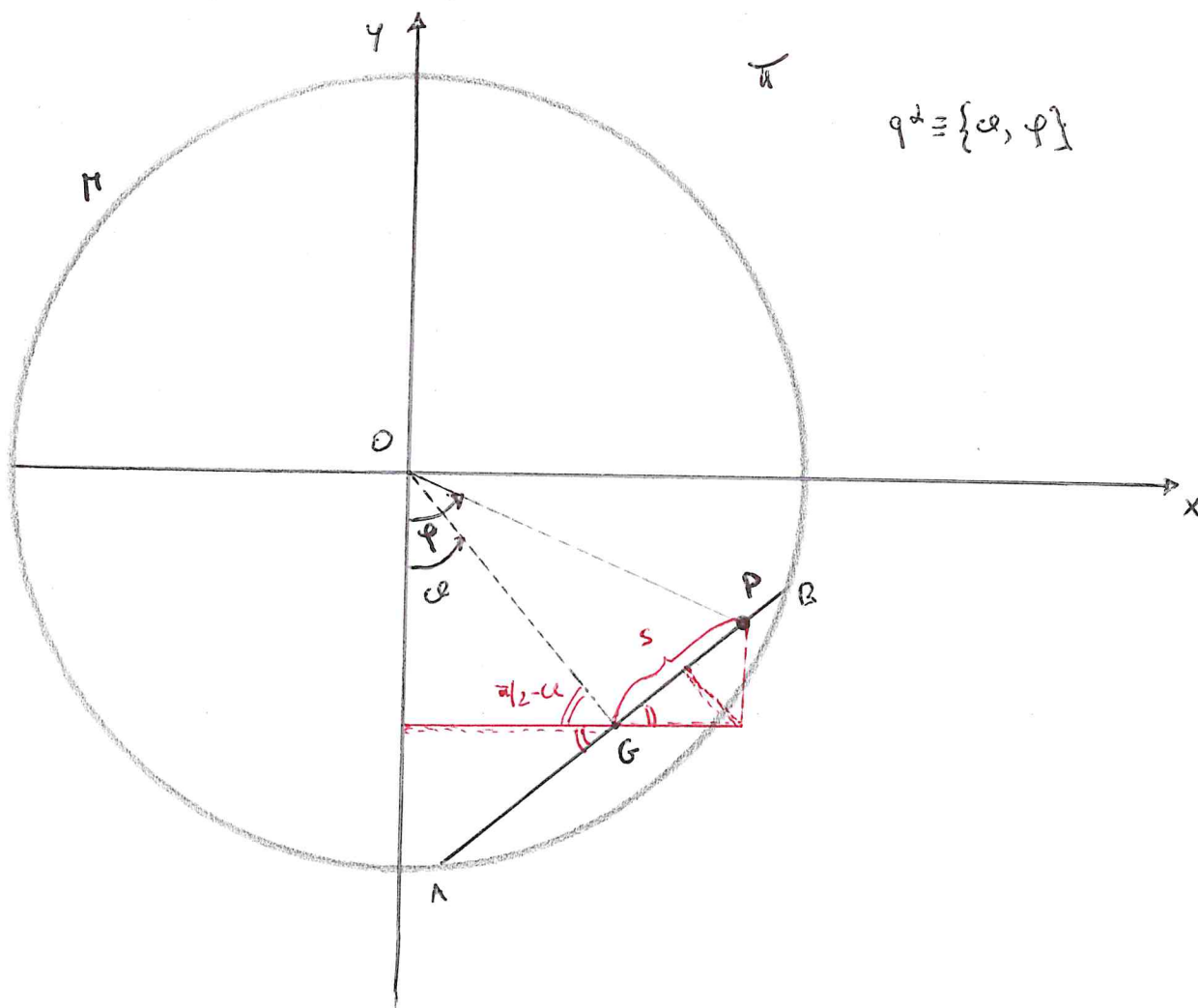
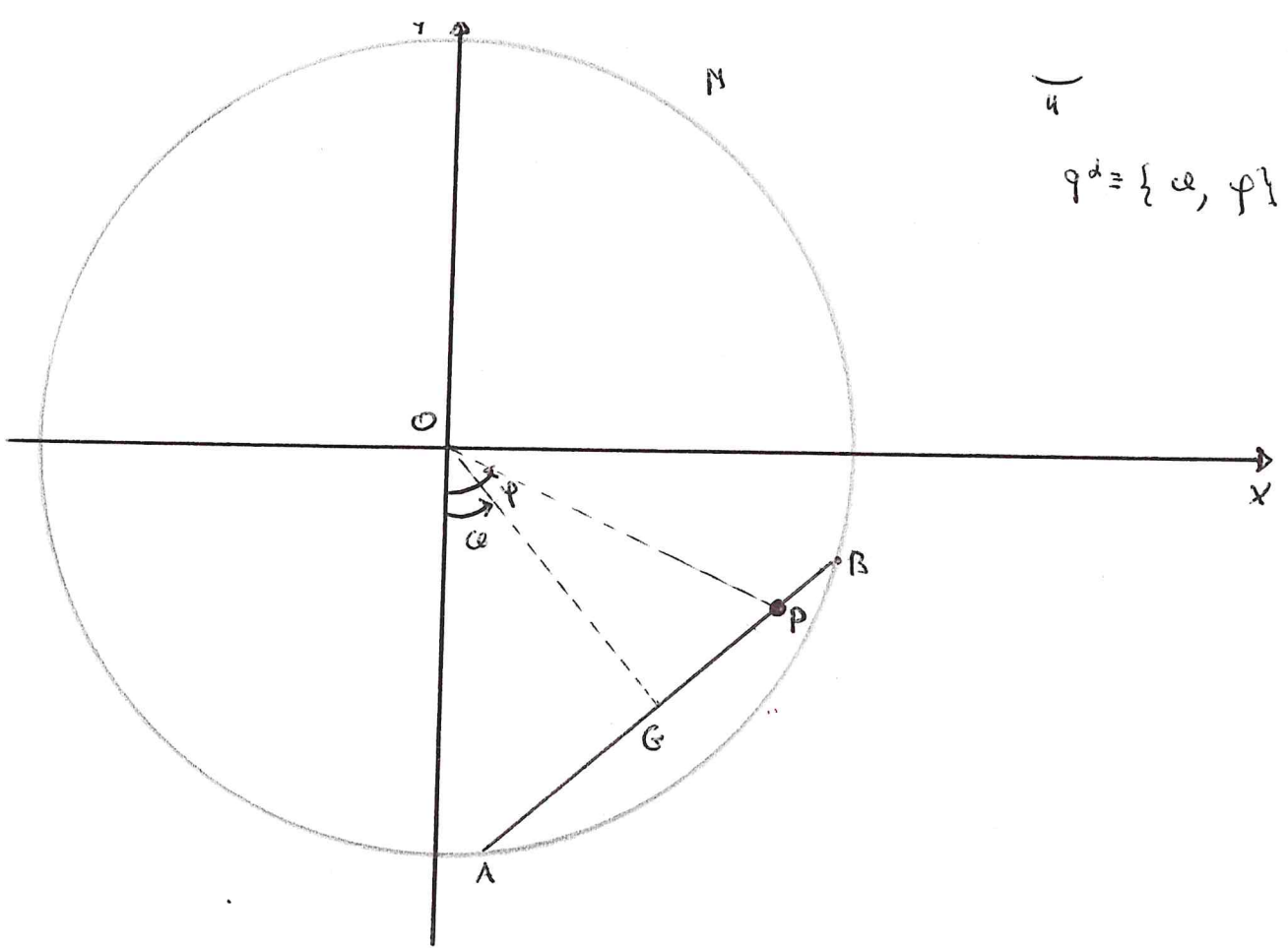


Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 07.02.2025

Un sistema materiale S , appartenente ad un piano verticale π , sia costituito da una barra AB omogenea di massa M , lunghezza $2L$ e baricentro G , con i suoi estremi A e B vincolati a scorrere sul bordo di una guida circolare fissata Γ di centro O e raggio R e da un punto materiale P di massa m vincolato a scorrere sulla barra AB (senza poterne mai superare gli estremi A e B). Posto O come origine del riferimento $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$ (vedi figura), si suppone che tutti i vincoli associati all'asta AB ed al punto materiale P siano senza attrito, ed si individuano come possibili coordinate lagrangiane i due angoli, ϑ che il segmento OG forma con l'asse verticale discendente e φ che il segmento OP forma sempre con l'asse verticale discendente (vedi figura). Assumendo per semplicità che sul sistema agisca soltanto la forza peso *si chiede di determinare:*

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio ordinarie, compatibili con i vincoli, studiandone la loro stabilità ed instabilità.
2. L'energia cinetica del sistema.
3. Supponendo in aggiunta (rispetto ai punti precedenti) che il piano π sia posto in rotazione uniforme, con velocità angolare ω , attorno all'asse $\vec{y}$, determinare nel riferimento relativo anche il potenziale associato alle forze apparenti. Determinare anche in questo caso le possibili configurazioni di equilibrio relative sotto la condizione $\varphi = \vartheta$, confrontando questo caso con quello determinato nel punto 1.





$$\overline{u}$$

$$q^d = \{ \omega, \varphi \}$$

DEFINIAMO $d = \overline{OG} = \sqrt{R^2 - e^2}$

$$G \equiv \{ d \sin \alpha, -d \cos \alpha \}$$

OTA:

OSSERVIAMO CHE IL PUNTO P SI PUO' MUOVERE SOLTANTO TRA GLI ESTREMI A E B DELLA SBARRA OMogenea AB.

QUINDI INDICANDO CON α L'ANGOLO $\widehat{GOB}$ ALLORA AVREMO CHE

$$-\alpha \leq \varphi - \alpha \leq \alpha \quad \text{CON} \quad \alpha \leq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\pi/2 \leq \varphi - \alpha \leq \pi/2} \quad (1)$$

NOTARE $d = R \cos \alpha$ OPPURE $e = R \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{d}{R} \\ \sin \alpha = \frac{e}{R} \end{cases}$

QUINDI IL VALORE $\alpha = \pi/2$ SI RAGGIUNGE SOLO NEL CASO LIMITE $e = R$ I.e. L'ASTA $AB = 2R$ COINCIDE CON UN DIAMETRO DI Γ . ($d = 0$)

OSSERVIAMO CHE: ~~OPPURE~~ $d = |\overline{OP}| \cos(\varphi - \alpha) \Rightarrow |\overline{OP}| = \frac{d}{\cos(\varphi - \alpha)}$

DA CUI AVREMO: $P \equiv \left\{ |\overline{OP}| \sin(\varphi), -|\overline{OP}| \cos \varphi \right\}$

DA CUI LE COORDINATE DEL PUNTO P SARANNO

$$P \equiv \left\{ d \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}, -d \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)} \right\}$$

Potenziale delle forze peso: $U_{\text{peso}}^P = mgy(0, -1) \cdot (P-u) = mgd \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}$

$U_{\text{peso}}^{\text{AN}} = Mgy(0, -1) \cdot (G-u) = Mgd \cos \alpha$

Alla cui $U_{\text{tot}} = Mgd \cos \alpha + mgd \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}$

alla cui derivata prima

$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -Mgd \sin \alpha + mgd \cos \varphi \cdot \left\{ - \frac{[-\sin(\varphi-\alpha)(-1)]}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \right\}$

$= -Mgd \sin \alpha - mgd \cos \varphi \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos^2(\varphi-\alpha)}$

$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgd \left\{ - \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi-\alpha)} + \cos \varphi \left[- \frac{[-\sin(\varphi-\alpha)]}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \right] \right\} =$

$= mgd \left\{ - \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi-\alpha)} + \frac{\cos \varphi \cdot \sin(\varphi-\alpha)}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \right\} =$

$= mgd \left\{ \frac{\sin(\varphi-\alpha) \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\varphi-\alpha)}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \right\} = -mgd \frac{\sin \alpha}{\cos^2(\varphi-\alpha)}$

osserva $\cos \varphi \sin(\varphi-\alpha) - \sin \varphi \cos(\varphi-\alpha) = \sin(\varphi-\alpha-\varphi) = -\sin \alpha$

quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = -Mgd \sin \alpha - mgd \cos \varphi \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgd \frac{\sin \alpha}{\cos^2(\varphi-\alpha)} \end{cases}$$

Se $\cos(\varphi-\alpha) \neq 0 \Rightarrow \varphi-\alpha \neq \pm \pi/2$

si cerca per determinazione i punti di equilibrio "ordinari"

si considera

alla 1ª derivata:

$\alpha=0 \Rightarrow \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi=0, \pi$

$\alpha=\pi \Rightarrow \frac{\cos \varphi \sin(\varphi-\pi)}{\cos^2(\varphi-\pi)} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0$

Alla cui allora $\varphi=0, \pi$

AVREMO COSÌ 4 POSSIBILI CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

(3)

$$(\alpha, \varphi) = \{ S_1 = (0, 0) ; S_2 = (\bar{u}, \bar{u}) ; S_3 = (0, \bar{u}) ; S_4 = (\bar{u}, 0) \}$$

PER OGNI UNO DEI S_3 E S_4 VORRANNO SCARICARE IL QUANTO

PER LA S_3 $\varphi - \alpha = \bar{u}$ INCOMPATIBILI CON LA CONDIZIONE (1*) $-\bar{u}/2 < \varphi - \alpha < \bar{u}/2$

PER LA S_4 $\varphi - \alpha = -\bar{u}$

AVREMO QUINDI DUE SOLLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO ACCETTABILI

$$(\alpha, \varphi) = \{ S_1 = (0, 0) , S_2 = (\bar{u}, \bar{u}) \}$$

"ANALISI DELLA STABILITÀ"

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} &= -N \int d \cos \alpha - m g d \cos \varphi \left\{ -\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \sin(\varphi - \alpha) \left[-2 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right] \right\} \\ &= -N \int d \cos \alpha + m g d \cos \varphi \left\{ \frac{\cos^2(\varphi - \alpha) + 2 \sin^2(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right\} \end{aligned}$$

DA CUI:

$$\left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -N \int d \cos \alpha + m g d \cos \varphi \frac{1 + \sin^2(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -m g d \sin \alpha \left[-2 \cdot \frac{(-\sin(\varphi - \alpha))}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right] = -2 m g d \frac{\sin \alpha \sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \alpha} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \varphi} = -m g d \left\{ \frac{\cos \alpha}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \sin \alpha \left[-2 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right] \right\} =$$

DA CUI

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \alpha} = -m g d \left\{ \frac{\cos \alpha \cos(\varphi - \alpha) - 2 \sin \alpha \sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right\}$$

$$\text{ESSENDO } \cos \alpha \cos(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \sin(\varphi - \alpha) = \cos(\alpha + \varphi - \alpha) = \cos \varphi$$

AVREMO

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \alpha} = -m g d \frac{\cos \varphi - \sin \alpha \sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)}}$$

SE ABBISSO CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $\varphi = 0$ AVREMO

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^2} \right|_{\varphi=\alpha} = g d (m-M) \cos \alpha$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^2} \right|_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi} \partial \alpha} \right|_{\varphi=\alpha} = -m g d \cos \alpha$$

Da cui $H|_{\varphi=\alpha} = -(m g d)^2 \cos^2 \alpha < 0$ (sia per $\alpha = \varphi = 0$, $\alpha = \varphi = \pi$)

Da cui le due configurazioni $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (\pi, \pi)$ "sono instabili"

"ENERGIA CINETICA"

Per il calcolo della energia cinetica di $\overline{AB}$ possiamo utilizzare "AUG" NOTAZIONE:

"CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO"

1°) Considero il punto fisso per $\overline{AB}$ a vuoto:

$$T_{0A} = \frac{1}{2} \overline{I}_{Z,0}^{AB} \dot{\varphi}^2$$

$$\text{dove } \overline{I}_{Z,0}^{AB} = \overline{I}_{Z,G}^{AB} + M d^2$$

$$\overline{I}_{Z,G}^{AB} = \int_{-e}^e x^2 dm = \frac{M}{2e} \int_{-e}^e x^2 dx = \frac{M}{2e} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-e}^e = \frac{1}{3} M e^2$$

Quindi: $T_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M e^2 + M d^2 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{e^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2$

essendo $d^2 = R^2 - e^2 \Rightarrow d^2 + \frac{e^2}{3} = R^2 - e^2 + \frac{e^2}{3} = R^2 - \frac{2}{3} e^2$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M \left(R^2 - \frac{2}{3} e^2 \right) \dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

2) Utilizziamo il "TEOREMA DI KOENIG":

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{G}}^2 + T'_{AB} \quad \text{con } T'_{AB} = \frac{1}{2} \overline{I}_{Z,G}^{AB} \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{G} = \{ d \cos \alpha \dot{\varphi}, d \sin \alpha \dot{\varphi} \} \Rightarrow \dot{\vec{G}}^2 = d^2 \dot{\varphi}^2, \quad \overline{I}_{Z,G}^{AB} = \frac{1}{3} M e^2$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M d^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M e^2 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{e^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 \quad \text{UGUALE A (2)}$$

3) Per l'ulteriore verifica del punto materiale P. a vuoto:

$$\vec{P} = \left\{ d \left[\frac{\cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{\cos(\varphi - \alpha)} + \sin \varphi \left\{ (-1) \frac{(-\sin(\varphi - \alpha))}{\cos^2(\varphi - \alpha)} (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) \right\} \right], \right. \\ \left. - d \left[\frac{-\sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}{\cos(\varphi - \alpha)} + \cos \varphi \cdot (-1) \frac{(-\sin(\varphi - \alpha))}{\cos^2(\varphi - \alpha)} \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) \right] \right\}$$

AA cui

$$\ddot{\vec{P}} = d \left\{ \frac{\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}}{\cos(\varphi - \alpha)} + \frac{\sin \varphi \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} (\dot{\varphi} - \ddot{\alpha}), \frac{\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}}{\cos(\varphi - \alpha)} + \frac{\cos \varphi \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} (\dot{\varphi} - \ddot{\alpha}) \right\}$$

Quindi

$$\ddot{\vec{P}}^2 = d^2 \left\{ \frac{\dot{\varphi}^2}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} \right]^2 (\dot{\varphi} - \ddot{\alpha})^2 \right\}$$

AA cui

$$T_P = \frac{1}{2} m d^2 \left\{ \frac{\dot{\varphi}^2}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} \right]^2 (\dot{\varphi} - \ddot{\alpha})^2 \right\}$$

L'ENERGIA CINETICA TOTALE SARA' QUINDI DATA DA:

$$T = T_{AB} + T_P = \frac{1}{2} M \left(d^2 + \frac{e^2}{3} \right) \ddot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m d^2 \left\{ \frac{\dot{\varphi}^2}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} \right]^2 (\dot{\varphi} - \ddot{\alpha})^2 \right\}$$

~

Si assume supposto che il piano π sia posto in rotazione attorno l'asse $\vec{y}$. Per il calcolo del potenziale centrifugo del sistema avendo

NOTA: 1) SOVRACCARICO NON ARIATO TERMINI "NON UNIFORMI" INQUANTO $\omega = \text{cost.}$

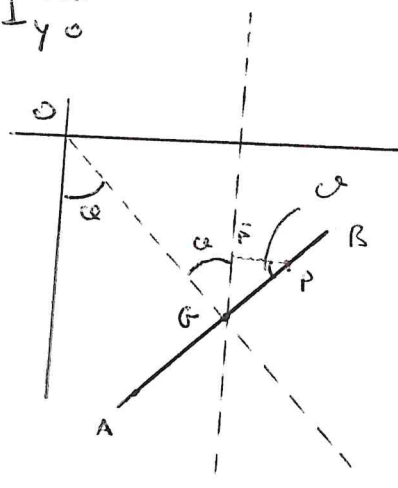
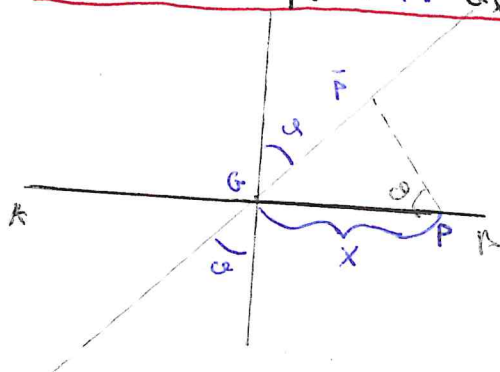
2) NON ARIATO TERMINI CORRETTI PERCHE' IL SISTEMA E' PIANO E L'ASSE DI ROTAZIONE APPARTIENE AL PIANO

$$U_{\text{CENTR.}}(P) = \frac{1}{2} m \omega^2 (P - \bar{P})^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2(\varphi - \alpha)}$$

$$U_{\text{CENTR.}}^{(AN)} = \frac{1}{2} \omega^2 \int (P - \bar{P})^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 I_{y_0}^{AB}$$

APPLICANDO IL TEOR. DI HUYGENS - STEINER.

$$I_{y_0}^{AN} = I_{y_G}^{AN} + M G_X^2$$



$$I_{y_G}^{AN} = \int_{-e}^e (x \cos \alpha)^2 dm = \frac{M}{2e} \cos^2 \alpha \int_{-e}^e x^2 dx = \frac{1}{3} M e^2 \cos^2 \alpha$$

Quindi $I_{y,0}^{AB} = \frac{1}{3} M \ell^2 \cos^2 \alpha + M d^2 \sin^2 \alpha$

Allora $U_{centr.}^{AB} = \frac{1}{2} M \omega^2 \left(\frac{\ell^2}{3} \cos^2 \alpha + d^2 \sin^2 \alpha \right)$

Se quindi applichiamo il contributo dovuto al potenziale centrifugo del rif. relativo (in rotazione ω uniforme) allora

$$Q_\alpha^{cent} = \frac{\Delta U_{cent}^{(P)}}{\Delta \alpha} + \frac{\Delta U_{cent}^{AB}}{\Delta \alpha} = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 \sin^2 \varphi \left\{ \frac{(-2) [-\sin(\varphi - \alpha)] (-1)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} M \omega^2 \left(\frac{\ell^2}{3} (-2 \cos \alpha \sin \alpha) + d^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha) \right)$$

$$= m \omega^2 d^2 \sin^2 \varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} + M \omega^2 \left(d^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

Quindi considerando la successione totale Q_α allora:

$$Q_\alpha = -Mgd \sin \alpha - mgd \cos \varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} +$$

$$+ m \omega^2 d^2 \sin^2 \varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} + M \omega^2 \left(d^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

Allo stesso modo,

$$Q_\varphi^{centr.} = \frac{\Delta U_{cent}^{(P)}}{\Delta \varphi} + \frac{\Delta U_{cent}^{AB}}{\Delta \varphi} = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 \left\{ \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \right.$$

$$+ \sin^3 \varphi \left[\frac{(-2)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} [-\sin(\varphi - \alpha)] \right]$$

$$= m \omega^2 d^2 \left\{ \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \sin^3 \varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right\}$$

Allora

$$Q_\varphi = -mgd \frac{\sin \alpha}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + m \omega^2 d^2 \left\{ \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \sin^3 \varphi \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos^3(\varphi - \alpha)} \right\}$$

Calcoliamo configurazioni di equilibrio per $\varphi = 0$

$$\begin{cases} Q_\alpha = -Mgd \sin \alpha + M \omega^2 \left(d^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ Q_\varphi = -mgd \sin \alpha + m \omega^2 d^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

Ad cui per ENTRAMBE LE CONDIZIONI AVREMO

(7)

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi \Rightarrow S_1 = (0, 0), S_2 = (\pi, \pi)$$

MOSTRO LE POSSIBILI ALTRE SOLUZIONI RISOLTO PER UNO DEI DUE

DEI CONDIZIONI:

$$\begin{aligned} -gd + \omega^2 \left(d^2 - \frac{p^2}{3} \right) \cos \alpha &= 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{gd}{\omega^2 \left(d^2 - \frac{p^2}{3} \right)} \\ -gd + \omega^2 d^2 \cos \alpha &= 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 d} \end{aligned}$$

che è RISOLTO PER UNO DEI DUE COMPARTIMENTI SOLO NELLE CASI IN CUI $p=0$
il che è ASSOLUTO.

Quindi le uniche soluzioni tali che $\varphi = \alpha \Rightarrow S_1 = (0, 0), S_2 = (\pi, \pi)$

che non sono in cui il piano π non è in rotazione.

~