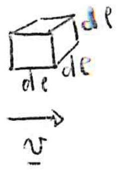
CERCHIAMO ADESSO DI RISCRIVERE LA S_{int} CONSIDERANDO UNA QUANTITA' FINITA DI CARICA AL POSTO DI UNA CARICA PUNTIFORME.

1) NELLA DESCRIZIONE PRECEDENTE ABBIAMO ASSUNTO IL CAMPO ESTERNO COME ASSEGNATO IPOTIZZANDO **COME** TRASCURABILE LA VARIAZIONE INDOTTA DALLA CARICA SUL CAMPO.

2) SE CONSIDERIAMO UN VOLUMETTO dV INFINITESIMO, IN MOTO CON VELOCITA' $\underline{v}$ LUNGO LA DIREZIONE DI UNO DEI SUOI SPIGOLI AVREMO CHE VISTO DA DUE DIVERSI OSSERVATORI IL VOLUMETTO SUBIRA' UNA CONTRAZIONE LUNGO LO SPIGOLO CHE SEGUE LA DIREZIONE DEL MOTO. QUINDI AVREMO.



$$dV = dV_0\sqrt{1-\beta^2}$$

QUINDI CONSIDERANDO UN ELEMENTO INFINITESIMO DI CARICA

$$dQ_0 = \rho_0\, dV_0 = dQ = \rho\, dV = \rho\, dV_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

DA CUI ASSUMENDO LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA AVREMO:

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1-\beta^2}$$

CIOE' SE IL VOLUME SI CONTRAE LA DENSITA' DI CARICA AUMENTA

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

3) SE ADESSO CONSIDERO LA QUANTITA' "ELEMENTO INFINITESIMO DI VOLUME D'UNIVERSO"

$$d\Omega = c\, dV\, dt = c\, dV_0 \cancel{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{dt_0}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} = c\, dV_0\, dt_0$$

AVREMO CHE $d\Omega = d\Omega_0$ E' UN INVARIANTE DI LORENTZ.

SE QUINDI CALCOLO LA QUANTITA' (4-VETTORE)

$$dq\, dx_i = \rho\, dV \frac{dx_i}{c\,dt}\, c\,dt = d\Omega \frac{\rho}{c} \frac{dx_i}{dt} = d\Omega\, J_i$$

DEFINISCO:

$$J_i = \rho \frac{dx_i}{c\,dt} \qquad \text{4-VETTORE "DENSITA' DI CORRENTE".}$$

$$J_\alpha = \left[\rho \frac{v_i}{c},\ i\rho \right]$$

E DAVRO'
$$\boxed{dq\, dx_\alpha = d\Omega\, J_\alpha}$$

IN QUESTO MODO CONSIDERANDO UNA QUANTITA' INFINITESIMA DI CARICA POTRO' SCRIVERE

$$S_{INT} = \frac{1}{c} \int_{E_1}^{E_1} dq\, A_\alpha\, dx_\alpha = \frac{1}{c} \int d\Omega\, J_\alpha A_\alpha$$

DOVE NEL 1° INTEGRALE L'INTEGRAZIONE E' FATTA LUNGO UNA **LINEA** DI UNIVERSO TRA E_1 ED E_2, MENTRE NEL 2° INTEGRALE E' FATTA SU TUTTO IL VOLUME D'UNIVERSO, E SARA' LA FORMA DEL 4-VETTORE J_α CHE CI DICE DOVE L'INTEGRALE E' NULLO, E DOVE NON E' NULLO (AD ESEMPIO LUNGO LA LINEA D'UNIVERSO). NOTIAMO CHE LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA POTRA' ESSERE ESPRESSA SOTTO FORMA DI LEGGE DI BILANCIO

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

ALLORA IN GENERALE PER UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA SCRIVEREMO, IN MODO PIÙ GENERALE CHE:

$$S_{INT} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha A_\alpha \, d\Omega$$

TEOREMA:

C.N.S PERCHÉ VALGA LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA È CHE LA $S_{INT.}$ SIA GAUGE INVARIANTE.

SIA $A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha f$

$$S'_{INT} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha A'_\alpha \, d\Omega = \underbrace{\frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha A_\alpha \, d\Omega}_{S_{INT}} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha \partial_\alpha f \, d\Omega$$

$$S'_{INT} = S_{INT} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha \partial_\alpha f \, d\Omega}_{\frac{1}{c} \left\{ \int_{\Omega} \partial_\alpha (J_\alpha f) \, d\Omega - \int_{\Omega} (\partial_\alpha J_\alpha) f \, d\Omega \right\}}$$

APPLICANDO IL TEOREMA DELLA 4-DIVERGENZA

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha (J_\alpha f) \, d\Omega = \int_{\Sigma(\Omega)} J_\alpha f \, d\Sigma_\alpha$$

MA SULLA IPERSUPERFICIE ASINTOTICA ASSUMIAMO CHE

$J_\alpha = 0$ DA CUI

$$S'_{INT} = S_{INT} - \frac{1}{c}\int_{\Omega} \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} \cdot f \, d\Omega \qquad \forall f.$$

ALLORA:

SE $S'_{INT.} = S_{INT.}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} \cdot f \, d\Omega = 0 \ \forall f \Rightarrow \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$

VICEVERSA SE $\dfrac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \Rightarrow S'_{INT} = S_{INT}$.

"DIGRESSIONE"

"FUNZIONALE DI UNA FUNZIONE DI CAMPO"

IL CONCETTO DI CAMPO, VIENE DESCRITTO PER MEZZO DI UNA FUNZIONE DELLO SPAZIO TEMPO DEL GRUPPO DI LORENTZ.

$$\varphi = \varphi(x_\alpha)$$

DOVE φ PUÒ ESSERE UNA "FUNZIONE SCALARE", UNA "FUNZIONE VETTORIALE" (COME IL 4-POTENZIALE A_α NEL CASO DI UN CAMPO ELETTROMAGNETICO), UNA FUNZIONE TENSORIALE DI ORDINE SUPERIORE. ASSUMEREMO CHE LA LAGRANGIANA ASSOCIATA AL SUDDETTO CAMPO SIA DATA DA

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\alpha \varphi)$$

DOVE $\partial_\alpha \varphi$ È IL 4-GRADIENTE DI φ. OSSERVIAMO CHE ESSENDO φ UNA FUNZIONE DI TUTTO LO SPAZIO-TEMPO L'AZIONE ASSOCIATA AL SUDDETTO CAMPO SARÀ DEFINITA TRAMITE

UNA INTEGRAZIONE SU TUTTO IL VOLUME DI UNIVERSO

$$S_\varphi = \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi, \partial_\alpha \varphi)\, d\Omega$$

DOVE SEPARATAMENTE $d\Omega$ E $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\alpha \varphi)$ SONO LORENTZ-INVARIANTI ESSENDO Ω TUTTO IL VOLUME D'UNIVERSO.

SE QUINDI CONSIDERIAMO IL CAMPO

$$\begin{cases} \varphi = \bar{\varphi}(x_\beta) \\ \partial_\alpha \varphi = \partial_\alpha \bar{\varphi}(x_\beta) \end{cases}$$

E CONSIDERIAMO UNA SUA ARBITRARIA DEFORMAZIONE, TRAMITE IL PARAMETRO λ, AVREMO

$$\begin{cases} \varphi = \bar{\varphi}(x_\beta) + \lambda\, \delta\varphi \\ \partial_\alpha \varphi = \partial_\alpha \bar{\varphi} + \lambda\, \partial_\alpha \delta\varphi \end{cases}$$

DEFINIAMO LA VARIAZIONE PRIMA DI S COME

$$\delta S = \lim_{\lambda \to 0} \frac{S_{\varphi + \lambda \delta\varphi} - S_\varphi}{\lambda}$$

ESSENDO

$$S_{\varphi + \lambda \delta\varphi} = \int_\Omega \mathcal{L}(\bar{\varphi} + \lambda \delta\varphi, \partial_\alpha \bar{\varphi} + \lambda\, \partial_\alpha \delta\varphi)\, d\Omega$$

$$S_\varphi = \int_\Omega \mathcal{L}(\bar{\varphi}, \partial_\alpha \bar{\varphi})\, d\Omega$$

DA CUI:

$$S_{\bar\varphi+\lambda\delta\varphi} - S_{\bar\varphi} = \int_\Omega \left[\mathcal{L}(\bar\varphi+\lambda\delta\varphi, \partial_\alpha\bar\varphi+\lambda\partial_\alpha\delta\varphi) - \mathcal{L}(\bar\varphi, \partial_\alpha\bar\varphi)\right] d\Omega$$

CONSIDERANDO UNO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR ATTORNO A $\lambda=0$

$$\mathcal{L}(\bar\varphi+\lambda\delta\varphi, \partial_\alpha\bar\varphi+\lambda\partial_\alpha\delta\varphi) - \mathcal{L}(\bar\varphi, \partial_\alpha\bar\varphi) =$$

$$= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\partial_\alpha(\delta\varphi)\right]\lambda + O(\lambda^2)$$

DA CUI:

$$\frac{S_{\bar\varphi+\lambda\delta\varphi} - S_{\bar\varphi}}{\lambda} = \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\partial_\alpha(\delta\varphi)\right] d\Omega + O(\lambda)$$

QUINDI:

$$\delta S = \int_\Omega \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\varphi}\delta\varphi\, d\Omega + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\partial_\alpha(\delta\varphi)\, d\Omega$$

IL II° INTEGRALE POTRA' SCRIVERSI COME

$$\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\partial_\alpha\delta\varphi\, d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\delta\varphi\right\} d\Omega -$$

$$- \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar\varphi)}\right\}\delta\varphi\, d\Omega$$

UTILIZZANDO IL TEOREMA SULLA 4-DIVERGENZA

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\varphi})} \delta\varphi \right\} d\Omega = \int_{\Sigma(\Omega)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\varphi})} \delta\varphi \, d\Sigma_\alpha$$

dove $d\Sigma$ ELEMENTO INFINITESIMO DI IPERSUPERFICIE.

~~[illegible]~~

DAL MOMENTO CHE QUESTO INTEGRALE DI SUPERFICIE VA VALUTATO SULLA IPERSUPERFICIE ASINTOTICA DOVE $\delta\varphi = 0$ ESSO DARA' CONTRIBUTO NULLO. DA CUI

$$\delta S = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\varphi})} \right) \right\} \delta\varphi \, d\Omega \qquad \forall \, \delta\varphi$$

TEOREMA: C.N.S AFFINCHE $\delta S = 0$ (1) E' CHE VALGANO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) = 0} \qquad (2)$$

INFATTI SE VALE LA (2) $\Rightarrow$ $\delta S = 0$ VICEVERSA PROVIAMO CHE SE

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) = 0$$

PROCEDIAMO PER ASSURDO SUPPONENDO CHE $\exists \; x^*_\beta$: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x^*_\beta)} - \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}$

ALLORA $\exists \; I(x^*_\beta) = U^*$: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) > 0$

DATA L'ARBITRARIETA' DI $\delta\varphi$ SCEGLIAMO $\delta\varphi = \begin{cases} 0 & x_\beta \notin U^* \\ >0 & x_\beta \in U^* \end{cases}$

DA CUI

$$\delta S' = \int_{V^*} \delta\varphi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) \right\} d\Omega > 0$$

IL CHE E' ASSURDO PERCHE' $\delta S' = 0$.

"AZIONE ASSOCIATA AL CAMPO ELETTROMAGNETICO"

L'AZIONE TOTALE ASSOCIATA AL SISTEMA COSTITUITO DA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA SOGGETTA AD UN CAMPO ELETTROMAGNETICO E' DATA DALLA SOMMA DEI TRE CONTRIBUTI,

$$S = S_0 + S_{int} + S_{EM}$$

ABBIAMO VISTO CHE SE IL CAMPO E' FISSATO $\delta S_{E.M} = 0$

VEDIAMO QUALI SONO LE PROPRIETA' CHE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DALLA $S_{E.M}$.

$$S_{EM} = \int \mathcal{L}_{EM} \, d\Omega$$

1) S_{EM} DEVE ESSE INVARIANTE RISPETTO A TRASF. DI LORENTZ DA CUI ESSENDO $d\Omega$ UN INVARIANTE AVREMO CHE

$\mathcal{L}_{EM}$ E' UN INVARIANTE DI LORENTZ

2) S_{EM} DEVE ESSERE GAUGE INVARIANTE, ESSENDO LE PROPRIETA' DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO LEGATE SEMPLICEMENTE NELA "OSSERVABILITA'" DI $\vec{E}$ ED $\vec{H}$ E NON DEL 4-POTENZIALE A_α DA CUI

$\mathcal{L}_{EM}$ E' GAUGE INVARIANTE

3) DAL MOMENTO CHE TUTTE LE PROPRIETA' DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO SONO ESPRESSE DAL TENSORE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO ANTISIMMETRICO:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

CHE E' GAUGE-INVARIANTE, ASSUMEREMO CHE

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}(F_{\alpha\beta})$$

VEDIAMO DI DETERMINARE UNA BASE FUNZIONALE PER UNA QUALSIASI FUNZIONE SCALARE (LORENTZ-INVARIANTE) DEL TENSORE ANTISIMMETRICO $F_{\alpha\beta}$.

SE SUPPONIAMO DI DETERMINARE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(Q_1, \dots Q_N)$$

DOVE $\{Q_1; \dots Q_N\}$ SONO DEGLI INVARIANTI DI LORENTZ. ALLORA SCRIVEREMO

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}[F_{\alpha\beta}(Q_1 \dots Q_N)] = \tilde{\mathcal{L}}(Q_1 \dots Q_N) \qquad (*)$$

ESSENDO $\{Q_1, \dots Q_N\}$ DEGLI INVARIANTI DI LORENTZ LA $(*)$ DOVRA' VALERE IN QUALSIASI ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO PER CUI IL SET $\{Q_1 \dots Q_N\}$ SI DICE "BASE FUNZIONALE PER FUNZIONI ISOTROPE SCALARI DI LORENTZ". E' POSSIBILE PROVARE CHE NEL CASO IN QUESTIONE

$$\{Q_1 \dots Q_N\} = \{\mathrm{Tr}\, F^2, \mathrm{Tr}\, F^4\}$$

CIOÈ IL SET DI DUE SCALARI

$$\{ \mathrm{Tr}\, F^2 ,\ \mathrm{Tr}\, F^4 \}$$

COSTITUISCE UNA "BASE FUNZIONALE" PER QUALSIASI FUNZIONE SCALARE (LORENTZ-INVARIANTE) CHE DIPENDE DAL TENSORE ANTISIMMETRICO $F_{\alpha\beta}$.

DIM:

CONSIDERIAMO I VARI CASI:

i) SE $\vec{E}$ ED $\vec{H}$ SONO ARBITRARI MA TALI CHE: $\vec{E}\cdot\vec{H} \neq 0$

ALLORA $\exists$ UN RIFERIMENTO IN CUI $\vec{E}$ ED $\vec{H}$ SONO PARALLELI. CON UNA OPPORTUNA ROTAZIONE CONSIDERO IL RIF TALE CHE

$$\vec{E} \equiv (0, 0, E_z) \qquad \vec{H} \equiv (0, 0, H_z)$$

IN MODO TALE CHE SI ABBIA:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & H_z & 0 & 0 \\ -H_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE_z \\ 0 & 0 & iE_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

2) SUPPONIAMO CHE SI ABBIA LA CONDIZIONE $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$ MA $E^2 - H^2 \neq 0$

A) ALLORA SE $E^2 - H^2 < 0$ $\exists$ UN RIFERIMENTO IN CUI $\vec{E} = 0$ ED $\vec{H} \neq 0$. DA CUI CON UNA OPPORTUNA ROTAZIONE DEGLI ASSI FACCIO SÌ CHE $\vec{H} \equiv (0, 0, H_z)$, DA CUI

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & 0 & 0 \\ -H_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B) SE $E^2 - H^2 > 0$ $\exists$ UN RIFERIMENTO IN CUI $\vec{E} \neq 0$ ED $\vec{H} = 0$. DA CUI CON UNA OPPORTUNA ROTAZ. DEGLI ASSI FACCIO SÌ CHE $\vec{E} \equiv (0, 0, E_z)$, DA CUI

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE_z \\ 0 & 0 & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

ALLORA POSSIAMO QUINDI TROVARE (TRANNE NEL CASO DI ONDA PIANA PER CUI $|E|=|H|$ ED $\vec{E}\cdot\vec{H}=0$) TROVARE SEMPRE UN RIFERIMENTO IN CUI $F_{\alpha\beta}$ ASSUME LA FORMA (*)

CIOE' TALE CHE VALGA LA CONDIZIONE

$$(F_{12})^2 - (F_{34})^2 = E_z^2 + H_z^2 \neq 0. \qquad (1)$$

IN QUESTO RIFERIMENTO, CALCOLIAMO GLI SCALARI

$$\operatorname{tr} F^2 \quad , \quad \operatorname{tr} F^4$$

DA CUI OTTERREMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} (F_{12})^2 + (F_{34})^2 = u_1 \\ (F_{12})^4 + (F_{34})^4 = u_2 \end{cases} \qquad \text{CON: } u_1 = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} F^2 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr} F^4$$

PONENDO $\lambda_1 = (F_{12})^2$ e $\lambda_2 = (F_{34})^2$ IL SISTEMA POTRA' SCRIVERSI NELLA FORMA:

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = u_2 \end{cases}$$

QUESTO SISTEMA E' RISOLVIBILE TRAMITE LE RELAZIONI DI NEWTON-GIRARD (VEDI GRECO STAMPACCHIA PAG. 218-219), DATE (VEDI ANCHE APPENDICE N° 2)
DA

$$\begin{cases} a_0 u_1 = -a_1 \\ a_0 u_2 + a_1 u_1 = -2a_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = -u_1 \quad ; \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{2}\left[u_1^2 - u_2\right]$$

cioè $$\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{2}\, tr F^2 \qquad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{4}\left\{ \frac{1}{2}\left[tr F^2\right]^2 - tr F^4 \right\} \qquad (3)$$

UTILIZZANDO QUESTE RELAZIONI OTTENIAMO LE SOLUZIONI λ_1, λ_2 DEL SISTEMA (2) COME SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE SECOLARE DI 2° GRADO:

$$x^2 + \frac{a_1}{a_0}\, x + \frac{a_2}{a_0} = 0 \qquad (4)$$

RISOLVENDO LA (4) AVREMO:

$$\lambda_1 = (F_{12})^2 = H_3^2 = \frac{1}{4}\left\{ - tr F^2 + \left[4\, tr F^4 - (tr F^2)^2\right]^{1/2} \right\}$$

$$-\lambda_2 = -(F_{34})^2 = E_3^2 = \frac{1}{4}\left\{ tr F^2 + \left[4\, tr F^4 - (tr F^2)^2\right]^{1/2} \right\}$$

POSSIAMO QUINDI SCEGLIERE IN MODO OPPORTUNO IL VERSO DEGLI ASSI $\underline{e}_1$ ed $\underline{e}_3$ IN MODO TALE CHE $H_3, E_3 > 0$

DA CUI
$$\{H_3, E_3\} = f\,(tr F^2,\ tr F^4)$$

cioè ∃ UN RIFERIMENTO IN CUI UNA QUALSIASI FUNZIONE SCALARE

$$f\,(F_{\alpha\beta}) = f\left[F_{\alpha\beta}\left(tr F^2,\ tr F^4\right)\right] = \tilde{f}\,(tr F^2,\ tr F^4)$$

cioè $tr F^2$ e $tr F^4$ COSTITUISCONO UNA BASE FUNZIONALE PER FUNZIONI ISOTROPE SCALARI DEL TENSORE $F_{\alpha\beta}$.

$\longleftrightarrow$

QUINDI
$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(F_{\alpha\beta}) = \mathcal{L}_{EM}\left(tr F^2,\ tr F^4\right)$$

ESERCIZIO:

OSSERVIAMO CHE:

$$\begin{cases} tr F^2 = 2\,(E^2 - H^2) \\ tr F^4 = 2\,(E^2 - H^2)^2 + 4\,(\vec{E}\cdot\vec{H})^2 \end{cases}$$

DA CUI

$$E^2 - H^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,F^2 \qquad (\vec{E}\cdot\vec{H})^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,F^4 - \frac{1}{8}\left(\mathrm{Tr}\,F^2\right)^2$$

SECONDO QUANTO DICE IL LANDAU (TEORIA DEI CAMPI) UNA QUALSIASI FUNZIONE SCALARE DI $F_{\alpha\beta}$ AMMETTE COME SET DI INVARIANTI (IN FORMA NON COVARIANTE)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left((E^2 - H^2),\ (\vec{E}\cdot\vec{H})^2\right)$$

O COME ABBIAMO PROVATO

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}\left(\mathrm{Tr}\,F^2,\ \mathrm{Tr}\,F^4\right)$$

"$\underline{\mathrm{II}}^a$ COPPIA DI EQUAZIONI DI MAXWELL."

"TEORIA LINEARE"

CERCHIAMO LE EQUAZIONI DI MAXWELL, IN MODO TALE CHE VALGA IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE PER $\vec{E}$ ed $\vec{H}$.

SI OSSERVA INFATTI CHE, IN CONDIZIONI DI NON ELEVATI VALORI DEI CAMPI $\vec{E}$ ED $\vec{H}$, IL CAMPO ELETTROMAGNETICO PRODOTTO DA DUE SORGENTI E' DATO DALLA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI PRODOTTI SINGOLARMENTE DALLE DUE SORGENTI. CIOE' LA COMBINAZIONE LINEARE DEI CAMPI CHE SONO SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL CAMPO DEVE A SUA VOLTA ESSERE SOLUZIONE DELLE SUDDETTE EQUAZIONI. PERCHE' QUESTO ACCADA LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DESCRIVENTI IL CAMPO (EQUAZ. DI MAXWELL) DOVRANNO ESSERE LINEARI IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$.

QUESTO SIGNIFICA CHE LA LAGRANGIANA $\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(F_{\alpha\beta})$ DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE QUADRATICA IN $F_{\alpha\beta}$, IN QUANTO LE EQUAZIONI DI CAMPO SI OTTENGONO CONSIDERANDO LA VARIAZIONE δS_{EM}. SE QUINDI