$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(F_{\alpha\beta})$ è QUADRATICA IN $F_{\alpha\beta}$, CON LA VARIAZIONE, TALE ESPRESSIONE SCENDE DI UNA UNITA' IL SUO GRADO E COSÌ OTTENIAMO EQUAZIONI LINEARI IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$ (O LINEARI IN $F_{\alpha\beta}$).

ESSENDO
$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(\operatorname{tr} F^2, \operatorname{tr} F^4)$$
SE CONSIDERIAMO UNO SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE, IN GENERALE AVREMO:

$$\mathcal{L}_{EM} = a \operatorname{tr} F^2 + b(\operatorname{tr} F^2)^2 + c \operatorname{tr} F^4 + \cdots\cdots$$

PER AVERE SOLO UNA LAGRANGIANA QUADRATICA IN $\vec{E}$, ED $\vec{H}$ DOVREMO CONSIDERARE

$$\mathcal{L}_{EM} = a \operatorname{tr} F^2 = a F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha} = -a F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

TRASCURANDO I TERMINI DI ORDINE SUPERIORE.

NEL SISTEMA C.G.S TROVEREMO COSÌ L'ESPRESSIONE

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

DA CUI

$$S_{EM} = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \, d\Omega$$

QUINDI L'AZIONE TOTALE

$$S = S_0 + S_{INT} + S_{EM}$$

PER CALCOLARE LA II^a COPPIA DI EQUAZIONI DI MAXWELL CONSIDERIAMO IL MOTO DELLE CARICHE "ASSEGNATO", CIOE' FISSIAMO LE CORRENTI, E CONSIDERIAMO UNA VARIAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

IN QUESTO MODO AVREMO

$$\delta S_{\text{TOT}} \quad \text{ED} \quad \delta S' = \delta S_{\text{INT}} + \delta S'_{\text{EM}}.$$

$$S_{\text{INT}} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} J_\alpha A_\alpha \, d\Omega$$

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \, d\Omega$$

CONSIDERIAMO QUINDI LA LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \left\{ J_\alpha A_\alpha - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right\} = \frac{1}{c} \hat{\mathcal{L}}$$

DOVE $\hat{\mathcal{L}} = J_\alpha A_\alpha - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \Leftarrow$ "DENSITA' DI LAGRANGIANA"

IL NOME DI "DENSITA' DI LAGRANGIANA" E' MOTIVATO DAL FATTO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{L}} \, d\Omega = \frac{1}{\cancel{c}} \int \hat{\mathcal{L}} \, \cancel{c} \, dt \, dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_V \tilde{\mathcal{L}} \, dv}_{L} =$$

DA CUI DEFINIAMO $L = \int_V \mathcal{L} \, dv$ E SCRIVIAMO

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$ NEL MODO "CLASSICO" DOVE

L NON E' UN INVARIANTE DI LORENTZ, MENTRE $L\,dt$ E' TALE.

DA CUI ESSENDO $L = \int \bar{\mathcal{L}} \, dv$ $\hat{\mathcal{L}}$ E' DETTA "DENSITA' DI LAGRANGIANA"

UTILIZZIAMO A QUESTO PUNTO LE "EQUAZIONI DI LAGRANGE" DATE DALLA RELAZIONE (2) DI PAG. 23 IN TEORIA DEI CAMPI ASSUMENDO CHE IN QUESTO CASO LA FUNZIONE DESCRIVENTE IL CAMPO SIA $\varphi = A_\beta$ DA CUI LE EQUAZIONI SARANNO:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right) = 0$$

ESSENDO $\tilde{\mathcal{L}} = J_\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\beta} = \frac{\partial (J_\mu A_\mu)}{\partial A_\beta} = J_\mu \delta_{\mu\beta} = J_\beta$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{16\pi}\frac{\partial (F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{16\pi}\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}$$

DA CUI AVREMO:

$$\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}$$

$$= 2(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - 2(\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) =$$

$$= 4(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 4 F_{\alpha\beta}$$

DA CUI:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = +\frac{1}{4\pi} F_{\beta\alpha}$$ DA CUI

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}$$

QUINDI AVREMO

$$\boxed{\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} = 4\pi J_\beta}$$

II^a COPPIA DELLE EQUAZ. DI MAXWELL. (LINEARI)

INFATTI PER $\beta = 4$

$$\frac{\partial F_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 4\pi J_4 \Rightarrow \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = i\, 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow i\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] = i\, 4\pi\rho \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho}$$

ANALOGAMENTE PER $\beta = 1, 2, 3$ OTTENEMO

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL IN UN MEZZO

$$\frac{\partial \tilde{F}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 4\pi J_\alpha \qquad \text{CON } \tilde{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} - 4\pi m_{\alpha\beta}$$

$$m_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & iP_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & iP_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & iP_3 \\ -iP_1 & -iP_2 & -iP_3 & 0 \end{pmatrix} ; \quad F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ +iE_1 & +iE_2 & +iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iD_3 \\ iD_1 & iD_2 & iD_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \end{cases} \qquad \text{CON} \begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \end{cases}$$

OPPURE:

$D_i = \varepsilon_{is} E_s$ (ESSENDO $\varepsilon_{is} = \delta_{is} + 4\pi \chi_{is}$ IL TENSORE DI "PERMEABILITA' ELETTRICA" O "TENSORE DIELETTRICO, CON $P_i = \chi_{is} E_s$ DOVE χ_{is} = TENSORE DELLA "SUSCETTIVITA' ELETTRICA DEL MEZZO")

SE IL MEZZO È ISOTROPO $\varepsilon_{is} = \varepsilon(\vec{r})\,\delta_{is} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}$

SE IL MEZZO E' ANCHE OMOGENEO ε = COSTANTE $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

ANALOGAMENTE POSSIAMO SCRIVERE CHE

$B_i = \mu_{is} H_s$ (ESSENDO $\mu_{is} = \delta_{is} + 4\pi M_{is}$ IL TENSORE DI PERMEABILITA' MAGNETICA DEL MEZZO)

PER SOSTANZE DIAMAGNETICHE E PARAMAGNETICHE ISOTROPE

$\mu_{is} = \mu(\vec{r})\,\delta_{is} \Rightarrow \vec{B} = \mu(\vec{r})\,\vec{H}$ SE IL MEZZO E' ANCHE OMOGENEO μ = COSTANTE $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

SE SIAMO NEL VUOTO AVREMO

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

DA CUI NEL SISTEMA DI MISURA SCELTO AVREMO $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$

QUINDI $\vec{D} = \vec{E}$ ED $\vec{B} = \vec{H}$

EQUAZIONI DI MAXWELL NON LINEARI

ABBIAMO VISTO CHE, NEL RISPETTO DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI (CIOE' TRASCURANDO LE INTERAZIONI TRA I FOTONI) LA LAGRANGIANA E' ESPRESSA DA

$$\mathcal{L}^{0}_{EM} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

SE PERO', ASSUMIAMO CHE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEL CAMPO E.M. POSSA ESSERE VIOLATO, SI OTTERRANNO NELLE EQUAZ. DI MAXWELL DEI TERMINI NON LINEARI IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$.

FACENDO INFATTI UNO SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE DELLA

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_{EM}(\mathrm{tr}\,F^2, \mathrm{tr}\,F^4)$$

E FERMANDOCI AI TERMINI DI 4° ORDINE IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$, AVREMO IN FORMA COVARIANTE

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}^{0}_{EM} + \frac{1}{4\pi}\left\{ a \overbrace{(F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha})^2}^{(\mathrm{tr}F^2)^2} + b \overbrace{(F_{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F_{\gamma\sigma} F_{\sigma\alpha})}^{\mathrm{tr}F^4} \right\}$$

I COEFFICENTI a e b POSSONO ESSERE DETERMINATI, TENENDO CONTO CHE I FOTONI POSSO RECIPROCAMENTE INTERAGIRE.

CONSIDERANDO QUINDI LA TEORIA DELLO SCATTERING FOTONE-FOTONE AVREMO

$$a = -\frac{5}{180}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m^4 c} \quad ; \quad b = \frac{14}{180}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m^4 c}$$

DA CUI INDICANDO CON

$$\mathcal{L}^{(1)}_{EM} = \left\{ a (\mathrm{tr}\,F^2)^2 + b\, \mathrm{tr}\,F^4 \right\} \frac{1}{4\pi}$$

SCRIVEREMO ESPLICITAMENTE

$$\mathcal{L}^{(1)}_{EM} = \frac{1}{180}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m^4 c}\left[14 F_{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F_{\gamma\sigma} F_{\sigma\alpha} - 5 (F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha})^2 \right] ;$$

O ANALOGAMENTE DEFINENDO LE DENSITA' DI LAGRANGIANA

$$\tilde{\mathcal{L}}_{EM} = \tilde{\mathcal{L}}^{(0)}_{EM} + \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}_{EM}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)}_{EM} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(1)}_{EM} = \frac{1}{180} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m^4} \left[14 F_{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F_{\gamma\sigma} F_{\sigma\alpha} - 5 \left(F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{4\pi}$$

$$= \frac{2}{45} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m^4} \frac{1}{4\pi} \left[\left(E^2 - H^2\right)^2 + 7 \left(\vec{E} \cdot \vec{H}\right)^2 \right]$$

DA CUI CONSIDERANDO LE "EQUAZ. DI LAGRANGE"

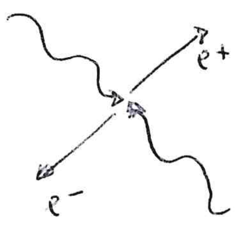
$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{TOT}}{\partial A_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{TOT}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \right) = 0$$

DOVE $\tilde{\mathcal{L}}_{TOT} = J_\mu A_\mu + \tilde{\mathcal{L}}^{(0)}_{EM} + \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}_{EM}$

RICAVEREMO LA II^a COPPIA DI EQUAZ. DI MAXWELL → (VEDI APPENDICE N° 1)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \end{cases}$$

DOVE IN QUESTO CASO $\vec{P}$ ED $\vec{M}$ SONO CHIAMATI "VETTORI DI POLARIZZAZIONE ELETTRICA E POLARIZZAZIONE MAGNETICA" DEL VUOTO. IN QUANTO UNA COPPIA DI FOTONI INTERAGENTI PRODURRA' UNA COPPIA DI ELETTRONO-POSITRONE. IN QUESTO SENSO IL VUOTO VIENE "POLARIZZATO" DAL CAMPO ELETTROMAGNETICO.



OSSERVIAMO CHE $\hat{\mathcal{L}}_{TOT}$ CONTIENE TERMINI DI 4° ORDINE IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$ QUINDI CONSIDERANDO CHE LE EQUAZ. DI LAGRANGE CI FARANNO SCENDERE DI GRADO, NELLE EQUAZ. DI MAXWELL DOVRANNO COMPARIRE TERMINI DI TERZO ORDINE IN $\vec{E}$ ED $\vec{H}$. POSSIAMO COSÌ SCRIVERE CHE:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \qquad\qquad B_i = \mu_{ik} H_k$$

ESSENDO:

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{1}{45}\frac{e^4}{4\pi^2}\frac{1}{m_e^4}\left\{2(E^2-H^2)\delta_{ik} + 7 H_i H_k\right\}$$

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \frac{1}{45}\frac{e^4}{4\pi^2}\frac{1}{m_e^4}\left\{2(E^2-H^2)\delta_{ik} - 7 E_i E_k\right\}$$

VEDIAMO QUINDI CHE LE EQUAZIONI DI MAXWELL NON LINEARI DESCRIVONO I FENOMENI DI INTERAZIONI TRA I FOTONI, CON LA CONSEGUENTE PRODUZIONE DI COPPIE DI PARTICELLE.
QUESTO PORTA ALLA VIOLAZIONE DEL "PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE" E LE COPPIE DI PARTICELLE CHE HANNO UNA MAGGIORE PROBABILITA' DI ESSERE OTTENUTE SON QUELLE "PIU' LEGGERE", CIOE' COPPIE DI ELETTRONE-POSITRONE.
SPERIMENTALMENTE CAMPI ELETTRICI COSÌ INTENSI, TALE DA PORTARE ALLA PRODUZIONE DI COPPIE POSSONO ESSERE OTTENUTI IN PROSSIMITA' DELLA FRONTIERA DI UN NUCLEO ATOMICO CARATTERIZZATO DA UN ELEVATO NUMERO DI PROTONI.
AD ESEMPIO SULLA FRONTIERA DI UN NUCLEO DI URANIO IL CAMPO VALE $\frac{eZ}{R^2} \simeq 10^{19} \frac{Volt}{cm}$ ($Z = 92$ ED IL RAGGIO DEL NUCLEO $R \approx 10^{-12} m$).
TUTTAVIA QUESTO CAMPO NON RIESCE ANCORA A GENERARE

COPPIE. IL CAMPO DEVE ESSERE ALQUANTO AUMENTATO, E DA CALCOLI QUANTITATIVI, LE COPPIE POSSONO ESSERE PRODOTTE DA NUCLEI CON $Z \geq Z_c = 170$.

QUESTI NUCLEI SI POSSO OTTENERE, DA PROCESSI COLLISIONALI, SONO PERO' INSTABILI E CARATTERIZZATI DA UNA VITA MEDIA BREVE. SONO STATI PRODOTTI SPERIMENTALMENTE TRAMITE LA COLLISIONE TRA DUE NUCLEI CON

$$Z_1 + Z_2 > Z_c$$

E DURANTE LA LORO FORMAZIONE, SONO STATE OSSERVATE LE PRODUZIONI DI COPPIE $e^+ - e^-$ DOVUTE ALLA INTERAZIONE DEI FOTONI ASSOCIATI ALL'INTENSO CAMPO ELETTRICO CHE SI OTTIENE IN PROSSIMITA' DEL NUCLEO.

NOTIAMO INFINE CHE IL VUOTO PUO' ESSERE POLARIZZATO ANCHE DA UN FORTE CAMPO MAGNETICO DELL'ORDINE DI

$$B \geq 10^{13} - 10^{14}\ Oe$$

QUINDI PER CAMPI $B \geq 10^{13} - 10^{14}$ Oe IL VUOTO SI COMPORTA COME UN MEZZO ANISOTROPO NON LINEARE CHE INCIDE FORTEMENTE SULLA DISTRIBUZIONE DELLE ONDE E.M. (CIOE' SULLE TRAIETTORIE DEI FOTONI). QUESTI EFFETTI SONO STATI OSSERVATI IN PROSSIMITA' DELLA SUPERFICIE DELLE PULSAR DOVE IL CAMPO PUO' ASSUMERE VALORI DI $B \simeq 10^{13}$ Oe.

BIBLIOGRAFIA:

1) LANDAU - LIFSHITZ "MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA" PAG. 647
2) QUANTUM ELECTRODYNAMICS "AKHIEZER - BERESTETSKII" PAG. 771-7[illegible]
3) J. SCHWINGER PHYS. REV. 82, 664 (1951).
4) GINZBURG. "QUESTIONI DI FISICA ED ASTROFISICA" PAG. 63
5) JACKSON "ELETTRODINAMICA CLASSICA" PAG. 11