TRASFORMAZIONI CANONICHE

CONSIDERIAMO UN HAMILTONIANA CHE SIA UNA COSTANTE DEL MOTO

$$H = H(q^\alpha, p_\alpha)$$

E SUPPONIAMO CHE TUTTE LE COORDINATE q^α SIANO CICLICHE

DA CUI $\quad \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = c_\alpha$ = COSTANTI

IN QUESTO CASO POTREMO SCRIVERE

$$H = H(c_\alpha) \quad \text{DA CUI} \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} = \omega_\alpha = \text{COSTANTI}$$

ESSENDO $\quad \omega_\alpha = \omega_\alpha(c_\beta)$ = COSTANTI $\quad$ POSSIAMO SUBITO INTEGRARE

OTTENENDO

$$q^\alpha = \omega_\alpha t + \beta_\alpha$$

DOVE β_α SONO OTTENUTE FISSANDO LE CONDIZIONI INIZIALI

OVVIAMENTE IL PRESENTE PROBLEMA È DI IMMEDIATA SOLUZIONE.

OSSERVIAMO CHE SE IN UNA DATA RAPPRESENTAZIONE DI "COORDINATE" ED "MOMENTI" CINETICI LA HAMILTONIANA NON PRESENTA COORDINATE CICLICHE, POSSIAMO SEMPRE PENSARE DI PASSARE AD UN NUOVO SISTEMA DI COORDINATE IN CUI SI HANNO VARIABILI CICLICHE:

ESEMPIO: "MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN PIANO, SOGGETTA A FORZE CENTRALI"

COORDINATE CARTESIANE (x, y) $\qquad$ COORDINATE POLARI (ρ, φ)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

IL DETERMINANTE JACOBIANO

$$\det(J) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

IN QUALSIASI PUNTO TRANNE CHE NELL'ORIGINE $(0,0)$ (SI HA UNA

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA [illegible] TRANNE CHE NELLA ORIGINE

DOVE LE COORDINATE POLARI SONO INDEFINITE $(\rho=0,\ \varphi\ \forall)$.

$$H=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V(r) \qquad \mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(r)$$

IN COORDINATE POLARI

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)-V(\rho) \Rightarrow \begin{cases} p_\rho=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho} \\ p_\varphi=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=m\rho^2\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}=\frac{1}{m}p_\rho \qquad \dot{\varphi}=\frac{1}{m}\frac{1}{\rho^2}p_\varphi$$

$$H(\rho,\varphi,p_\rho,p_\varphi)=\frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}+\frac{p_\rho^2}{m}-\frac{1}{2m}\left[p_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2\right]+V(\rho)$$

$$=\frac{p_\rho^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}+V(\rho)$$

QUINDI LA COORDINATA φ E' CICLICA PERCHÈ $H(\rho,p_\rho,p_\varphi)$

NOTA: IL NUMERO DI COORDINATE CICLICHE RIPORTA ALLA SCELTA OPPORTUNA DEL NUOVO SISTEMA DI COORDINATE.

UN ESEMPIO DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE LO ABBIAMO GIÀ VISTO MEDIANTE LE TRASFORMAZIONI DELLE SOLE COORDINATE (E NON DEI MOMENTI CINETICI) QUESTE TRASFORMAZIONI SI CHIAMANO "PUNTUALI".

$$q^\alpha \to Q^\alpha \qquad \text{DA CUI} \qquad Q^\alpha=Q^\alpha(q^\beta,t)$$

OVVIAMENTE PERCHÈ TALE TRASF. SIA INVERTIBILE ASSUMIAMO CHE

$$\det\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}\right)\neq 0. \qquad \Rightarrow \text{VEDI RETRO}$$

IN GENERALE CONSIDERIAMO UNA TRASFORMAZIONE CHE COINVOLGA LE 2N COORDINATE NELLO SPAZIO DELLE FASI PASSANDO QUINDI DA

$$(q^\alpha,p_\alpha)\to(Q^\alpha,P_\alpha)$$

COME ESEMPIO DI POSSIBILE TRASFORMAZIONI DA FARE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI E CONSEGUENTEMENTE NELLO SPAZIO DELLE FASI, CONSIDERIAMO UNA GENERICA TRASFORMAZIONE "PUNTUALE" DI COORDINATE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI E CONSEGUENTEMENTE LA CORRISPONDENTE TRASFORMAZIONE NELLO SPAZIO DELLE FASI.

"TRASFORMAZIONI PUNTUALI"

SIA DATA LA "TRASFORMAZIONE PUNTUALE", NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI,

$$\{q^\alpha\} \to \{Q^\alpha\} \quad \text{DOVE CHIAMIAMO } Q^\beta = q^{\beta'}$$

LA PIÙ GENERALE TRASFORMAZIONE SARÀ TALE CHE

$$\boxed{q^\alpha = q^\alpha(q^{\beta'}, t)} \quad \text{E VICEVERSA} \quad \boxed{q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(q^\beta, t)}$$

OSSERVIAMO IN GENERALE CHE: $\det\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}}\right) \neq 0$

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}}\dot q^{\beta'} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \quad \text{DA CUI PONENDO} \quad A^\alpha_{\beta'} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}}$$

$$\dot q^\alpha = A^\alpha_{\beta'}\dot q^{\beta'} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \quad \text{VICEVERSA} \quad \dot q^{\alpha'} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^\beta}\dot q^\beta + \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t}$$

DA CUI DEFINENDO $A^{\alpha'}_\beta = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^\beta}$ AVREMO

$$\boxed{(1)\begin{cases} \dot q^\alpha = A^\alpha_{\beta'}\dot q^{\beta'} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \\ \dot q^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\beta \dot q^\beta + \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t}\end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} A^\alpha_{\beta'}\dot q^{\beta'} = \dot q^\alpha - \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \\ A^{\alpha'}_\beta \dot q^\beta = \dot q^{\alpha'} - \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t}\end{cases}$$

OVVIAMENTE PER LA INVERTIBILITÀ $\det\left(\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}}\right) = \det\left(A^{\alpha}_{\ \beta'}\right) \neq 0$

DA CUI $\exists$ L'INVERSA

$$\left(A^{\alpha}_{\ \beta'}\right)^{-1} = A^{\beta'}_{\ \alpha} = \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial q^{\alpha}}$$

DA CUI $\underbrace{A^{\gamma'}_{\ \alpha} A^{\alpha}_{\ \beta'}}_{\delta^{\gamma'}_{\ \beta'}} \dot{q}^{\beta'} = A^{\gamma'}_{\ \alpha} \dot{q}^{\alpha} - A^{\gamma'}_{\ \alpha} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial t}$

AVREMO $\dot{q}^{\gamma'} = A^{\gamma'}_{\ \alpha} \dot{q}^{\alpha} - A^{\gamma'}_{\ \alpha} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial t}$

ED ANALOGAMENTE $\underbrace{A^{\gamma}_{\ \alpha'} A^{\alpha'}_{\ \beta}}_{\delta^{\gamma}_{\ \beta}} \dot{q}^{\beta} = A^{\gamma}_{\ \alpha'} \dot{q}^{\alpha'} - A^{\gamma}_{\ \alpha'} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t}$

AVREMO COSÌ: LE NUOVE RELAZIONI:

$$\boxed{(2) \begin{cases} \dot{q}^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \beta} \dot{q}^{\beta} - A^{\alpha'}_{\ \beta} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial t} = A^{\alpha'}_{\ \beta}\left(\dot{q}^{\beta} - \frac{\partial q^{\beta}}{\partial t}\right) \\ \dot{q}^{\alpha} = A^{\alpha}_{\ \beta'} \dot{q}^{\beta'} - A^{\alpha}_{\ \beta'} \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t} = A^{\alpha}_{\ \beta'}\left(\dot{q}^{\beta'} - \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t}\right) \end{cases}}$$

DA CUI CONFRONTANDO LE (1) E LE (2)

RICAVEREMO:

$$\boxed{(3) \begin{cases} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t} = -A^{\alpha'}_{\ \beta} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial t} \\ \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial t} = -A^{\alpha}_{\ \beta'} \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t} \end{cases}}$$

OSSERVIAMO INFINE CHE:

$$\frac{\partial \dot{q}^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta'}} = A^{\alpha}_{\ \beta'} = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}} \qquad \text{E VICEVERSA} \qquad \frac{\partial \dot{q}^{\alpha'}}{\partial \dot{q}^{\beta}} = A^{\alpha'}_{\ \beta} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\beta}}$$

AVREMO QUINDI LE RELAZIONI:

$$\begin{cases} \dot q^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta'}\, \dot q^{\beta'} + \dfrac{\partial q^{\alpha}}{\partial t} \\[2ex] \dot q^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta}\, \dot q^{\beta} + \dfrac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial q^{\alpha'}}{\partial t} = - A^{\alpha'}_{\beta}\, \dfrac{\partial q^{\beta}}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial q^{\alpha}}{\partial t} = - A^{\alpha}_{\beta'}\, \dfrac{\partial q^{\beta'}}{\partial t} \end{cases}$$

ESSENDO

$$\begin{cases} A^{\alpha}_{\beta'} = \dfrac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\beta'}} = \dfrac{\partial \dot q^{\alpha}}{\partial \dot q^{\beta'}} \\[2ex] A^{\alpha'}_{\beta} = \dfrac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\beta}} = \dfrac{\partial \dot q^{\alpha'}}{\partial \dot q^{\beta}} \end{cases}$$

E LA SUA INVERSA

VEDIAMO COME SI TRASFORMANO I MOMENTI CINETICI

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha'}} = \frac{\partial L(q^{\beta}, \dot q^{\beta}, t)}{\partial \dot q^{\beta}} \frac{\partial \dot q^{\beta}}{\partial \dot q^{\alpha'}} = A^{\beta}_{\alpha'} \frac{\partial L}{\partial \dot q^{\beta}}$$

DA CUI:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha'}} = A^{\beta}_{\alpha'} \frac{\partial L}{\partial \dot q^{\beta}} \qquad \text{E DA} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha}} = A^{\beta'}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot q^{\beta'}}$$

ESSENDO L'INDICE LIBERO DELLA MATRICE DI TRASFORMAZIONE IN BASSO SI TRASFORMERANNO COME COMPONENTI COVARIANTI DI UN VETTORE, CIOÈ

$$\boxed{(4)\begin{cases} p_{\alpha} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha}} = A_{\alpha}^{\beta'}\, p_{\beta'} \\[2ex] p_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\beta}\, p_{\beta} \end{cases}}$$

OSSERVIAMO CHE LA LAGRANGIANA SARÀ NUMERICAMENTE INVARIATA MA DIPENDERÀ DA VARIABILI DIVERSE:

$$L(q^{\alpha}, \dot q^{\alpha}, t) = L\left[q^{\alpha}(q^{\beta'}, t),\ A^{\alpha}_{\beta'}\left(\dot q^{\beta'} - \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t} \right), t \right]$$

Cioè avremo:

$$\mathcal{L}[q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t] = \tilde{\mathcal{L}}[q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}, t]$$

da cui
$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}}(q^{\alpha'}, \dot{q}^{\alpha'}, t)\, dt = \tilde{S}$$

Se quindi arriviamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \iff \delta S = 0 \Rightarrow \delta \tilde{S} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^{\alpha'}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q^{\alpha'}} = 0$$

Cioè le equazioni di Lagrange rimangono invariate in forma. Se passiamo allo spazio delle fasi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \iff \begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \text{con } H = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^{\alpha'}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q^{\alpha'}} = 0 \iff \begin{cases} \dot{q}^{\alpha'} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\alpha'}} \\ \dot{p}_{\alpha'} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial q^{\alpha'}} \end{cases} \quad \text{con } \tilde{H} = \dot{q}^{\alpha'} p_{\alpha'} - \tilde{\mathcal{L}}$$

Cioè una generale trasformazione puntuale nello spazio delle configurazioni che lascia invariato in forma le equazioni di Lagrange

induce nello spazio delle fasi una trasformazione canonica $(q^\alpha, p_\alpha) \to (q^{\alpha'}, p_{\alpha'})$

che lascia invariato in forma le equazioni di Hamilton cioè

$$(5)\begin{cases}\dot q^{\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\[2ex] \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha}\end{cases} \qquad \exists\ \hat H : \begin{cases}\dot q^{\alpha'} = \dfrac{\partial \hat H}{\partial p_{\alpha'}}\\[2ex] \dot p_{\alpha'} = -\dfrac{\partial \hat H}{\partial q^{\alpha'}}\end{cases}$$

DOVE, DOVENDO VALERE LE TRASF. DI LEGENDRE, AVREMO

$$(6)\begin{cases} H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \dot q^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)\\[1ex] \hat H(q^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t) = \dot q^{\alpha'} p_{\alpha'} - \hat{\mathcal{L}}(q^{\alpha'}, \dot q^{\alpha'}, t)\end{cases}$$

SAPPIAMO CHE NUMERICAMENTE $\mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t) = \hat{\mathcal{L}}(q^{\alpha'}, \dot q^{\alpha'}, t)$ (PUR ESSENDO CONSIDERATE FUNZIONI DI VARIABILI DIVERSE)

CI CHIEDIAMO SE VALE LO STESSO PER LE HAMILTONIANE:

$$\hat H = \dot q^{\alpha'} p_{\alpha'} - \hat{\mathcal{L}}(q^{\alpha'}, \dot q^{\alpha'}, t) = \dot q^{\alpha'} p_{\alpha'} - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)$$

CALCOLIAMO LA QUANTITA' $\dot q^{\alpha'} p_{\alpha'}$, UTILIZZANDO LE $(2)_1$ e $(4)_2$

$$\dot q^{\alpha'} p_{\alpha'} = \underbrace{A^{\alpha'}{}_{\beta}\left(\dot q^\beta - \frac{\partial q^\beta}{\partial t}\right) A_{\alpha'}{}^{\gamma}}_{\delta_\beta{}^\gamma} p_\gamma = \delta_\beta{}^\gamma\left(\dot q^\beta - \frac{\partial q^\beta}{\partial t}\right) p_\gamma$$

$$= \dot q^\beta p_\beta - \frac{\partial q^\beta}{\partial t} p_\beta$$

DA CUI

$$\hat H(q^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t) = \underbrace{\left[\dot q^\beta p_\beta - \mathcal{L}\right]}_{H(q^\alpha, p_\alpha, t)} - \frac{\partial q^\beta}{\partial t} p_\beta$$

cioè

$$\boxed{\hat H(q^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) - p_k \frac{\partial q^k}{\partial t}} \quad (7)$$

OSSERVIAMO CHE PER LE $(4)_1$ E $(3)_2$

$$p_\mu \frac{\partial q^\mu}{\partial t} = A_\mu{}^{\beta'} p_{\beta'} \left(- A^\mu{}_{\gamma'} \frac{\partial q^{\gamma'}}{\partial t} \right) = - \delta^{\beta'}{}_{\gamma'} p_{\beta'} \frac{\partial q^{\gamma'}}{\partial t}$$

$$= - p_{\beta'} \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t}$$

AVREMO QUINDI SIMMETRICAMENTE CHE

$$\boxed{H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \tilde{H}(q^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t) - p_{\beta'} \frac{\partial q^{\beta'}}{\partial t}} \quad (8)$$

QUINDI SOLTANTO NEL CASO PARTICOLARE DI UNA TRASFORMAZIONE INDIPENDENTE DAL TEMPO, CIOÈ SE

$$q^\alpha = q^\alpha(q^{\beta'}) \quad \text{E VICEVERSA} \quad q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(q^\beta)$$

AVREMO CHE LE DUE HAMILTONIANE COINCIDERANNO NUMERICAMENTE

$$\boxed{H = \tilde{H}}$$

E IN QUESTO CASO LA TRASFORMAZIONE SARÀ "COMPLETAMENTE CANONICA".

NOTA: SE UTILIZZIAMO COME SIMBOLOGIA (COME VIENE FATTO IN ALCUNI TESTI) $q^{\beta'} = Q^\beta$ LE RELAZIONI PRECEDENTI SI SCRIVERANNO: $q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta, t)$ E VICEVERSA $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, t)$

$$(1) \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \left(\dot{q}^\beta - \dfrac{\partial q^\beta}{\partial t} \right) \\ \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} \left(\dot{Q}^\beta - \dfrac{\partial Q^\beta}{\partial t} \right) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial t} = - \left(\dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \right) \dfrac{\partial q^\beta}{\partial t} \\ \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial t} = - \left(\dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} \right) \dfrac{\partial Q^\beta}{\partial t} \end{cases}$$

$$(3) \ \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{Q}^\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} \quad \text{E VICEVERSA} \quad (4) \ \frac{\partial \dot{Q}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \quad \text{con } \det\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\right) \neq 0$$

(5)
$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha} P_\beta \\ P_\alpha = \dfrac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} p_\beta \end{cases}$$

inoltre si prova che

(6) $$\dot{Q}^\alpha P_\alpha = \dot{q}^k p_k - p_k \frac{\partial q^k}{\partial t}$$

dove: $$p_k \frac{\partial q^k}{\partial t} = - P_k \frac{\partial Q^k}{\partial t} \quad (7)$$

da cui per ragioni di simmetria

(8) $$\dot{q}^k p_k = \dot{Q}^k P_k - P_k \frac{\partial Q^k}{\partial t}$$

infine avremo la trasformazione canonica:

$$(9) \begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \exists\ \tilde{H} = K : \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} (10)$$

dove la connessione tra le due hamiltoniane sarà data da:

$$\begin{cases} K(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) - p_k \dfrac{\partial q^k}{\partial t} \\ H(q^\alpha, p_\alpha, t) = K(Q^\alpha, P_\alpha, t) - P_k \dfrac{\partial Q^k}{\partial t} \end{cases} \quad (11)$$

vista la relazione (7) in alcuni testi si scrive

$$\begin{cases} K(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) + P_k \dfrac{\partial Q^k}{\partial t} \\ H(q^\alpha, p_\alpha, t) = K(Q^\alpha, P_\alpha, t) + p_k \dfrac{\partial q^k}{\partial t} \end{cases} \quad (11\ \text{bis})$$

—o—

(FINE NOTA)

IN GENERALE CONSIDERIAMO LA TRASFORMAZIONE $(q^\alpha, p_\alpha) \in A$ TRA $(Q^\alpha, P_\alpha) \in f(A)$

$$f : A \to f(A)$$

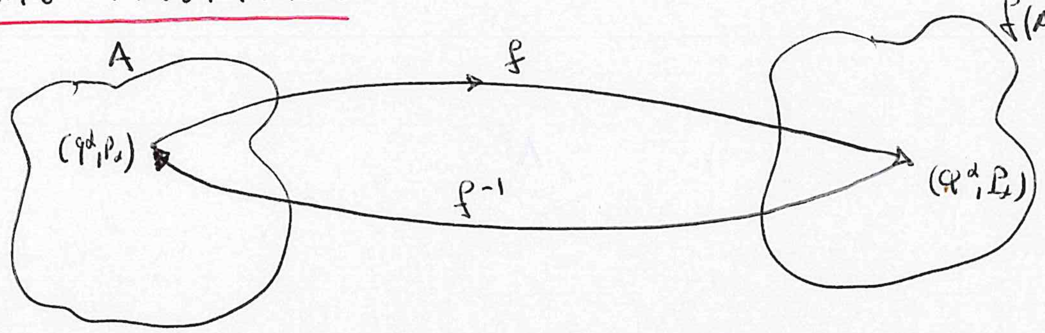
SE f È UNA APPLICAZIONE BIUNIVOCA (CIOÈ PER OGNI PUNTO $P \equiv (q^\alpha, p_\alpha) \in A$ $\exists$ UN SOLO PUNTO $\tilde{P} \equiv (Q^\alpha, P_\alpha) \in f(A)$) ALLORA

$\exists$ UNA TRASFORMAZIONE INVERSA $f^{-1} : f(A) \to A$

TALE CHE $\forall \tilde{P} \equiv (Q^\alpha, P_\alpha) \in f(A)$ $\exists$ IN CORRISPONDENZA UN SOLO PUNTO

$$P \equiv (q^\alpha, p_\alpha) \in A \quad : \quad f^{-1}(Q^\alpha, P_\alpha) = (q^\alpha, p_\alpha) \in A .$$

SE CIÒ ACCADE $\boxed{\forall\ \tilde{P} \in f(A)}$ ALLORA LA TRASFORMAZIONE SI DICE "GLOBALMENTE INVERTIBILE"



L'APPLICAZIONE f SI DICE REGOLARE (ESSENDO $f : A \to f(A)$)

SE 1) f È DI CLASSE C^1, 2) f È GLOBALMENTE INVERTIBILE,

3) f NON HA PUNTI CRITICI IN $\forall P_0$ CHE $\left| \dfrac{\partial (Q^\alpha, P_\alpha)}{\partial (q^\beta, p_\beta)} (P_0) \right| \neq 0$

SE f NON È GLOBALMENTE INVERTIBILE, MA $\forall P \in f(A)$ $\exists$ SEMPRE UN INTORNO $I(P) \in f(A)$ IN CUI LA f È GLOBALMENTE INVERTIBILE

ALLORA LA f SI DICE "LOCALMENTE INVERTIBILE" IN $I(P)$.

TRASFORMAZIONI CANONICHE

DEFINIAMO UNA CLASSE PARTICOLARE DI TRASFORMAZIONI

$$(q^\alpha, p_\alpha) \leftrightarrow (Q^\alpha, P_\alpha) \qquad \text{PER CUI}$$

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha (Q^\beta, P_\beta, t) \\ p_\alpha = p_\alpha (Q^\beta, P_\beta, t) \end{cases} \iff \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha (q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha (q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$$

PERCIÒ SE LE (q^α, p_α) SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI HAMILTON

$$(1) \qquad \dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \qquad \text{CON } H = H(q^\alpha, p_\alpha, t)$$

$\exists$ UNA NUOVA HAMILTONIANA $K(Q^\alpha, P_\alpha, t)$ PER CUI LE (Q^α, P_α) SARANNO ANCORA SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI HAMILTON PER LA NUOVA HAMILTONIANA K, CIOÈ

$$(2) \qquad \dot Q^\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \qquad \dot P_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha}$$

(CIOÈ LE EQUAZIONI DI HAMILTON RIMANGONO INVARIATE IN FORMA RISPETTO ALLA NUOVA HAMILTONIANA $K(Q^\alpha, P_\alpha, t)$).

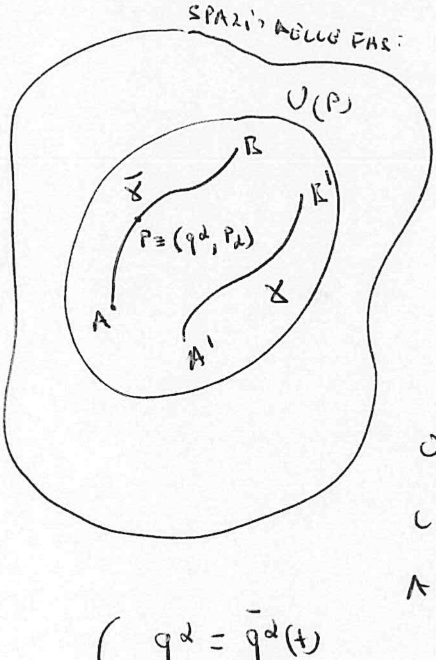
1) QUESTA TRASFORMAZIONE SI DICE "CANONICA"

2) NEL CASO IN CUI DOVESSE ACCADERE CHE

$$(3) \qquad \boxed{H(q^\alpha, p_\alpha, t) = K(Q^\alpha, P_\alpha, t)}$$

ALLORA LA TRASFORMAZIONE SI DICE "COMPLETAMENTE CANONICA"

CONSIDERIAMO ADESSO UNA CURVA $\bar\gamma$ NELLO SPAZIO DELLE FASI



OGNI PUNTO $P \in \bar\gamma$ POTRÀ ESSERE RAPPRESENTATO TRAMITE IL SISTEMA DI COORDINATE (q^α, p_α) OPPURE PER MEZZO DEL NUOVO SISTEMA DI COORDINATE (Q^α, P_α).

OSSERVIAMO CHE QUANDO CONSIDERIAMO LA DEFORMAZIONE γ DELLA CURVA $\bar\gamma$ AVREMO NEL 1° SISTEMA DI COORDINATE

$$\bar\gamma \Rightarrow \begin{cases} q^\alpha = \bar q^\alpha(t) \qquad t_0 \le t \le t_1 \\ p_\alpha = \bar p_\alpha(t) \\ A \equiv \{\bar q^\alpha(t_0), \bar p_\alpha(t_0)\} \\ B \equiv \{\bar q^\alpha(t_1), \bar p_\alpha(t_1)\} \end{cases} \qquad \text{ED} \quad \gamma \Rightarrow \begin{cases} q^\alpha = \bar q^\alpha(t) + \lambda \eta^\alpha(t) \\ p_\alpha = \bar p_\alpha(t) + \lambda \bar\pi_\alpha(t) \\ t_0 + \lambda \delta t_0 \le t \le t_1 + \lambda \delta t_1 \\ A' \equiv \{\bar q^\alpha(t_0 + \lambda\delta t_0) + \lambda \eta^\alpha(t_0 + \lambda\delta t_0) ; \bar p_\alpha(t_0 + \lambda\delta t_0) + \lambda \bar\pi_\alpha(t_0 + \lambda\delta t_0)\} \\ B' \equiv \{\bar q^\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1) + \lambda \eta^\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1) ; \bar p_\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1) + \lambda \bar\pi_\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1)\} \end{cases}$$

INOLTRE LO SPOSTAMENTO INFINITESIMO TRA GLI ESTREMI DELLA CURA (A, A') E (B, B') SARÀ DATO DA DUE VETTORI DI COMPONENTI

$$\left(\delta q^\alpha(t_0), \delta p_\alpha(t_0)\right) \quad ; \quad \left(\delta q^\alpha(t_1), \delta p_\alpha(t_1)\right) \qquad \text{DOVE.}$$

$$\left(\delta q^\alpha(t_0), \delta p_\alpha(t_0)\right) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(A'-A)}{\lambda} \quad ; \quad \left(\delta q^\alpha(t_1), \delta p_\alpha(t_1)\right) = \lim \frac{(B'-B)}{\lambda}$$

ESSENDO QUINDI

$$\delta q^\alpha(t_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left\{\bar q^\alpha(t_0+\lambda\delta t_0) + \lambda\eta^\alpha(t_0+\lambda\delta t_0) - \bar q^\alpha(t_0)\right\}$$

$$\delta p_\alpha(t_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left\{\bar p_\alpha(t_0+\lambda\delta t_0) + \lambda\pi_\alpha(t_0+\lambda\delta t_0) - \bar p_\alpha(t_0)\right\}$$

DA CUI:
$$\begin{cases} \delta q^\alpha(t_0) = \dot{\bar q}^\alpha(t_0)\,\delta t_0 + \eta^\alpha(t_0) \\ \delta p_\alpha(t_0) = \dot{\bar p}_\alpha(t_0)\,\delta t_0 + \pi_\alpha(t_0) \end{cases}$$

E COSÌ VIA PER
$$\begin{cases} \delta q^\alpha(t_1) = \dot{\bar q}^\alpha(t_1)\,\delta t_1 + \eta^\alpha(t_1) \\ \delta p_\alpha(t_1) = \dot{\bar p}_\alpha(t_1)\,\delta t_1 + \pi_\alpha(t_1) \end{cases}$$

ANALOGAMENTE SE CONSIDERIAMO LE DUE CURVE $\bar\gamma$ E γ COME VISTE TRAMITE **LE** NUOVE COORDINATE POTREMO CALCOLARE

$$\delta Q^\alpha(t_0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\underbrace{\left\{ Q^\alpha\left[\bar q^\beta(t_0+\lambda\delta t_0) + \lambda\eta^\beta(t_0+\lambda\delta t_0); \bar p_\beta(t_0+\lambda\delta t_0) + \lambda\pi_\beta(t_0+\lambda\delta t_0), t_0+\lambda\delta t_0\right] - Q^\alpha\left[\bar q^\beta(t_0); \bar p_\beta(t_0), t_0\right]\right\}}_{G(\lambda)}$$

PERCHÉ $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ SE QUINDI SVILUPPIAMO LA $G(\lambda)$ IN λ

$$G(\lambda) = \left\{ \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\lambda=0} \overbrace{\left(\dot{\bar q}^\beta\delta t_0 + \eta^\beta(t_0)\right)}^{\delta q^\beta(t_0)} + \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\lambda=0} \overbrace{\left(\dot{\bar p}_\beta(t_0)\,\delta t_0 + \pi_\beta(t_0)\right)}^{\delta p_\beta(t_0)} + \right.$$

$$\left. + \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial t}\right|_{\lambda=0} \cdot \delta t_0 \right\}\lambda + o(\lambda^2)$$

DA CUI DIVIDENDO PER λ E FACENDO IL LIMITE PER $\lambda\to 0$

$$\delta Q^\alpha(t_0) = \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\bar{\gamma}} \delta q^\beta(t_0) + \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\bar{\gamma}} \delta p_\beta(t_0) + \left.\frac{\partial Q^\alpha}{\partial t}\right|_{\bar{\gamma}} \delta t_0$$

ANALOGAMENTE CALCOLANDO.

$$\delta P_\alpha(t_0) = \left.\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\bar{\gamma}} \delta q^\beta(t_0) + \left.\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\bar{\gamma}} \delta p_\beta(t_0) + \left.\frac{\partial P_\alpha}{\partial t}\right|_{\bar{\gamma}} \delta t_0$$

QUINDI SE CONSIDERO VARIAZIONI A ESTREMI FISSI ~~[illegible]~~ $(\delta q^\beta(t_0) = \delta q^\beta(t_1) = 0 \quad \delta p_\beta(t_0) = \delta p_\beta(t_1) = 0)$ E SINCRONE $(\delta t_0 = \delta t_1 = 0)$ NELLE VARIABILI (q^α, p_α) ESSE SARANNO **SINCRONE E A** ESTREMI FISSI NELLE NUOVE VARIABILI

$$\delta Q^\alpha(t_0) = \delta Q^\alpha(t_1) = \delta P_\alpha(t_0) = \delta P_\alpha(t_1) = 0$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE SE LA TRASFORMAZIONE E' CANONICA ALLORA VARRA' UN PRINCIPIO DI HAMILTON NELLE VECCHIE E NUOVE VARIABILI CIOE':

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \iff (\delta S)_{\bar{\gamma}} = 0 \quad \text{DOVE } S = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^\alpha p_\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha, t)]\, dt$$

ANALOGAMENTE

$$\begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} \iff (\delta \tilde{S})_{\bar{\gamma}} = 0 \quad \text{DOVE } \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{Q}^\alpha P_\alpha - K(Q^\alpha, P_\alpha, t)]\, dt$$

DIRE CHE IN ENTRAMBI I CASI $(\delta S)_{\bar{\gamma}} = 0$ ed $(\delta \tilde{S})_{\bar{\gamma}} = 0$ NON VUOL DIRE CHE LE FUNZIONI INTEGRANDE **IN** S E IN $\tilde{S}$ SONO COINCIDENTI, MA SEMPLICEMENTE CHE POSSONO DIFFERIRE PER LA DERIVATA TOTALE DI UNA FUNZIONE ARBITRARIA $F(q^\alpha, p_\alpha, Q^\alpha, \ldots$

cioè

$$\dot{q}^\alpha p_\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K(Q^\alpha, P_\alpha, t) + \frac{dF}{dt}$$

DOVE IN GENERALE

$$F = F\underbrace{(q^\alpha, p_\alpha, Q^\alpha, P_\alpha, t)}_{4n \text{ VARIABILI}} \qquad \text{(FUNZIONE GENERATRICE}$$

RICORDIAMO PERÒ CHE DOVRANNO VALERE LE 2n RELAZIONI

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \\ p_\alpha = p_\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \end{cases} \quad \text{O VICEVERSA} \quad \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$$

QUINDI LA FUNZIONE GENERATRICE F DOVRÀ DI FATTO DIPENDERE SOLTANTO DA 2n VARIABILI, CIOÈ AD ESEMPIO DOVRÀ ESSERE DEL TIPO

	n VECCHIE VARIABILI	n NUOVE VARIABILI
$F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$	q^α	Q^α
$F_2 = F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)$	q^α	P_α
$F_3 = F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t)$	p_α	Q^α
$F_4 = F_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$	p_α	P_α

OPPURE PIÙ IN GENERALE

$$F = F(\underbrace{q^i, p_s}_{n}, \underbrace{Q^\ell, P_m}_{n}) \qquad \{q^i, p_s\} \quad \begin{cases} i = 1, \dots s \\ s = s+1, \dots n \end{cases} \qquad \{Q^\ell, P_m\} \quad \begin{matrix} \ell = 1, \dots r \\ m = r+1, \dots n \end{matrix}$$

SI PROVA CHE LE 4 FUNZIONI GENERATRICI SONO LEGATE TRA LORO TRAMITE DELLE TRASFORMATE DI LEGENDRE.

Consideriamo una traiettoria $\{q^\alpha(t), p_\alpha(t)\}$ **50A**

che, se soddisfa le equazioni di Hamilton con la Hamiltoniana $H(q^\alpha, p_\alpha, t)$, rende stazionario il funzionale di Hamilton S

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \iff \delta S = 0 \quad \text{con} \quad S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot q^\alpha p_\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha, t) \right] dt$$

Se adesso analizziamo la trasf. $(q^\alpha, p_\alpha) \leftrightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$

essendo $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ ed $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$

e consideriamo la traiettoria trasformata $\{Q^\alpha(t), P_\alpha(t)\}$

supponendo che soddisfi le nuove equazioni di Hamilton con $K(Q^\alpha, P_\alpha, t)$ come nuova Hamiltoniana

$$\begin{cases} \dot Q^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} \iff \delta \tilde S = 0 \quad \text{con} \quad \tilde S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot Q^\alpha P_\alpha - K(Q^\alpha, P_\alpha, t) \right] dt$$

Se ricordiamo che $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)\, dt$

ed $\tilde S = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}}(Q^\alpha, \dot Q^\alpha, t)\, dt$

Osserviamo che

1) S è definito, nello spazio delle configurazioni $\mathcal{H}$ formato da tutte quelle traiettorie γ con le condizioni agli estremi $q^\alpha(t_0) = q^\alpha_0$ ed $q^\alpha(t_1) = q^\alpha_{(1)}$

2) $\tilde S$ è definito, nello spazio delle configurazioni $\tilde{\mathcal{H}}$ costituito da tutte le traiettorie che agli estremi soddisfano le condizioni

$Q^\alpha(t_0) = Q^\alpha_{(0)}$; $Q^\alpha(t_1) = Q^\alpha_{(1)}$

3) SE QUINDI GLI ESTREMI $q^{\alpha}_{(0)}, q^{\alpha}_{(1)}, Q^{\alpha}_{(0)}, Q^{\alpha}_{(1)}$ SONO FISSATI PER TUTTE LE TRAIETTORIE, ALLORA QUANDO CONSIDERIAMO NELLO SPAZIO DELLE FASI LA TRASFORMAZIONE

$$(q^{\alpha}, p_{\alpha}) \to (Q^{\alpha}, P_{\alpha})$$

QUESTA TRASFORMAZIONE DOVRÀ ESSERE EFFETTUATA IN 2 STEP

$\boxed{\text{NEL 1° STEP}}$ AVREMO NECESSARIAMENTE LA TRASF. PARZIALE (1)

~~PARZIALMENTE NELLA FORMA~~

$$(1)\quad \begin{cases} p_{\alpha} = p_{\alpha}(q^{\beta}, Q^{\beta}, t) \\ P_{\alpha} = P_{\alpha}(q^{\beta}, Q^{\beta}, t) \end{cases}$$

IN QUANTO TALE TRASFORMAZIONE È L'UNICA CHE POTRÀ FISSARE (NOTI GLI ESTREMI $\{q^{\alpha}_{(0)}, q^{\alpha}_{(1)}, Q^{\alpha}_{(0)}, Q^{\alpha}_{(1)}\}$ FISSATI) ANCHE I CORRISPONDENTI MOMENTI

$$\{p_{\alpha}^{(0)}, p_{\alpha}^{(1)}, P_{\alpha}^{(0)}, P_{\alpha}^{(1)}\}$$

$\boxed{\text{NEL 2° STEP}}$ -
PER PASSARE ALLA TRASFORMAZIONE FINALE RISOLVIAMO LA $(1)_1$ RISPETTO ALLE $Q^{\alpha} = Q^{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t)$ POI INSERIAMO LE Q^{α} NELLE $(1)_2$ E OTTENIAMO $P_{\alpha} = P_{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t)$

CON QUESTI DUE STEP AVREMO I PASSAGGI

$$(q^{\alpha}, p_{\alpha}) \to \begin{cases} p_{\alpha} = p_{\alpha}(q^{\beta}, Q^{\beta}, t) \\ P_{\alpha} = P_{\alpha}(q^{\beta}, Q^{\beta}, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^{\alpha} = Q^{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t) \\ P_{\alpha} = P_{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t) \end{cases}$$

NOTE LE CONDIZIONI ESTREME $\{q^{\alpha}_{(0)}, q^{\alpha}_{(1)}, Q^{\alpha}_{(0)}, Q^{\alpha}_{(1)}\}$

CHE FISSA UNIVOCAMENTE ANCHE $\{p_{\alpha}^{(0)}, p_{\alpha}^{(1)}, P_{\alpha}^{(0)}, P_{\alpha}^{(1)}\}$

4) Se quindi analizziamo il funzionale "differenza" $\boxed{500}$

$\tilde{S} - S$ esso è definito nel "prodotto diretto" dei due spazi delle configurazioni dove le traiettorie $\{ q^\alpha(t), Q^\alpha(t) \}$ hanno estremi fissati per $t = t_0$ e $t = t_1$.

- Se invece guardiamo il funzionale $\tilde{S} - S$ nello spazio delle fasi, allora $\tilde{S} - S$ è "definito nello spazio delle traiettorie" in cui estremi nello spazio delle fasi sono fissati" come conseguenza del vincolo imposto dalla trasformazione di coordinate".
In questo spazio più ristretto (rispetto a tutto lo spazio delle fasi) la traiettoria fisica risulta stazionaria rispetto alle traiettorie variate e in questo spazio avremo che $\delta(\tilde{S} - S) = 0$.

NOTA: che dovranno essere necessariamente fissate 4n condizioni (ad esempio le $q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)}$) quando si considera la variazione, si giunge anche pensando che quando si considera la traiettoria fisica nello spazio delle fasi fissiamo le 4n condizioni $\underbrace{\{ q^\alpha_{(0)}, p_\alpha^{(0)} \}}_{2n}$ e $\underbrace{\{ q^\alpha_{(1)}, p_\alpha^{(1)} \}}_{2n}$ il che fissa in modo univoco le corrispondenti condizioni estremali $\underbrace{\{ Q^\alpha_{(0)}, P_\alpha^{(0)} \}}_{2n}$ e $\underbrace{\{ Q^\alpha_{(1)}, P_\alpha^{(1)} \}}_{2n}$.

5) Dovendo quindi considerare la transizione intermedia

$$p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)$$

$$P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)$$

questo ci conduce ad assumere che la funzione integranda del funzionale $\tilde{S} - S$ possa essere

ESPRESSA NELLA FORMA:

$$\left\{ p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, \dot q^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, \dot Q^\alpha + \right.$$

$$\left. + K\left[Q^\alpha, P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t), t\right] - H\left[q^\alpha, p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\right]\right\} dt$$

O ANALOGAMENTE CHE IL FUNZIONALE DIFFERENZA

$$\tilde S - S$$

POSSA ESSERE ESPRESSO TRAMITE L'INTEGRAZIONE DELLA FORMA DIFFERENZIALE

$$\omega(q^\beta, Q^\beta, t) = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dq^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha$$
$$+ [K - H]\, dt$$

CIOE'

$$\tilde S - S = \int_{t_0}^{t} \omega(q^\beta, Q^\beta, t)$$

6) INFINE OSSERVIAMO CHE ESSENDO $\tilde S - S$ UN FUNZIONALE (DEFINITO NEL PRODOTTO DI DUE SPAZI DELLE CONFIGURAZIONI DOVE LE TRAIETTORIE $\{q^\alpha(t), Q^\alpha(t)\}$ HANNO ESTREMI FISSATI PER $t = t_0$ e $t = t_1$) CHE HA UNA VARIAZIONE NULLA

$$\delta(\tilde S - S) = 0$$

ALLORA IN GENERALE TALE FUNZIONALE E' UNA FUNZIONE SOLO DEGLI ESTREMI (CIOE' NON DIPENDERA' DALLA TRAIETTORIA CONSIDERATA, MA SOLO DAGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE)

$$\tilde S - S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_1\left[q^\alpha(t), Q^\alpha(t), t\right] dt =$$

$$= F_1\left(q^\alpha_{(t_1)}, Q^\alpha_{(t_1)}, t_1\right) - F_1\left(q^\alpha_{(t_0)}, Q^\alpha_{(t_0)}, t_0\right)$$

CIOE' E' UN INTEGRALE DI LINEA DI UNA FORMA DIFFERENZIALE

DEFINITA SUL PRODOTTO DIRETTO DEI DUE SPAZI DELLE CONFIGURAZIONI.

IL FATTO CHE TALE INTEGRALE DI LINEA DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE MA NON DALLA TRAIETTORIA SEGUITA (CIOE' SU UNA TRAIETTORIA CHIUSA L'INTEGRALE E' NULLO) SIGNIFICA ASSUMERE CHE

" $\hat{S} - S$ E' L'INTEGRALE DI LINEA DI UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

$$p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dq^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha + [K - H]\, dt = dF(q^\beta, Q^\beta, t)$$

TEOREMA: C.N.S AFFINCHE' UNA TRASFORMAZIONE

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$$

SIA CANONICA, E' CHE LA FORMA DIFFERENZIALE

$$p_\alpha\, dq^\alpha - P_\alpha\, dQ^\alpha + (K - H)\, dt = dF(q^\alpha, Q^\alpha, t) \quad (*)$$

SIA ESATTA.

(O ANALOGAMENTE

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha - H = P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K + \frac{dF(q^\beta, Q^\beta, t)}{dt}$$

NOTA:
RICORDANDO CHE $q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta, P_\beta, t)$ $\quad Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$

IN QUALCHE TESTO (VEDI STRUMIA) LA (*) VIENE SCRITTA NELLA FORMA:

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha - H = P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K + \frac{dF(q^\beta, p_\beta, Q^\beta, P_\beta, t)}{dt}$$

MA SOLTANTO $2n+1$ SONO LE VARIABILI INDIPENDENTI
n VECCHIE VARIABILI E n NUOVE VARIABILI NEL CASO (*)

n VECCHIE VARIABILI SONO $\{q^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ E n NUOVE VARIABILI SONO $\{Q^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$

C. NECESSARIA:

Hp: $(q^\alpha, p_\alpha) \longleftrightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$ SIA UNA TRASF. CANONICA

Ts: LA FORMA DIFFERENZIALE

$$p_\alpha dq^\alpha - P_\alpha dQ^\alpha + (K-H)dt = dF(q^\beta, Q^\beta, t)$$

E' ESATTA.

DIM: SE LA TRASF. E' CANONICA

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \iff \delta S = 0 \quad \text{CON} \quad S = \int_{t_0}^{t_1} [p_\alpha \dot q^\alpha - H]\, dt$$

$\exists$ UNA $K(Q^\alpha, P_\alpha, t)$ TALE CHE

$$\begin{cases} \dot Q^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} \iff \delta \hat S = 0 \quad \text{CON} \quad \hat S = \int_{t_0}^{t_1} [P_\alpha \dot Q^\alpha - K]\, dt$$

DA CUI NECESSARIAMENTE INTRODUCENDO IL NUOVO FUNZIONALE

$$\hat S - S = \int_{t_0}^{t_1} \{[p_\alpha \dot q^\alpha - H] - (P_\alpha \dot Q^\alpha - K)\}\, dt \Rightarrow \delta(\hat S - S) = 0$$

DOVE IL NUOVO FUNZIONALE $\hat S - S$ E' DEFINITO SUL PRODOTTO DIRETTO DEI DUE SPAZI DELLE CONFIGURAZIONI DOVE LE TRAIETTORIE $\{q^\alpha(t), Q^\alpha(t)\}$ HANNO ESTREMI FISSATI PER $t=t_0$ e $t=t_1$.

SE NELLA TRASFORMAZIONE $(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$ CONSIDERIAMO COME VARIABILI INDIPENDENTI $\{q^\alpha, Q^\alpha\}$ ALLORA LA TRANSIZIONE $(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$ DEVE AVVENIRE

PER MEZZO DELLO STEP INTERMEDIO

(q^α, p_α) $\Rightarrow$ $\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$

NOTE LE CONDIZIONI ESTREMALI $\{ q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)} \}$

CHE FISSA IN MODO UNIVOCO ANCHE LE $\{ p_\alpha^{(0)}, p_\alpha^{(1)}, P_\alpha^{(0)}, P_\alpha^{(1)} \}$

QUESTO CONSENTE DI SCRIVERE:

$$\tilde{S} - S = \int_{t_0}^{t_1} \{ p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dq^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha + [K - H]\, dt \qquad (1)$$

ESSENDO LA TRASF. CANONICA $\delta(\tilde{S} - S) = 0$ CIOÈ L'INTEGRALE DI LINEA (1) NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA, QUINDI ABBIAMO NECESSARIAMENTE DETERMINATO ~~[illegible]~~ O COSTRUITO UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

$$p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dq^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha + (K - H)\, dt = dF(q^\beta, Q^\beta, t)$$

CHE È LA TESI:

VICEVERSA:

Hp: SIA DATA LA FORMA DIFFERENZIALE **ESATTA**.

$$p_\alpha\, dq^\alpha - P_\alpha\, dQ^\alpha + (K - H)\, dt = dF(q^\beta, Q^\beta, t)$$

Th: LA TRASF. $(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$ È CANONICA

DIM: DALLA IPOTESI POSSIAMO SCRIVERE CHE

$$\int_{t_0}^{t_1} [p_\alpha \dot{q}^\alpha - H]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K + \frac{dF}{dt} \right\} dt$$

SE VALGONO QUINDI LE EQUAZIONI DI HAMILTON

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \iff \delta S = 0 \qquad \text{CON } S = \int_{t_0}^{t_1} [p_\alpha \dot{q}^\alpha - H]\, dt$$

DA CUI:

$$\delta S = \underbrace{\delta \int_{t_0}^{t_1} [P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K]\, dt}_{\delta \tilde{S}} + \delta \int_{t_0}^{t_1} dF = 0$$

MA PER VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONE

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dF = \delta F \Big|_{t_0}^{t_1} = \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\Big|_{\lambda=0} \delta q^\alpha + \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}\Big|_{\lambda=0} \delta Q^\alpha + \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{\lambda=0} \delta t \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

NE SEGUE CHE $\delta \tilde{S} = 0$ CON $\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K]\, dt$

DA CUI PER IL "PRINCIPIO DI HAMILTON" AVREMO

$$\begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} \qquad \text{CIOE' LA TRASF. E' CANONICA.}$$

VEDIAMO QUINDI DI ANALIZZARE LE CONDIZIONI CHE SI OTTENGONO QUANDO CONSIDERIAMO LE 4 FUNZIONI GENERATRICI

$$F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)\ ;\ F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)\ ;\ F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t);\ F_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$$

CASO N°1 CERCHIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE $\boxed{F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)}$ $\Rightarrow$ (CIOE' STIAMO CONSIDERANDO COME VARIABILI INDIPENDENTI LE VECCHIE VARIABILI $\{q^\alpha\}$ E LE NUOVE VARIABILI $\{Q^\alpha\}$)

IN QUESTO CASO QUINDI $\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

UTILIZZANDO LA RELAZIONE CHE CI GARANTISCE LA CANONICITA' DELLA TRASFORMAZIONE:

$$\dot{q}^\alpha p_\alpha - H = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K + \overbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)}^{dF_1/dt}$$

AVREMO LA RELAZIONE

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} - p_\alpha\right)\dot{q}^\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha} + P_\alpha\right)\dot{Q}^\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + H - K\right) = 0 \quad \forall q^\alpha, Q^\alpha$$

E QUINDI $\forall \dot{q}^\alpha, \dot{Q}^\alpha$ DA CUI

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha}(q^\beta, Q^\beta, t) & (1) \\ P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha}(q^\beta, Q^\beta, t) & (2) \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

LE PRIME DUE RELAZIONI CI DICONO PROPRIO CHE STIAMO FACENDO UNA TRASFORMAZIONE INTERMEDIA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \Rightarrow \begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \end{cases} \quad (4)$$

PER POI GIUNGERE ALLA TRASF. DEFINITIVA

$$\begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$$

INFATTI PRIMA RISOLVIAMO LA (1) RISPETTO ALLE Q^β DETERMINANDO QUINDI $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ QUESTO SIGNIFICA REALIZZARE LA TRASF. INTERMEDIA

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha \\ p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta} & \frac{\partial p_\alpha}{\partial Q^\beta} \end{pmatrix} \quad \text{con } \det J \neq 0$$

MA IL $\det J \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial Q^\beta}\right) \neq 0$ DA CUI PER LA (1) $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^\alpha \partial Q^\beta}\right) \neq 0$ (*)

SE QUINDI LA CONDIZIONE (*) E' SODDISFATTA QUESTA TRASF. INTERMEDIA E' LECITA. DETERMINANDO QUINDI LE $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ LE INSERIAMO NELLE (2) E' TROVIAMO $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$

RIASSUMENDO QUINDI:

CERCARE UNA FUNZ. GENERATRICE DI TIPO $F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ SIGNIFICA PRENDERE COME VARIABILI INDIPENDENTI $\{q^\alpha\}$ E $\{Q^\alpha\}$ IN QUESTO MODO AVREMO LE CONDIZIONI.

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} \\ P_\alpha = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha} \\ K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

SE QUINDI VALE LA CONDIZIONE

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^\alpha \partial Q^\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{OTTENIAMO LA TRASF. INTERMEDIA} \\ p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \\ \text{CHE POSSIAMO INVERTIRE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

NOTA: STIAMO LAVORANDO NELLO SPAZIO IN CUI E' DEFINITO IL FUNZIONALE $\tilde{S} - S$ (CHE E' UN SOTTOSPAZIO RISTRETTO RISPETTO A TUTTO LO SPAZIO DELLE FASI).
QUESTO E' ~~LO~~ SPAZIO ~~DI~~ TUTTE LE TRAIETTORIE I CUI ESTREMI, NELLO SPAZIO DELLE FASI, SONO FISSATI COME CONSEGUENZA DIRETTA ~~IMPOSTA~~ DEL VINCOLO IMPOSTO DALLA TRASF. DI COORDINATE.

IN QUESTO "SOTTOSPAZIO" LA TRAIETTORIA FISICA E' QUELLA CHE RENDE STAZIONARIO IL FUNZIONALE $\hat{S} - S$ CIOE' TALE CHE $\delta(\hat{S} - S) = 0$

CIOE' NOTE LE CONDIZIONI ESTREMALI $\{q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)}\}$

$\exists$ UNA TRASF. INTERMEDIA $\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$

CHE FISSA IN MODO UNIVOCO ANCHE I VALORI $\{p_\alpha^{(0)}, p_\alpha^{(1)}, P_\alpha^{(0)}, P_\alpha^{(1)}\}$

NOTA: SE $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ ALLORA $K = H$

E LA TRASF. SI DIRA "COMPLETAMENTE CANONICA"

(FINE CASO N° 1)

CASO N° 2 — CERCHIAMO UNA FUNZIONE GENERATRICE DI TIPO

$$F_2 = F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)$$ (CIOÈ CONSIDERIAMO COME VARIABILI INDIPENDENTI $\{q^\alpha\}$ E $\{P_\alpha\}$)

VEDIAMO COME POSSIAMO DETERMINARE LA F_2 PER MEZZO DELLA F_1

CONSIDERIAMO LA RELAZIONE

$$\dot{q}^\alpha p_\alpha - H = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K + \frac{dF_1}{dt}$$

PONIAMO $\quad \dot{Q}^\alpha P_\alpha = \frac{d}{dt}(Q^\alpha P_\alpha) - Q^\alpha \dot{P}_\alpha \quad$ DA CUI

$$\dot{q}^\alpha p_\alpha - H = -Q^\alpha \dot{P}_\alpha - K + \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{F_1 + Q^\alpha P_\alpha}_{F_2}\Big]$$

QUINDI LA FUNZIONE GENERATRICE F_2 È OTTENUTA COME LA TRASF. DI LEGENDRE DELLA F_1

$$F_2(q^\alpha, P_\alpha, t) = Q^\alpha P_\alpha + F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE LA RELAZIONE

$$-\dot{q}^\alpha p_\alpha + H + Q^\alpha \dot{P}_\alpha - K + \overbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial t}\right)}^{dF_2/dt} = 0$$

DA CUI ACCORPANDO I TERMINI

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} - p_\alpha\right)\dot{q}^\alpha + \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} - Q^\alpha\right)\dot{P}_\alpha + \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} - K + H\right) = 0$$

DOVENDO VALERE QUEST'ULTIMI $\forall \dot{q}^\alpha \; \forall \dot{P}_\alpha$ AVREMO

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2(q^\beta, P_\beta, t)}{\partial q^\alpha} & (1) \\[2ex] Q^\alpha = \dfrac{\partial F_2(q^\beta, P_\beta, t)}{\partial P_\alpha} & (2) \\[2ex] K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

LE PRIME DUE RELAZIONI CI DICONO CHE STIAMO FACENDO UNA TRASFORMAZIONE INTERMEDIA

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, P_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, P_\beta, t) \end{cases}$$

PER POI GIUNGERE ALLA TRASF. DEFINITIVA $\Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$

INFATTI PRIMA RISOLVIAMO LE (1) RISPETTO A P_β DETERMINANDO LE $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ QUESTO SIGNIFICA REALIZZARE LA TRASF. INTERMEDIA

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta} & \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta} \end{pmatrix} \quad \text{con } \det J \neq 0$$

PERCHÈ

DA CUI SE $\det J \neq 0 \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\right) \neq 0$ (*)

SE QUINDI È SODDISFATTA LA (*) QUESTA TRASF. INTERMEDIA È LECITA. DETERMINIAMO COSÌ LE $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ LE SOSTITUIAMO NELLA (2) E DETERMINIAMO $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$

RIASSUMENDO AVREMO:

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} \\ Q^\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \\ K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \quad \text{CON LA CONDIZIONE } \det\left(\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{OTTERREMO LA TRASF. INTERMEDIA} \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, P_\beta, t) \\ \text{INVERTIBILE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

(CON $F_2 = Q^\alpha P_\alpha + F_1$)

IN QUESTO CASO ESSENDO q^α E P_α LE VARIABILI INDIPENDENTI AVREMO CHE NOTE LE CONDIZIONI ESTREMALI $\{q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, P_\alpha^{(0)}, P_\alpha^{(1)}\}$

$\exists$ UNA TRASF INTERMEDIA $\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, P_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, P_\beta, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$

CHE FISSA IN MODO UNIVOCO ANCHE I VALORI $\{ p_\alpha^{(0)}, p_\alpha^{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)} \}$

CIOÈ STIAMO LAVORANDO NEL SOTTOSPAZIO RISTRETTO IN CUI È DEFINITO IL FUNZIONALE $\tilde{S} - S$ (DOVE $S = \int [\dot{q}^\alpha p_\alpha - H]\, dt$ ED $\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [-Q^\alpha \dot{P}_\alpha - K]\, dt$). QUESTO SOTTOSPAZIO È DEFINITO DA TUTTE LE TRAIETTORIE I CUI ESTREMI SONO FISSATI COME CONSEGUENZA DEL VINCOLO IMPOSTO DALLA TRASF. DI COORDINATE.

CASO N° 3 | CONSIDERIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE

$$F_3 = F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t) \qquad (\text{VARIABILI INDIPENDENTI } \{p_\alpha\}_{\alpha=1}^n ; \{Q^\alpha\}_{\alpha=1}^n)$$

VEDIAMO COME LA F_3 E' CORRELATA ALLA $F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$

CONSIDERIAMO LA CONDIZIONE CHE CI GARANTISCE LA CANONICITA' DELLA TRASFORMAZIONE

$$\dot{q}^\alpha p_\alpha - H = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K + \frac{dF_1}{dt} \qquad (*)$$

PONIAMO $\dot{q}^\alpha p_\alpha = \frac{d}{dt}(q^\alpha p_\alpha) - q^\alpha \dot{p}_\alpha$ DA CUI AVREMO

$$-q^\alpha \dot{p}_\alpha - H = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K + \frac{d}{dt}\underbrace{(F_1 - q^\alpha p_\alpha)}_{F_3} \qquad (**)$$

QUINDI LA F_3 E' OTTENUTA COME TRASF. DI LEGENDRE DELLA F_1 ESSENDO

$$F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t) = -q^\alpha p_\alpha + F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$$

POSSIAMO QUINDI RISCRIVERE LA (**) NELLA FORMA

$$q^\alpha \dot{p}_\alpha + H + \dot{Q}^\alpha P_\alpha - K + \left\{ \frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial F_3}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha + \frac{\partial F_3}{\partial t} \right] = 0$$

DA CUI ACCORPANDO I TERMINI

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha} + q^\alpha\right)\dot{p}_\alpha + \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q^\alpha} + P_\alpha\right)\dot{Q}^\alpha + \left(\frac{\partial F_3}{\partial t} - K + H\right) = 0 \quad \forall\, \dot{p}_\alpha, \dot{Q}_\alpha$$

DA CUI:

$$\begin{cases} q^\alpha = -\dfrac{\partial F_3(p_\beta, Q^\beta, t)}{\partial p_\alpha} & (1) \\[2ex] P_\alpha = -\dfrac{\partial F_3(p_\beta, Q^\beta, t)}{\partial Q^\alpha} & (2) \\[2ex] K = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

LE PRIME DUE RELAZIONI CI DICONO CHE STIAMO ESEGUENDO UNA TRASFORMAZIONE INTERMEDIA CERCANDO

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \end{cases}$$

PER POI INVERTIRE QUESTE RELAZIONI E GIUNGERE ALLA TRASF. FINALE

$$Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \quad \text{E} \quad P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$$

INFATTI POSSIAMO INVERTIRE LA (1) OTTENENDO LE RELAZIONI $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ QUESTO SIGNIFICA CONSIDERARE LA TRASF. INTERMEDIA

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha \\ q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial p_\beta} & \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} \end{pmatrix} \quad \text{CON } \det J \neq 0$$

MA $\det J \neq 0 \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\right) \neq 0 \xRightarrow{\text{MA PER LA (1)}} \det\left(\dfrac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q^\beta}\right) \neq 0 \quad (\tilde{*})$

SE QUINDI E' SODDISFATTA LA $(\tilde{*})$ QUESTA TRASF. INTERMEDIA E' LECITA. DALLE (1) RICAVIAMO LE $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ CHE SOSTITUITE NELLE (2) CI DARANNO LE RELAZIONI $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$.

RIASSUMENDO AVREMO:

$$\begin{cases} q^\alpha = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_\alpha} \\ P_\alpha = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q^\alpha} \\ K = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \quad \text{CON LA CONDIZIONE } \det\left(\dfrac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q^\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{POSSIAMO INVERTIRE LA TRASF. INTERMEDIA} \\ q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ K = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

$$(\text{CON } F_3 = -q^\alpha p_\alpha + F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t))$$

IN QUESTO CASO ESSENDO p_α E Q^α LE VARIABILI INDIPENDENTI AVREMO CHE:

NOTE LE CONDIZIONI ESTREMALI $\{ p_\alpha^{(0)}, p_\alpha^{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)} \}$ $\exists$ UNA TRASF. INTERMEDIA $\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(p_\beta, Q^\beta, t) \end{cases}$ CHE FISSA IN MODO UNIVOCO ANCHE I VALORI $\{ q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, P_\alpha^{(0)}, P_\alpha^{(1)} \}$ $\Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, \ldots \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, \ldots \end{cases}$

IN QUESTO CASO STIAMO LAVORANDO NEL SOTTOSPAZIO (DELLO SPAZIO DELLE FASI) IN CUI E' DEFINITO IL FUNZIONALE

$$\tilde{S} - S \quad \text{CON} \quad S = \int [-q^\alpha \dot{p}_\alpha - H]\, dt \quad \text{E} \quad \tilde{S} = \int [\dot{Q}^\alpha P_\alpha - K]\, dt$$

QUESTO SOTTOSPAZIO E' DEFINITO DA TUTTE LE TRAIETTORIE I CUI ESTREMI SONO FISSATI COME CONSEGUENZA DEL VINCOLO IMPOSTO DALLA TRASF. DI COORDINATE.

[FINE CASO N°3]

CASO N°4 CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE GENERATRICE DI TIPO

$$F_4 = F_4(p_\alpha, P_\alpha, t) \qquad (\text{VARIABILI INDIPENDENTI } \{p_\alpha\} \text{ e } \{P_\alpha\})$$

CORRELIAMO LA F_4 ALLA FUNZIONE F_1

CONSIDERIAMO LA RELAZIONE CHE CI GARANTISCE LA CANONICITA'

$$\dot q^\alpha p_\alpha - H = \dot Q^\alpha P_\alpha - K + \frac{dF_1}{dt} \qquad (*)$$

PONIAMO
$$\dot q^\alpha p_\alpha = \frac{d}{dt}(q^\alpha p_\alpha) - q^\alpha \dot p_\alpha$$
$$\dot Q^\alpha P_\alpha = \frac{d}{dt}(Q^\alpha P_\alpha) - Q^\alpha \dot P_\alpha$$

DA CUI

$$-q^\alpha \dot p_\alpha - H = -Q^\alpha \dot P_\alpha - K + \frac{d}{dt}\underbrace{\{F_1 + Q^\alpha P_\alpha - q^\alpha p_\alpha\}}_{F_4} \quad (**)$$

CIOE' LA F_4 E' OTTENUTA TRAMITE UNA DOPPIA TRASFORMATA DI LEGENDRE DELLA F_1

$$F_4(p_\alpha, P_\alpha, t) = Q^\alpha P_\alpha - q^\alpha p_\alpha + F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$$

ESPLICITANDO LA $(**)$ NELLA FORMA

$$q^\alpha \dot p_\alpha + H - Q^\alpha \dot P_\alpha - K + \overbrace{\left\{\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha + \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}\dot P_\alpha + \frac{\partial F_4}{\partial t}\right\}}^{dF_4/dt} = 0$$

DA CUI

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha} + q^\alpha\right)\dot p_\alpha + \left(\frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} - Q^\alpha\right)\dot P_\alpha + \left(\frac{\partial F_4}{\partial t} - K + H\right) = 0 \quad \forall \dot p_\alpha, \dot P_\alpha$$

COSI' AVREMO LE TRE RELAZIONI

$$\begin{cases} q^\alpha = -\dfrac{\partial F_4(p_\beta, P_\beta, t)}{\partial p_\alpha} & (1) \\[2ex] Q^\alpha = \dfrac{\partial F_4(p_\beta, P_\beta, t)}{\partial P_\alpha} & (2) \\[2ex] K = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

LE PRIME DUE RELAZIONI ESPRIMONO CHE CONSIDERIAMO UNA TRASF. INTERMEDIA CERCANDO

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \end{cases}$$

PER INVERTIRE QUESTE RELAZIONI OTTENENDO LA TRASF. FINALE

INVERTIAMO LA (1) OTTENENDO $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$ CIOÈ CERCHIAMO LA TRASF. INTERMEDIA

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha \\ q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, P_\beta) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{\partial q^\alpha}{\partial p_\beta} & \frac{\partial q^\alpha}{\partial P_\beta} \end{pmatrix} \quad \text{CON } \det J \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial P_\beta}\right) \neq 0$$

DA CUI UTILIZZANDO LA (1) $\Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0 \quad (\tilde{*})$

QUINDI SE VALE LA $(\tilde{*})$ LA TRASF. INTERMEDIA È LECITA. INFATTI POSSIAMO RISOLVERE LA (1) RISPETTO ALLE P_α OTTENENDO $P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$, INTRODUCENDO QUEST'ULTIMA NELLA (2) OTTENIAMO $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t)$. RIASSUMENDO AVREMO.

$$\begin{cases} q^\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha} \\ Q^\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases} \quad \text{CON LA CONDIZIONI } \det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{POSSIAMO INVERTIRE LA TRASF. INTERMEDIA} \\ q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

(DOVE $F_4 = Q^\alpha P_\alpha - q^\alpha p_\alpha + F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$)

IN QUESTO CASO CONSIDERANDO COME VARIABILI INDIPENDENTI $\{p_\alpha, P_\alpha\}$ AVREMO CHE:

NOTE LE CONDIZIONI ESTREMALI $\{p_\alpha^{(0)}, p_\alpha^{(1)}, P_\alpha^{(0)}, P_\alpha^{(1)}\}$ $\Rightarrow$ ∃ UNA TRASF. INTERMEDIA $\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \\ Q^\alpha = Q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$

CHE FISSA IN MODO UNIVOCO ANCHE I VALORI $\{q^\alpha_{(0)}, q^\alpha_{(1)}, Q^\alpha_{(0)}, Q^\alpha_{(1)}\}$

IN QUESTO CASO STIAMO LAVORANDO NEL SOTTOSPAZIO, IN CUI È DEFINITO IL FUNZIONALE $\tilde{S} - S$ DOVE $\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [-Q^\alpha \dot{P}_\alpha - K]\, dt$ ED $S = \int_{t_0}^{t_1} [-q^\alpha \dot{p}_\alpha - H]\, dt$.

QUESTO SOTTOSPAZIO (DELLO SPAZIO DELLE FASI) È DEFINITO DA TUTTE LE TRAIETTORIE DOVE GLI ESTREMI SONO FISSATI COME CONSEGUENZA DIRETTA DEL VINCOLO IMPOSTO DALLA TRASF. DI COORDINATE.

ESEMPIO N°1 — "TRASFORMAZIONE IDENTICA"

FUNZIONE GENERATRICE DI TIPO $F_2(q^\alpha, P_\alpha)$ CON $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$

$$F_2(q^\alpha, P_\alpha) = q^\alpha P_\alpha$$

DA CUI:

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = P_\alpha \\[2ex] Q^\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q^\alpha \\[2ex] K = H \end{cases} \qquad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) = \det(\delta_{\alpha\beta}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\[2ex] \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$$

ESEMPIO N°2 — "TRASFORMAZIONE PUNTUALE" $Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, t)$

(NOTA: IN QUESTO CASO DAL MOMENTO CHE q^α E Q^α NON SONO INDIPENDENTI NON POSSIAMO UTILIZZARE UNA FUNZ. GENERATRICE DI TIPO $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$)

FUNZIONE GENERATRICE: $F_2(q^\alpha, P_\alpha) = g^k(q^\alpha, t) P_k$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial g^k}{\partial q^\alpha} P_k$$

$$Q^\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = g^\alpha(q^\beta, t)$$

$$K = H + \frac{\partial g^k}{\partial t} P_k$$

QUINDI ESSENDO $g^k(q^\beta, t) = Q^k$

LA $F_2(q^\alpha, P_\alpha) = Q^k(q^\beta, t) P_k$ AVREMO COSÌ:

1) $p_\alpha = \dfrac{\partial Q^k}{\partial q^\alpha} P_k$

2) $K = H + \dfrac{\partial Q^k}{\partial t} P_k$

3) $\det\left(\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) = \det\left(\dfrac{\partial g^\beta}{\partial q^\alpha}\right) = \det\left(\dfrac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha}\right) \neq 0$

CHE SONO GLI STESSI RISULTATI TROVATI A PAG. (258). NOTA: TRASF. IDENTICA È UN CASO PARTICOLARE DI QUELLA "PUNTUALE"

ESEMPIO N°3 — "TRASFORMAZIONI DI SCAMBIO".

FUNZIONE GENERATRICE $F_1(q^\alpha, Q^\alpha) = q^k Q_k = q^k Q^\beta g_{\beta k}$

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \\[2ex] P_\alpha = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha} = -q^k g_{\alpha k} = -q_\alpha \\[2ex] K = H \end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^\alpha \partial Q^\beta}\right) = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\[2ex] \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$$

ESEMPIO 4 "OSCILLATORE ARMONICO 1D"

Sia $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$

Consideriamo la funz. generatrice di tipo $F_1 = F_1(q,Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cotg(Q)$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cotg(Q) \quad (1)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{1}{2} m\omega q^2 \left(-\frac{1}{\sin^2 Q}\right) = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2(Q)} \quad (2)$$

Dalla (2) $\Rightarrow$ $\boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q)}$ (*) sostituendo nella (1)

$\boxed{p = \sqrt{2Pm\omega} \cos(Q)}$ (**)

Da qui calcolando la nuova Hamiltoniana

$$H = \frac{\cancel{2} P \cancel{m}\omega}{\cancel{2}\cancel{m}} \cos^2(Q) + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m}\omega^{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}P}{\cancel{m}\cancel{\omega}} \sin^2(Q) = P\omega = K$$

Osserviamo che la nuova variabile Q è ciclica, inoltre K è costante (l'energia si conserva)

$$P\omega = \text{cost} = E \qquad \left(\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{E}{\omega} = \text{costante} \right)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \Rightarrow \boxed{Q = \omega t + \beta}$$

Quindi avremo le due soluzioni dalle (*) e (**)

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \\ p = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad \text{(moto armonico)}$$

Infine osserviamo che

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = -\frac{m\omega q}{\sin^2 Q} \neq 0$$

ABBIAMO VISTO COME DELLE 4m VARIABILI $\{q^\alpha, p_\alpha, Q^\alpha, P_\alpha\}$ $\alpha = 1..m$

LE FUNZIONI GENERATRICI DEBBANO DIPENDERE SOLO DA 2m VARIABILI CHE DEBBONO INCLUDERE LE VECCHIE E LE NUOVE COORDINATE.

ORA NELL'AMBITO DI UNA TRASFORMAZIONE CANONICA SI SUOLE DARE UN RUOLO DI INDIPENDENZA AD m DELLE VECCHIE COORDINATE CANONICHE (CIOE' m DELLE 2m VARIABILI $\{q^\alpha, p_\alpha\}$) ED A m DELLE NUOVE COORDINATE CANONICHE (CIOE' m DELLE 2m NUOVE VARIABILI $\{Q^\alpha, P_\alpha\}$).

LE PRECEDENTI FUNZIONI GENERATRICI SONO QUINDI DEI CASI PARTICOLARI IN QUANTO CON:

1) $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ ABBIAMO COME m VECCHIE COORDINATE LE q^α
" " m NUOVE " " LE Q^α

2) $F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)$ ABBIAMO COME m VECCHIE COORDINATE LE q^α
" " m NUOVE " " LE P_α

3) $F_3(Q^\alpha, p_\alpha, t)$ ABBIAMO COME m VECCHIE COORDINATE LE p_α
" " m NUOVE " " LE Q^α

4) $F_4(P_\alpha, p_\alpha, t)$ ABBIAMO COME m VECCHIE COORDINATE LE p_α
" " m NUOVE " " LE P_α

<u>IN GENERALE</u> SI POTRANNO AVERE SITUAZIONI MISTE DOVE COME m VECCHIE COORDINATE SI AVRANNO ALCUNE q^α ED ALCUNE p_α
COME m NUOVE COORDINATE SI AVRANNO ALCUNE Q^α E ALCUNE P_α

ALLORA CONSIDERANDO VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONE IL PRINCIPIO DI HAMILTON NELLE:

<u>NUOVE COORDINATE SI POTRA' FORMULARE</u> COME:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{e=1}^{s} \dot{Q}^e P_e - \sum_{m=s+1}^{n} Q^m \dot{P}_m - K \right) dt = 0 \qquad 0 \le s \le n$$

QUESTO PERCHÉ

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \dot Q^{\alpha} P_{\alpha} = \sum_{e=1}^{r} \dot Q^{e} P_{e} + \underbrace{\sum_{m=r+1}^{n} \dot Q^{m} P_{m}}_{\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=r+1}^{n} Q^{m} P_{m}\right) - \sum_{m=r+1}^{n} Q^{m} \dot P_{m}}$$

DA CUI INTEGRANDO E FACENDO LA VARIAZIONE

$$(1)\quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{e=1}^{r} \dot Q^{e} P_{e} - \sum_{m=r+1}^{n} Q^{m} \dot P_{m} - K \right) dt + \underbrace{\delta \left(\sum_{m=r+1}^{n} Q^{m} P_{m} \right)}_{=0} = 0$$

(PERCHÉ SIAMO AD ESTREMI FISSI $\delta Q^{m} = \delta P_{m} = 0$ A $t = t_0$

ANALOGAMENTE IL PRINCIPIO DI HAMILTON NELLE VECCHIE COORDINATE SI POTRÀ SCRIVERE COME

$$(2)\quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{s} \dot q^{i} p_{i} - \sum_{j=s+1}^{n} q^{j} \dot p_{j} - H \right) dt = 0 \qquad 0 \le s \le n$$

NOTA 1°) IN QUESTO MODO NELLA (1) STIAMO PRECISANDO A QUALI DELLE n NUOVE COORDINATE CANONICHE STIAMO DANDO IL "RUOLO DI INDIPENDENTI", ESSE SONO QUELLE COORDINATE CHE NELLA (1) FIGURANO ATTRAVERSO LE LORO DERIVATE TEMPORALI, CIOÈ

$\{Q^{e}\}$ $e = 1, \dots r$ ED $\{P_{m}\}$ $m = r+1, \dots n$.

ANALOGAMENTE CON LA (2) STIAMO PRECISANDO CHE IL RUOLO DELLE n VECCHIE COORDINATE CANONICHE INDIPENDENTI È RICOPERTO DALLE $\{q^{i}\}$ $i = 1, \dots s$ E LE $\{p_{j}\}$ CON $j = s+1, \dots n$.

NOTA 2: È CHIARO CHE QUANDO $s = n$ ED $r = n$ AVREMO IL CASO IL CASO 1) CON LA FUNZ. GENERATRICE $F_1(q^{\alpha}, Q^{\alpha}, t)$.

QUANDO $s = n$ ED $r = 0$ $\Rightarrow \{q^{\alpha}, P_{\alpha}\}$ $\Rightarrow$ FUN. GEN. $F_2(q^{\alpha}, P_{\alpha}, t)$

QUANDO $s = 0$ ED $r = n$ $\Rightarrow \{Q^{\alpha}, p_{\alpha}\}$ $\Rightarrow$ FUN. GEN. $F_3(Q^{\alpha}, p_{\alpha}, t)$

QUANDO $s = 0$ ED $r = 0$ $\Rightarrow \{P^{\alpha}, p_{\alpha}\}$ $\Rightarrow$ FUN. GEN. $F_4(P_{\alpha}, p_{\alpha}, t)$

ALLORA IL MODO PIÙ GENERALE DI FORMULARE I DUE PRINCIPI DI HAMILTON SARÀ QUINDI

$$(3)\quad \delta\int_{t_1}^{t_2} c\left\{\sum_{i=1}^{s}\dot q^i p_i-\sum_{j=s+1}^{n} q^j\dot p_j - H\right\}dt=0$$ CON c NUMERO REALE RELATIVO DIVERSO DA ZERO

$$(4)\quad \delta\int_{t_1}^{t_2} \tilde c\left\{\sum_{e=1}^{z}\dot Q^e P_e-\sum_{m=z+1}^{n} Q^m\dot P_m - K\right\}dt=0$$ CON $\tilde c$ NUMERO REALE RELATIVO DIVERSO DA ZERO.

OVVIAMENTE IL VERIFICARSI SIMULTANEO DELLE (3) E (4) NON SIGNIFICA CHE LE DUE FUNZIONI INTEGRANDE SIANO UGUALI, MA ESSE POTRANNO DIVERSIFICARSI PER LA DERIVATA TOTALE DI UNA FUNZIONE GENERATRICE

$$F=F(q^i,p_j,Q^e,P_m)\qquad \begin{cases} i=1,\dots s\\ j=s+1,\dots n\\ e=1,\dots z\\ m=z+1,\dots n.\end{cases}$$

AVREMO QUINDI: C.N.S AFFINCHÉ LA TRASF. $(q^\alpha,p_\alpha)\to(Q^\alpha,P_\alpha)$ SIA CANONICA È CHE VALGA LA RELAZIONE. (VEDI PAG. 66 - 70)

$$c\left[\sum_{i=1}^{s}\dot q^i p_i-\sum_{j=s+1}^{n} q^j\dot p_j - H\right]=\tilde c\left[\sum_{e=1}^{z}\dot Q^e P_e-\sum_{m=z+1}^{n} Q^m\dot P_m - K\right]+\frac{d}{dt}F(q^i,p_j,Q^e,P_m)$$

DA CUI ESPLICITANDO:

$$\frac{d}{dt}F=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial F}{\partial q^i}\dot q^i+\sum_{j=s+1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}\dot p_j+\sum_{e=1}^{z}\frac{\partial F}{\partial Q^e}\dot Q^e+\sum_{m=z+1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_m}\dot P_m+\frac{\partial F}{\partial t}$$

QUINDI

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}-c\,p_i\right)\dot q^i+\sum_{j=s+1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}+c\,q^j\right)\dot p_j+\sum_{e=1}^{z}\left(\frac{\partial F}{\partial Q^e}+\tilde c P_e\right)\dot Q^e$$
$$+\sum_{m=z+1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial P_m}-\tilde c Q^m\right)\dot P_m+\left(cH-\tilde c K+\frac{\partial F}{\partial t}\right)=0\qquad \forall q^i,p_j,Q^e,P_m$$

DA CUI:

$$
\begin{cases}
c\, p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q^i}(q^i, p_s, Q^e, P_m) \\[2mm]
c\, q^s = -\dfrac{\partial F}{\partial p_s}(\ldots\ \ldots)
\end{cases} \quad (5)
$$

$$
\begin{cases}
\tilde{c}\, P_e = -\dfrac{\partial F}{\partial Q^e}(q^i, p_s, Q^e, P_m) \\[2mm]
\tilde{c}\, Q^m = \dfrac{\partial F}{\partial P_m}(\ldots\ \ldots)
\end{cases} \quad (6)
$$

$$\tilde{c}\, K = c \cdot H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7)$$

~~RICORDANDO CHE~~ $\cancel{\begin{cases} Q^e = Q^e(q^\alpha, p_\alpha, t) \\ P_m = P_m(q^\alpha, p_\alpha, t) \end{cases}}$ ~~ALLORA LA (5) POSSONO ESSERE RISOLTE RISPETTO~~

~~ALLE VARIABILI~~ ALLORA LE (5) POSSONO ESSERE RISOLTE RISPETTO ALLE $\{Q^e, P_m\}$ E SI AVRÀ $\Rightarrow$ $\begin{cases} Q^e = Q^e(q^\alpha, p_\alpha, t) \\ P_m = P_m(q^\alpha, p_\alpha, t) \end{cases}$

SOSTITUENDO QUESTE ULTIME NELLE (6) AVREMO.

$$
\begin{cases}
P_e = P_e(q^\alpha, p_\alpha, t) \\
Q^m = Q^m(q^\alpha, p_\alpha, t)
\end{cases}
$$

OVVIAMENTE INDICANDO CON $\varphi_h \equiv \{q^i, p_s\}$ E $\psi_k \equiv \{Q^e, P_m\}$ CON $h = 1, \ldots n$ ed $k = 1, \ldots m$ LE RELAZIONI (5) (6) POTRANNO ESSERE RISOLTE SE E SOLO SE

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_h \partial \psi_k}\right) \neq 0$$ OVVIAMENTE AVREMO.

1) $s = n,\ z = n \Rightarrow \{q^\alpha, Q^\alpha\} \Rightarrow F \Rightarrow F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t) \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q^\alpha \partial Q^\alpha}\right) \neq 0$

2) $s = n,\ z = 0 \Rightarrow \{q^\alpha, P_\alpha\} \Rightarrow F \Rightarrow F_2(q^\alpha, P_\alpha, t) \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \partial P_\alpha}\right) \neq 0$

3) $s = 0,\ z = n \Rightarrow \{Q^\alpha, p_\alpha\} \Rightarrow F \Rightarrow F_3(Q^\alpha, p_\alpha, t) \Rightarrow \det\left(\partial^2 F_3 / \partial Q^\alpha \partial p_\alpha\right) \neq 0$

4) $s = 0,\ z = 0 \Rightarrow \{P_\alpha, p_\alpha\} \Rightarrow F \Rightarrow F_4(P_\alpha, p_\alpha, t) \Rightarrow \det\left(\partial^2 F_4 / \partial P_\alpha \partial p_\alpha\right) \neq 0$

OSSERVIAMO CHE SENZA PERDITA DI GENERALITA' POSSIAMO DEFINIRE COME NUOVA FUNZ. GENERATRICE, LA QUANTITA'

$\boxed{\tilde{F} = F/c}$ E RISCRIVERE LE (5), (6), (7) COME:

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial q^i} \; ; \quad i = 1 \dots s \\[2ex] q^s = -\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial p_s} \; ; \quad s = s+1 \dots n \\[2ex] G\, P_e = -\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial Q^e} \, , \quad e = 1 \dots r \\[2ex] G\, Q^m = \dfrac{\partial F}{\partial P_m} \, , \quad m = r+1, \dots n. \\[2ex] G\, K = H + \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \end{cases}$$

DOVE ABBIAMO POSTO $G = \tilde{c}/c$.

OSSERVIAMO CHE ALCUNI AUTORI PONGONO $G = 1$ E CONSIDERANO SOLO LE FUNZIONI GENERATRICI F_1, F_2, F_3, F_4.

ESEMPIO Sia $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \dfrac{1}{2} m \omega^2 x^2$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE

$$F(\overbrace{x, y, z}^{q^\alpha} ; \underbrace{X}_{Q_x}, P_y\, P_z) = \frac{1}{2} m \omega\, q_x^2 \cot g(Q_x) + q_y P_y + q_z P_z$$

DA CUI:

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial F}{\partial q_x} = m\omega\, q_x \cot g\,(Q_x) \\[2ex] p_y = \dfrac{\partial F}{\partial q_y} = P_y \\[2ex] p_z = \dfrac{\partial F}{\partial q_z} = P_z \end{cases} \qquad \begin{cases} G\, P_x = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_x} = \dfrac{m\omega}{2} q_x^2 \dfrac{1}{\sin^2(Q_x)} \\[2ex] G\, Q_y = \dfrac{\partial F}{\partial P_y} = q_y \\[2ex] G\, Q_z = \dfrac{\partial F}{\partial P_z} = q_z \end{cases}$$

PONIAMO PER SEMPLICITA' $G = 1$

$$K = H$$

$$(1)\begin{cases} p_x = m\omega\, q_x \cot(Q_x) \\ p_y = P_y \\ p_z = P_z \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} P_x = \frac{m\omega}{2} q_x^2 \frac{1}{\sin^2(Q_x)} \\ Q_y = q_y \\ Q_z = q_z \end{cases}$$

DALLA $(2)_1 \Rightarrow q_x = \sqrt{\frac{2P_x}{m\omega}} \sin(Q_x)$

CHE INSERITA NELLA $(1)_1 \Rightarrow p_x = \sqrt{2m\omega P_x} \cos(Q_x)$

SE ADESSO CALCOLIAMO LA

$$K = H = \left(\frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q_x^2\right) + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} =$$

$$= \omega P_x + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m} = \text{COSTANTE} = E$$

CHE È CICLICA NELLE Q_α

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} = 0 \Rightarrow P_x = \alpha_x \quad P_y = \alpha_y \quad P_z = \alpha_z$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \Rightarrow \dot{Q}_x = \omega \Rightarrow Q_x = \omega t + \beta_x$$

$$\dot{Q}_y = \frac{P_y}{m} = \frac{\alpha_y}{m} \Rightarrow Q_y = \frac{\alpha_y}{m} t + \beta_y$$

$$\dot{Q}_z = \frac{P_z}{m} = \frac{\alpha_z}{m} \Rightarrow Q_z = \frac{\alpha_z}{m} t + \beta_z$$

DA QUI:

$$\begin{cases} q_x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta_x) \\ p_x = \sqrt{2m\omega\alpha_x} \cos(\omega t + \beta_x) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_y = Q_y = \frac{\alpha_y}{m} t + \beta_y \\ p_y = P_y = \alpha_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_z = Q_z = (\alpha_z/m)t + \beta_z \\ p_z = P_z = \alpha_z \end{cases}$$

TEOREMA GENERALE

C.N.S. AFFINCHE' LA TRASF. $(q^\alpha, p_\alpha) \Rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$ SIA CANONICA

E' CHE LA FORMA DIFFERENZIALE

$$c\left\{\sum_{i=1}^{s} p_i\, dq^i - \sum_{j=s+1}^{n} q^j\, dp_j - H\, dt\right\} \qquad (\tilde{*})$$

$$-\bar{c}\left\{\sum_{e=1}^{r} P_e\, dQ^e - \sum_{m=r+1}^{n} Q^m\, dP_m - K\, dt\right\} = dF$$

SIA ESATTA ESSENDO

$$F = F(q^i, p_j, Q^e, P_m, t)$$

DIM. UNA DIMOSTRAZIONE SEMPLICE SI OTTIENE FACENDO VEDERE COME LA F SIA CONNESSA ALLA $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ TRAMITE ~~DELLE~~ TRASFORMAZIONI DI LEGENDRE.

$$F(q^i, p_j, Q^e, P_m, t) = \sum_{m=r+1}^{n} Q^m P_m - \sum_{j=s+1}^{n} q^j p_j + F_1(q^\alpha, P_\alpha, t)$$

OSSERVIAMO COMUNQUE CHE ESSENDO LE VARIABILI INDIPENDENTI

$$\{\underbrace{q^i, p_j}_{n\ \text{vecchie variabili}}\} \quad \{\underbrace{Q^e, P_m}_{n\ \text{nuove variabili}}\}$$

AVREMO CHE

NOTE LE 4n CONDIZIONI ESTREMALI

$$\{q^i_{(0)}, p_j^{(0)}, q^i_{(1)}, p_j^{(1)}, Q^e_{(0)}, P_m^{(0)}, Q^e_{(1)}, P_m^{(1)}\}$$

PER $\begin{cases} i = 1 \ldots s\,;\ j = s+1, \ldots n \\ e = 1 \ldots r\,;\ m = r+1, \ldots n. \end{cases}$

ALLORA ESSENDO UNA TRASF. INTERMEDIA

$$\begin{cases} q^j = q^j(q^i, p_j, Q^e, P_m) \\ p_i = p_i(q^i, p_j, Q^e, P_m) \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} Q^m = Q^m(q^i, p_j, Q^e, P_m) \\ P_e = P_e(q^i, p_j, Q^e, P_m) \end{cases} \qquad (**)$$

CHE FISSA UNIVOCAMENTE LE RESTANTI 4n CONDIZIONI ESTREMALI

$$\{q^j_{(0)}, p_i^{(0)}, q^j_{(1)}, p_i^{(1)}, Q^m_{(0)}, P_e^{(0)}, Q^m_{(1)}, P_e^{(1)}\}$$

DA CUI RISOLVENDO LE (*) RISPETTO ALLE Q^{e} ED P_{m}

OTTENIAMO $\begin{cases} Q^{e} = Q^{e}(q^{\alpha}, p_{\alpha}, t) \\ P_{m} = P_{m}(q^{\alpha}, p_{\alpha}, t) \end{cases}$ CON $\begin{matrix} e = 1, \dots s \\ m = s+1, \dots n \end{matrix}$

SOSTITUENDO QUESTE NELLE (**) OTTERREMO LE RESTANTI VARIABILI

$$\begin{cases} Q^{m} = Q^{m}(q^{\alpha}, p_{\alpha}, t) \\ P_{e} = P_{e}(q^{\alpha}, p_{\alpha}, t) \end{cases} \quad \text{DA CUI} \quad \begin{cases} Q^{\alpha} = Q^{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t) \\ P_{\alpha} = P_{\alpha}(q^{\beta}, p_{\beta}, t) \end{cases}$$

CIOÈ STIAMO LAVORANDO NEL ~~SOTTOSPAZIO~~ SOTTOSPAZIO (DELLO SPAZIO DELLE FASI) IN CUI È DEFINITO IL FUNZIONALE

$\tilde{S} - S$ DOVE: $\displaystyle S = c \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}^{i} - \sum_{j=s+1}^{n} q^{j} \dot{p}_{j} - H \right\} dt$

$$\tilde{S} = \bar{c} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{e=1}^{s} P_e \dot{Q}^{e} - \sum_{m=s+1}^{n} Q^{m} \dot{P}_{m} - K \right\} dt$$

QUESTO È DEFINITO COME LO SPAZIO DELLE TRAIETTORIE I CUI ESTREMI NELLO SPAZIO DELLE FASI SONO FISSATI "COME CONSEGUENZA DEL VINCOLO IMPOSTO DALLE TRASF. DI COORDINATE.

IN QUESTO SOTTOSPAZIO LA TRAIETTORIA FISICA È QUELLA CORRISPONDENTE ALLA STAZIONARIETÀ DEL FUNZIONALE $\tilde{S} - S$ CIOÈ TALE CHE $\delta(\tilde{S} - S) = 0$.

DETTO QUESTO LA DIMOSTRAZIONE RICALCA ESATTAMENTE QUELLA DEL TEOREMA ESPOSTO A PAG. $\boxed{50E}$ ~~RICORDIAMO~~

SE RICORDIAMO CHE

68

SE $S = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^\alpha p_\alpha - H]\,dt$ ED $S' = c\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}^i - \sum_J q^J \dot{p}_J - H \right\} dt$

AVREMO CHE $\delta S = \delta S'$ ~~~~ ~~SOMMATRANDO~~ SE

~~VALGONO LE RELAZIONI~~ PER TRASF. AD ESTREMI FISSI E SINCRONE

ANALOGAMENTE SE CONSIDERIAMO

$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{Q}^\alpha P_\alpha - K]\,dt$ ED $\tilde{S}' = \bar{c}\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{e=0}^{z} P_e \dot{Q}^e - \sum_m Q^m \dot{P}_m - K \right\} dt$

AVREMO CHE $\delta \tilde{S} = \delta \tilde{S}'$ PER TRASF. AD ESTREMI FISSI

E SINCRONE.

CONDIZIONE NECESSARIA:

SE QUINDI LA TRASF. E' CANONICA AVREMO $\delta(\tilde{S} - S) = 0$ DA

CUI $\Rightarrow \delta(\tilde{S}' - S') = 0$ QUINDI LA TESI CHE LA (*)

E' UN DIFF. ESATTO.

CONDIZIONE SUFFICIENTE:

IL VICEVERSA E' BANALE IN QUANTO SE VALE LA (*)

$\Rightarrow \delta \tilde{S}' = \delta S' \Rightarrow \delta S = \delta \tilde{S}$

SE QUINDI ABBIAMO LE EQUAZ. DI HAMILTON $\begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \Rightarrow \delta S = 0$

DA CUI $\delta \tilde{S} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$ CIOE' LA TRASF.

$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$ E' CANONICA.

—o—