"ASSIOMI DELLA DINAMICA"

IN CINEMATICA CI SIAMO PREOCCUPATI DI COME IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE (O DI UN SISTEMA DI PUNTI) POSSA ESSERE DESCRITTO DA DUE DIVERSI OSSERVATORI ("ASSOLUTO", "RELATIVO") SENZA PREOCCUPARCI DI STUDIARE LE CAUSE DEL MOTO.

CON LA DINAMICA CI OCCUPEREMO DELLE "CAUSE" DEL MOTO.

"ASSIOMI DELLA DINAMICA CLASSICA"

1) $\boxed{\text{PRINCIPIO DI INERZIA.}}$

$\exists$ UN OSSERVATORE (CIOE' UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SPAZIALE $\{O, \underline{e}_i\}$ ED UN "TEMPO" PECULIARE) RISPETTO AL QUALE OGNI PUNTO **MATERIALE** "ISOLATO" SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME (CHE COMPRENDE COME CASO ISOLATO LA QUIETE). TALE OSSERVATORE SI DICE "INERZIALE".

ESSENDO UN "POSTULATO" DI ESISTENZA DOVRA' ESSERE VERIFICATO SPERIMENTALMENTE.

AD ESEMPIO: A) UN OSSERVATORE CHE STA SULLA SUPERFICIE TERRESTRE ED UTILIZZA COME RIFERIMENTO GLI "ASSI DI UNA STANZA" ED IL "TEMPO SOLARE" E' PER "TEMPI PICCOLI" (E' CON BUONA APPROSSIMAZIONE) INERZIALE

B) PER INTERVALLI DI TEMPO PIU' LUNGHI, SI PROVA CHE UN OSSERVATORE CHE USA COME RIFERIMENTO SPAZIALE UN RIFERIMENTO CHE HA COME ORIGINE IL SOLE ED ASSI DIRETTI VERSO 3 STELLE ABBASTANZA LONTANE E CHE USA COME TEMPO SOLARE, E' INERZIALE PER INTERVALLI DI TEMPO PICCOLI RISPETTO AL PERIODO DI RIVOLUZIONE DEL SOLE INTORNO AL CENTRO DELLA GALASSIA

CONCLUSIONE: LA DEFINIZIONE DI "RIFERIMENTO INERZIALE" È QUINDI LEGATA AL PROBLEMA CHE SI VUOLE STUDIARE.

SI OSSERVA CHE FISSATO UN "RIFERIMENTO INERZIALE" $\forall$ ALTRO OSSERVATORE CHE SI MUOVE DI MOTO TRASLATORIO UNIFORME RISPETTO A QUESTO È ANCORA UN "RIFERIMENTO INERZIALE" (CIOÈ ANCHE PER LUI VALE LA LEGGE DI INERZIA).

QUESTI OSSERVATORI DEFINISCONO IN MECC. CLASSICA UNA "CLASSE DI OSSERVATORI GALILEANAMENTE EQUIVALENTI" PERCHÉ COME ABBIAMO VISTO IN "CINEMATICA" PER QUESTI "OSSERVATORI"

$$\boxed{\underline{a}_a(P) = \underline{a}_r(P)}$$

NOTA: UNA VOLTA AMMESSO IL "PRINCIPIO DI INERZIA" IL TEMPO È DEFINITO IN MANIERA UNIVOCA

INFATTI SE PER I DUE OSSERVATORI

$$\boxed{\frac{dP}{dt'} = \text{cost}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{dP}{dt} = \text{cost.}}$$

AVREMO CHE

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \text{cost.}} \Rightarrow \boxed{\frac{dt'}{dt} = \alpha}$$

DA CUI

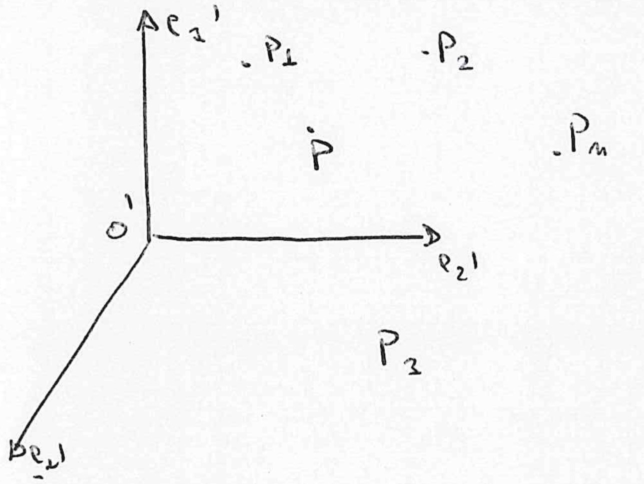
$$\boxed{t' = \alpha t + \beta}$$

CONCLUSIONE: UNA VOLTA CHE ABBIAMO TROVATO UN OSSERVATORE INERZIALE, QUESTO FISSA IN MANIERA UNIVOCA ANCHE IL TEMPO DI QUALSIASI ALTRO OSSERVATORE INERZIALE. (CIOÈ FISSA UNA CLASSE DI "OROLOGI" CHE OGNI ALTRO OSSERVATORE DEVE UTILIZZARE PER ESSERE INERZIALE).

NOTA: ovviamente il concetto di "punto materiale isolato" può essere soggetto a varie critiche ed approssimazioni.

Vogliamo dopo passare dalla dinamica del "punto isolato" alla dinamica del punto "non isolato", introducendo gli **altri assiomi della dinamica classica**.

2) Consideriamo un riferimento inerziale e supponiamo di avere oltre al punto P altri n punti materiali $\{P_1, P_2 \dots P_n\}$



In questo caso il punto P non è più "isolato" quindi non si muove di moto rettilineo uniforme ma avrà una accelerazione $\underline{a} \neq 0$ (solo in presenza degli altri punti)

Assumeremo che:

$$\boxed{\underline{a} = \underline{a}\,(t, P, \dot{P}, P_1, \dots P_n, \dot{P}_1, \dots \dot{P}_n)}$$

Notiamo che "a priori" avremmo potuto assumere che $\underline{a}$ potesse dipendere anche da derivate temporali superiori di ordine superiore al primo. $\Rightarrow$ (leggi fisiche più complicate).

NOTA: vi sono casi in elettromagnetismo in cui $\underline{a}$ dipende anche dalle accelerazioni degli altri punti (quindi questo 2º assioma non è più verificato)

3) SE INDICHIAMO CON $\underline{a}_{0n}$ L'ACCELERAZIONE DI P IN PRESENZA DEL SOLO PUNTO P_n (CIOE' PONIAMO DI ALLONTANARE ALL'INFINITO TUTTI GLI ALTRI PUNTI).

ALLORA IN PRESENZA DI TUTTI GLI ALTRI PUNTI $\{P_1 .. P_m\}$

ASSUMIAMO CHE

$$\boxed{\underline{a}(t) = \sum_{n=1}^{m} \underline{a}_{0n}}$$

NOTA: NESSUNO CI DICE "A PRIORI" CHE LE VARIE ACCELERAZIONI SI SOMMINO IN MODO LINEARE (POTREBBERO SOMMARSI I QUADRATI OPPURE LA SOMMA POTREBBE ESSERE TUTT'ALTRO CHE LINEARE).

IN FISICA NUCLEARE: QUANDO SI CONSIDERANO I NUCLEONI L'ACCELERAZIONE NON E' ESPRESSA DALLA SOMMA DI TUTTE LE ALTRE SEPARATAMENTE.

4) SE CONSIDERO DUE PUNTI MATERIALI P_i E P_J

E SIA $\underline{a}_{iJ}$ ACCELERAZIONE DI P_i DOVUTA A P_J

$\underline{a}_{Ji}$ " " P_J " " P_i

SI VEDE CHE IL RAPPORTO DEI MODULI

$$\boxed{\frac{a_{iJ}}{a_{Ji}} = \text{cost} = \frac{m_J}{m_i}}$$

m_i = "MASSA INERZIALE" DI P_i

m_J = "MASSA INERZIALE" DI P_J

(m "CARATTERISTICA INTRINSECA DI P")

DEF. OPERATIVA DELLA MASSA. CON $m > 0$.

5) SI ASSUME (VERIFICANDOLO SPERIMENTALMENTE) CHE

$$\boxed{m_i \underline{a}_{ij} + m_j \underline{a}_{ji} = 0}$$

ESSENDO $m_i, m_j > 0$ LE DUE ACCELERAZIONI HANNO LA STESSA DIREZIONE MA VERSO OPPOSTO.

"FORZE"

DEF. FORZA AGENTE SUL PUNTO P

$$(1) \qquad \underline{F}(t) = m\,\underline{a}(t) = m \sum_{k=1}^{m} \underline{a}_{0k} \quad \text{(LEGGE DI NEWTON)}$$

OSSERVIAMO CHE (1) NON PUÒ ESSERE SUFFICIENTE A DESCRIVERE IL MOTO, MA CHE LA $\underline{F}$ DEVE ESSERE ESPRESSA INDIPENDENTEMENTE DALLA (1)

ESEMPIO:

i) FORZA GRAVITAZIONALE:

$$\underline{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3}(P_2 - P_1) \qquad \underline{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3}(P_1 - P_2)$$

ii) FORZA ELETTROMAGNETICA TRA DUE CARICHE PUNTIFORMI

$$|F| \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

iii) FORZE VISCOSE

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

QUINDI NOTA LA F UTILIZZIAMO LA (1)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x^i(t)}{dt^2} = \dfrac{1}{m} F_i \\ x^i(t_0) = x^i_{(0)} \\ \dot{x}^i(t_0) = \dot{x}^i_{(0)} \end{cases}$$

⇒ TRAIETTORIA "DETERMINISTICA"
(NON VALE IN MECC. QUANTISTICA CHE È UNA TEORIA "NON LOCALE")

FORZE IN UN RIFERIMENTO "NON INERZIALE"

1) IN UN RIF. INERZIALE

$$\underline{F = m\,\underline{a}_a}$$

"F" NOTA DA UNA SPECIFICA LEGGE FISICA

2) IN UN RIF. NON INERZIALE

$$\underline{\underline{F} = m(\underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c)}$$

NOTA: STIAMO ASSUMENDO CHE LA FORZA "$\underline{F}$" CHE "L'UNIVERSO" ESERCITA SUL PUNTO (O SUL SISTEMA) SIA LA STESSA NEI DUE RIF. "INERZIALE" E "NON INERZIALE". } VIENE ASSUNT COME POSTUL IN MECC CLASSI

DA QUI AVREMO

$$\boxed{m\,\underline{a}_r = F \underbrace{- m\,\underline{a}_\tau - m\,\underline{a}_c}_{\text{FORZE APPARENTI } = \underline{F}_\tau + \underline{F}_c} = \tilde{F}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x^i_r(t)}{dt^2} = \dfrac{1}{m} \tilde{F} \\ x^i_r(t_0) = x^i_{r(0)} \\ \dot{x}^i_r(t_0) = \dot{x}^i_{r(0)} \end{cases}$$

ESEMPIO DELLE "FORZE APPARENTI" SULLA TERRA CHE HA UN MOTO ROTATORIO ATTORNO L'ASSE DI ROTAZIONE

IL MOTO È ROTATORIO UNIFORME QUINDI

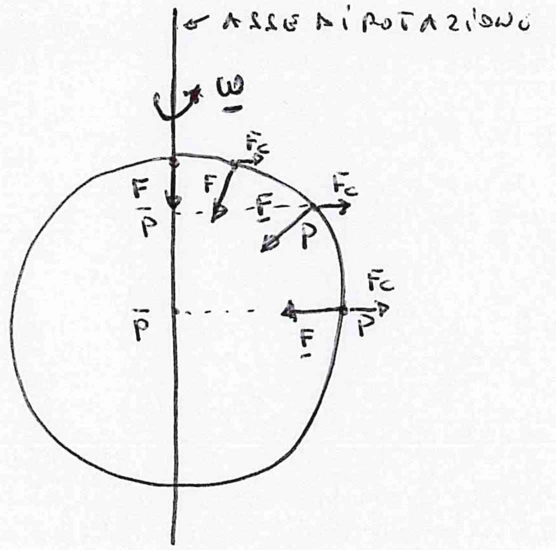
$$\begin{cases} \underline{a}_\tau = \underbrace{\cancel{\dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{e}_\varphi}}_{\substack{\parallel \\ 0 \quad \dot{\omega}=0}} - \omega^2(P-\bar{P}) \\ \\ \underline{a}_c = 2\,\underline{\omega} \wedge V_\tau(P) \end{cases}$$

$$\boxed{-m\,\underline{a}_\tau - m\,\underline{a}_c = [\omega^2(P-\bar{P}) - 2\,\underline{\omega} \wedge \underline{V}_\tau]\,m}$$

NEL CASO DELLA FORZA PESO $V_\tau(P)=0 \Rightarrow \underline{a}_c = 0$

$$m\,\underline{a}_\tau = m\,\underline{g} = -G\,\frac{M_T\,m_P}{r^3}(P-O) + m\,\omega^2(P-\bar{P})$$

ATTRAZIONE GRAVITAZIONE $\underline{F}$ — FORZA CENTRIFUGA



QUINDI $m\underline{g}$ È **MINIMA** ALL'EQUATORE E MASSIMA AL POLO.

SE STUDIAMO IL MOTO DI UN CORPO IN MOTO $V_\tau(P) \neq 0$

$$m\,\underline{a}_\tau = -G\,\frac{M_T\,m_P}{r^3}(P-O) + m\,\omega^2(P-\bar{P}) - 2m\,\underline{\omega} \wedge \underline{V}_\tau$$

FORZA DI ATTRAZ. GRAVITAZIONALE — FORZA CENTRIFUGA — FORZA DI CORIOLIS

"RIFERIMENTI GALILEANAMENTE EQUIVALENTI"

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_2 \Rightarrow \underline{F}_1 = \underline{F}_2$$

MA IL PRINCIPIO DI INVARIANZA GALILEANA HA UN SIGNIFICATO PIÙ "PROFONDO". DUE OSSERVATORI SONO GALILEANAMENTE EQUIVALENTI NON SOLO SE "NUMERICAMENTE" $F_1 = F_2$ MA ESSENDO I DUE OSSERVATORI "FISICAMENTE INDISTINGUIBILI" SE TUTTE LE LEGGI DELLA FISICA SONO "FORMALMENTE COVARIANTI" PER TRASF. DI GALILEO

$$F_i(x_j, \dot{x}_j, x_j^{(1)}, \dots x_j^{(m)}, \dot{x}_j^{(1)}, \dots \dot{x}_j^{(m)}) =$$

$$= A_i^{i'} F_{i'}(x_{j'}, \dot{x}_{j'}, x_{j'}^{(1)}, \dots x_{j'}^{(m)}, \dot{x}_{j'}^{(1)}, \dots \dot{x}_{j'}^{(m)})$$

VEDIAMO COSA ACCADE RISPETTO AL GRUPPO DI GALILEO

$$x_{i'} = A_{i'}^{i} x_i + V_i t$$

ROTAZIONE ASSI

SE SUPPONIAMO I DUE RIF. PARALLELI

TRASF. DI GALILEO $\Rightarrow$ $\boxed{x^*_i = x_i + V_i t}$ (V_i RELATIVA AI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO)

LE UNICHE QUANTITA' CHE SONO COVARIANTI PER TRASF. DI GALILEO SONO

$$\underline{F} = \underline{F}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})$$

INFATTI

$$\begin{cases} x_i^{*(1)} = x_i^{(1)} + V_i t \\ x_i^{*(2)} = x_i^{(2)} + V_i t \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_i^{*(1)} - x_i^{*(2)} = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}}$$

PROVIAMO CHE NON E' POSSIBILE ASSUMERE

$$\underbrace{F_i(x_j) = F_i^*(x_j^*)}_{\text{FORZA NEL NUOVO RIFERIMENTO}}$$

ESEMPIO:

$$\boxed{F_i(x_j) = a_{ij}\, x_j} \qquad (a_{ij} \text{ TENSORE COSTANTE})$$

MA $x_j = x_j^* - V_j t \Rightarrow a_{ij} x_j = a_{ij} x_j^* - a_{ij} V_j t$

$$F_i^*(x_j^*) = F_i(x_j) = a_{ij} x_j^* - a_{ij} V_j t$$

QUINDI:

$$\Rightarrow \begin{cases} F_i(x_j) = a_{ij}\, x_j \\ F_i^*(x_j^*) = a_{ij} x_j^* - a_{ij} V_j t \end{cases}$$

QUINDI SI PERDE LA "COVARIANZA" DELLE LEGGI DELLA FISICA $\Rightarrow$ QUINDI I DUE OSSERVATORI SONO "DISTINGUIBILI".

CASO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO:

EQUAZIONI DI MAXWELL NON SONO COVARIANTI IN FORMA PER TRASFORMAZIONI DI GALILEO

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = q & -\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

IN UN RIF. INERZIALE ABBIAMO:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} \qquad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

(ε_0, μ_0 PERMEABILITÀ DIELETTRICA E MAGNETICA)

SE CONSIDERO UN RIF. NON INERZIALE $\Rightarrow x_i^* = x_i - V_i t$

AVREMO:

$$\begin{cases} D_i^* = \varepsilon_0 E_i^* - \varepsilon_0 (\underline{V} \wedge \underline{B}^*)_i \\ H_i^* = \dfrac{1}{\mu_0} \left\{ \left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right) \delta_{ij} + \dfrac{V_i V_j}{c^2} \right\} B_j^* - \varepsilon_0 (\underline{V} \wedge \underline{E}^*)_i \end{cases}$$

"STATICA - EQUILIBRIO"

DEF. DATO UN PUNTO MATERIALE P_0 SI DICE DI EQUILIBRIO SE POSTO P IN P_0 CON "ATTO DI MOTO NULLO", ESSO RIMANE IN P_0 INDEFINITAMENTE.

TEOREMA: C.N.S. AFFINCHÉ P_0 SIA DI EQUILIBRIO È CHE

$$\underline{F}(P_0, 0, t) = 0 \quad \forall t.$$

Hp. P_0 SIA UN PUNTO DI EQUILIBRIO PER P

TS: $\underline{F}(P_0, 0, t) = 0 \quad \forall t.$

SE PER Hp P_0 È DI EQUILIBRIO $P(t) = P_0 \ \forall t \Rightarrow \dot{P}(t) = \ddot{P}(t) = 0$

$\Rightarrow \underline{a}(t) = 0 \ \forall t$ QUINDI ESSENDO $\underline{F} = m\underline{a}$

$$\Rightarrow F(P_0, 0, t) = 0 \quad \forall t$$

VICEVERSA:

Hp: $\underline{F}(P_0, 0, t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ TS P_0 È DI EQUILIBRIO

CONSIDERIAMO L'EQUAZ. DIFFERENZIALE

$$\begin{cases} m\,\underline{a} = F(P, \dot{P}, t) \\ P(t_0) = P_0 \\ \dot{P}(t_0) = 0 \end{cases}$$

OSSERVIAMO CHE $P(t) = P_0 \ \forall t$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA INFATTI SODDISFA LE CONDIZIONI INIZIALI E SODDISFA PER Hp L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, IN QUANTO $\dot{P}(t) = \ddot{P}(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \underline{a} = 0 \Rightarrow F(P_0, 0, t) = 0 \ \forall t$ PER IPOTESI. LA SOLUZIONE È UNICA.

"RIFERIMENTO NON INERZIALE"

C.N.S AFFINCHÉ P_0 SIA DI EQUILIBRIO È CHE

$$(\underline{F} + \underline{F}_T)[P_0, 0, t] = 0 \quad \forall t$$

QUESTO PERCHÉ $m \underline{a}_R = \underline{F} + \underline{F}_T$ (IN QUANTO ALL'EQUILIBRIO $\underline{F}_c = 0$)

EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA PER SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

DATO UN SISTEMA S COSTITUITO DA N PUNTI MATERIALI, ALLORA TUTTI I RIMANENTI PUNTI COSTITUIRANNO QUELLO CHE CHIAMIAMO "AMBIENTE ESTERNO" AL SISTEMA

DOBBIAMO DISTINGUERE QUELLE FORZE CHE VENGONO ESERCITATE RECIPROCAMENTE TRA I PUNTI CHE COSTITUISCONO IL SISTEMA, DETTE "FORZE INTERNE" E LE FORZE ESERCITATE DALL'AMBIENTE ESTERNO SUI PUNTI DEL SISTEMA S, DETTE "FORZE ESTERNE"

RICAVIAMO LA 1ª EQUAZIONE CARDINALE NELLE SUE 4 FORME

1) $\underline{R}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i$

2) $\underline{R}^{(e)} = \dot{\underline{Q}}$ (DOVE $\underline{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i$) QUANTITÀ DI MOTO

3) $\underline{R}^{(e)} + \underline{R}^{(m)} = 0$ $\quad R^{(m)}$ "RISULTANTE FORZE DI INERZIA"

4) $\underline{R}^{(e)} = m \underline{a}_G$ ($\underline{a}_G$ = ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO)

PER IL PRINCIPIO (O POSTULATO) DI AZIONE E REAZIONE AVREMO, CONSIDERANDO LE FORZE INTERNE CHE

$$\begin{cases} \underline{R}^{(INT)} = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i^{(INT)} = 0 \\ \underline{M}_O^{(INT)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{f}_i^{(INT)} = 0 \end{cases}$$

CIOÈ IL SISTEMA DI FORZE INTERNE È EQUIVALENTE AD UN SISTEMA DI FORZE NULLE.

SE QUINDI SCRIVIAMO PER LA i^{MA} PARTICELLA

$$m \underline{a}_i = \underline{f}_i^{(INT)} + \underline{f}_i^{(EXT)}$$

AVREMO SOMMANDO

$$\underline{R}^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \underline{f}_i^{(INT)} + \underline{f}_i^{(EXT)} \right\} = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i$$

1) 1ª FORMA DELLA 1ª EQ. CARD. DELLA MECCANICA

$$\boxed{\underline{R}^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i}$$

2) SE DEFINIAMO LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA S

$$\boxed{\underline{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i} \Rightarrow \dot{\underline{Q}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i$$

2ª FORMA DELLA 1ª EQUAZ. CARDINALE

$$\boxed{\underline{R}^{(EXT)} = \dot{\underline{Q}}}$$

3) SE DEFINIAMO "FORZE DI INERZIA"

$$\underline{f}_i^{(IN)} = - m_i \underline{a}_i$$

AVREMO $\quad \underline{R}^{(in)} = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i^{(in)} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i = -\underline{R}^{(ext)}$

3ª FORMA DELLA 1ª EQUAZIONE CARDINALE

$$\boxed{\underline{R}^{(ext)} + \underline{R}^{(in)} = 0}$$

4) INFINE DEFINIAMO IL "BARICENTRO" G DI UN SISTEMA S CON O POLO FISSO

$$\boxed{G - O = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) m_i}$$

DA CUI $\quad \dot{G} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{V}_i = \frac{1}{m} \underline{Q}$

DA CUI $\quad \boxed{m \ddot{G} = \dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(ext)}}$

4ª FORMA $\quad \underline{R}^{(ext)} = m \underline{a}_G$

PROVIAMO CHE LA 2ª EQUAZ. CARDINALE DELLA MECCANICA PUO' ESSERE SCRITTA NELLE 4 FORME

1) $\underline{M}_O^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i$

2) $\underline{M}_O^{(ext)} + \underline{M}_O^{(in)} = 0$ $\quad$ [$\underline{M}_O^{(in)}$ "MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AL POLO O DELLE FORZE DI INERZIA]

3) $\underline{M}_O^{(ext)} = \underline{V}_O \wedge \underline{Q} + \dot{\underline{K}}_O$ $\quad$ ($\underline{K}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{V}_i$

MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO)

4) $\underline{M}_O^{(ext)} = \dot{\underline{K}}_O$ $\quad$ (QUANDO $\underline{V}_O \wedge \underline{Q} = 0$)

SE CALCOLIAMO PER LA i^{ma} PARTICELLA:

1)

$$\underline{(P_i - O) \wedge (\underline{f}_i^{(int)} + \underline{f}_i^{(ext)}) = (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i}$$

DA CUI SOMMANDO

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{f}_i^{(ext)}}_{\underline{M}_O^{(ext)}} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{f}_i^{(int)}}}_{= 0} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i$$

1ª FORMA 2ª EQUAZ. CARDINALE

$$\boxed{\underline{M}_O^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i}$$

2)

CONSIDERANDO LE "FORZE DI INERZIA"

$$\underline{f}_i^{(in)} = - m_i \underline{a}_i$$

$$\underline{M}_O^{(in)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{f}_i^{(in)} = - \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i = - \underline{M}_O^{(ext)}$$

2ª FORMA

$$\boxed{\underline{M}_O^{(ext)} + \underline{M}_O^{(in)} = 0}$$

3) CONSIDERIAMO IL "MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO"

O

(MOMENTO ANGOLARE).

$$\underline{K}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{v}_i$$

DA CUI DERIVANDO

$$\dot{\underline{K}}_O = - \underline{v}_O \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i}_{Q} + \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{a}_i$$

3ª FORMA:

$$\boxed{\underline{M}_O^{(ext)} = \dot{\underline{K}}_O + \underline{v}_O \wedge Q}$$

4) NEL CASO IN CUI IL POLO O È FISSO $\Rightarrow \underline{v}_O = 0$

" " $\underline{v}_O \uparrow\uparrow \underline{v}_G$ $\quad (\underline{Q} = m\underline{v}_G)$

" " $O = G \Rightarrow \underline{v}_G \wedge \underline{Q} = 0$

4ª FORMA DELLA 2ª EQUAZ. CARDINALE

$$\boxed{\dot{\underline{K}}_O = \underline{M}_O^{(ext)}}$$

EQUILIBRIO PER UN SISTEMA S

DEF DIREMO CHE LA CONFIGURAZIONE S_0 È DI EQUILIBRIO PER S, SE POSTO S IN S_0 CON ATTO DI MOTO NULLO ALLORA ESSO VI RIMANE INDEFINITAMENTE.

TEOREMA. C.N. AFFINCHÉ S_0 SIA DI EQUILIBRIO PER S È CHE $\underline{R}^{(ext)} = 0 \quad \underline{M}_O^{(ext)} = 0$

Hp S_0 SIA DI EQUILIBRIO $\underline{v}_i = 0 \ \forall i \ \forall t \Rightarrow \underline{a}_i = 0 \ \forall i, \forall t$

DA CUI T1: $\underline{R}^{(ext)} = \underline{M}_O^{(ext)} = 0$

NON È VERO IL VICEVERSA!

BASTA CONSIDERARE UN SISTEMA IN MOTO COSTITUITO DA DUE PARTICELLE CHE SI ATTRAGGONO RECIPROCAMENTE

$P_1 \longrightarrow \qquad \longleftarrow P_2$

AVREMO $\underline{R}^{(ext)} = \underline{M}_O^{(ext)} = 0$ MA IL SISTEMA NON È IN EQUILIBRIO

"RIFERIMENTO BARICENTRALE"

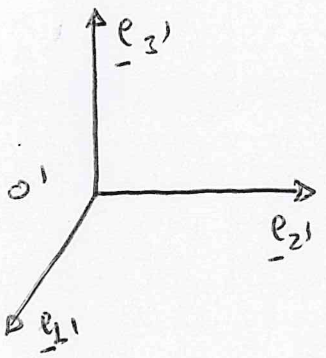
Sia dato il baricentro associato ad un sistema fisico S

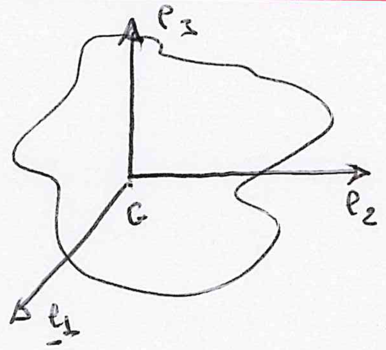
$$G - O = \frac{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O)\, m_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{m}} = \frac{\int (P - O)\, dm}{\underbrace{\int dm}_{m}}$$

DEF.

Consideriamo un riferimento che convenzionalmente definiamo fisso $\{O', \underline{e}_i'\}$. Sia G il baricentro di un sistema S.

Definiamo "riferimento baricentrale" quel riferimento avente come origine il baricentro e come assi degli assi costantemente paralleli agli assi del rif. "fisso".





NOTA: "osserviamo" che il baricentro G non necessariamente è un punto del sistema S, in quanto può non appartenere ad S, ma in ogni caso è un punto solidale con il sistema S (quindi ad esso può essere applicata la teoria dei campi equiproiettivi).

Consideriamo le due quantità

$$\begin{cases} \underline{K}_{O}' & \text{momento della quantità di moto} \\ \underline{M}_{O}'^{(e)} & \text{" \quad " forze esterne} \end{cases}$$

valutate nel riferimento fisso $\{O', \underline{e}_i'\}$ rispetto ad

UN GENERICO POLO O. PRENDIAMO, IN PARTICOLARE, COME POLO O = G (CIOE' IL BARICENTRO) E PROVIAMO CHE

$$\begin{cases} \underline{K}'_G = \underline{K}_G \\ \underline{M}'^{(e)}_G = \underline{M}^{(e)}_G \end{cases}$$

$\underline{K}_G$, $\underline{M}^{(e)}_G$ SONO VALUTATI NEL RIFERIMENTO BARICENTRALE $\{G, \underline{e}_i\}$.

DAL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI, PRESO UN GENERICO $P_i \in S$

$$\boxed{\underline{V}_i' = \underline{V}_G + \underline{V}_i}$$

$\underline{V}_G$ = VELOCITA' DEL BARICENTRO (CHE PER DEFINIZIONE DEVE COINCIDERE, IN QUESTO CASO, CON LA VELOCITA' DI TRASCINAMENTO)

$\underline{V}_i'$ = VELOCITA DEL PUNTO P_i NEL RIFERIMENTO FISSO.

$\underline{V}_i$ = VELOCITA' DEL PUNTO P_i RISPETTO AL RIFERIMENTO BARICENTRALE

SE QUINDI **CALCOLIAMO** LE QUANTITA' $\boxed{\underline{K}'_G \, , \, \underline{M}'^{(e)}_G}$

$$\underline{K}'_G = \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i \underline{V}_i' = \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i (\underline{V}_G + \underline{V}_i)$$

$$= \underbrace{\cancel{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - G) \right]}}_{= 0} \wedge \underline{V}_G + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i \underline{V}_i}_{\underline{K}_G}$$

PER LA DEFINIZIONE DI BARICENTRO.

DA CUI $\boxed{\underline{K}'_G = \underline{K}_G}$

ANALOGAMENTE SE CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE DEL GENERICO PUNTO P_i E USIAMO IL TEOREMA DI "CORIOLIS"

$$\boxed{\underline{a}_i' = \underline{a}_G + \underline{a}_i}$$

(RICORDIAMO CHE $\boxed{\underline{a}_c = 2\underline{\omega}_c \wedge \underline{V}_i = 0}$ IN QUANTO $\boxed{\underline{\omega}_c = 0}$ NEL RIFERIMENTO BARICENTRALE)

DA CUI IN MODO ANALOGO AL CALCOLO DI $\underline{K}'_G$ SE CALCOLIAMO $\underline{M}'^{(e)}_G$

$$\underline{M}'^{(e)}_G = \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i \underline{a}_{1i} = \Big[\cancel{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - G)}_{=0}}\Big] \wedge \underline{a}_G + \underline{M}^{(e)}_G$$

DA CUI $\boxed{\underline{M}'^{(e)}_G = \underline{M}^{(e)}_G}$

PROVIAMO CHE SE CONSIDERIAMO LA 2ª EQUAZIONE CARDINALE NEI DUE RIFERIMENTI, ESSA E' UGUALE. PRIMA OSSERVIAMO CHE

$\boxed{\dot{\underline{K}}'_G = \dot{\underline{K}}_G}$ IN QUANTO ANCHE SE IN GENERALE LE DUE DERIVATE TEMPORALI NON COINCIDONO

$$\frac{d_a \underline{u}}{dt} = \frac{d_\tau \underline{u}}{dt} + \underline{\omega}_\tau \wedge \underline{u}$$

NEL CASO DEL MOTO BARICENTRALE, CHE IN GENERALE SI MUOVE DI "MOTO TRASLATORIO NON UNIFORME" RISPETTO AL RIF. FISSO AVREMO $\boxed{\underline{\omega}_\tau = 0}$ QUINDI LE DERIVATE TEMPORALI COINCIDONO

$$\dot{\underline{K}}'_G = \dot{\underline{K}}_G = \underline{M}'^{(e)}_G = \underline{M}^{(e)}_G$$

DA CUI NEI DUE RIFERIMENTI AVREMO

$$\begin{cases} \dot{\underline{K}}'_G = \underline{M}'^{(e)}_G \\ \dot{\underline{K}}_G = \underline{M}^{(e)}_G \end{cases}$$

$\longleftrightarrow$

"LEGGI DI CONSERVAZIONE"

UTILIZZIAMO LE EQUAZIONI CARDINALI PER DEDURRE DELLE LEGGI DI CONSERVAZIONE (INTEGRALI PRIMI)

DATO UN SISTEMA FISICO $\mathcal{S}$ SOGGETTO A DELLE FORZE ESTERNE E SUPPONIAMO CHE $\exists$ UNA DIREZIONE $\underline{u}$ COSTANTE RISPETTO ALLA QUALE LA RISULTANTE $\underline{R}^{(e)}$ DELLE FORZE ESTERNE SIA NULLA

$$\boxed{\underline{R}^{(e)} \cdot \underline{u} = 0}$$

SE ADESSO SUPPONIAMO DI CONSIDERARE LA 1ª EQUAZ. CARDINALE

$$\underline{R}^{(e)} = \dot{\underline{Q}} \Rightarrow \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{ESSENDO } \underline{u} \text{ COSTANTE})$$

$$\frac{d}{d}(\underline{Q} \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{Q} \cdot \underline{u} = \text{COSTANT} \quad \forall t.}$$

DEDUCIAMO CHE " SI CONSERVA LA COMPONENTE DI $\underline{Q}$ NELLA DIREZIONE $\underline{u}$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO LE FORZE GRAVITAZIONALI E SIA $\underline{u}$ IL VERSORE ASSOCIATO ALLA DIREZIONE ORIZZONTALE

$\underline{R}^{(e)} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{Q} \cdot \underline{u} = \text{cost} \Rightarrow$ LA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA SI CONSERVA.

2) SUPPONIAMO ADESSO CHE $\exists$ $\underline{u}$ COSTANTE, RISPETTO AL QUALE IL MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE ABBIA COMPONENTE NULLA

$$\boxed{\underline{M}_0^{(e)} \cdot \underline{u} = 0}$$

SE ASSUMIAMO CHE SI POSSA SCRIVERE LA 2ª EQUAZIONE CARDINALE NELLA FORMA

$$\dot{\underline{K}}_0 = \underline{M}_0^{(e)} \Rightarrow \dot{\underline{K}}_0 \cdot \underline{u} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\underline{K}_0 \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{K}_0 \cdot \underline{u} = \text{costant.}}$$

ESEMPIO: FORZA GRAVITAZIONALE

SE CONSIDERIAMO COME $\boxed{\underline{u} \text{ LA VERTICALE}}$

$$\underline{M}_O^{(e)} \cdot \underline{u} = 0$$

DA CUI $\quad \dot{\underline{K}}_O \cdot \underline{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\underline{K}_O \cdot \underline{u}) = 0$

$$\underline{K}_O \cdot \underline{u} = \text{COSTANTE}$$

LA COMPONENTE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO LUNGO LA VERTICALE SI CONSERVA

"TENSORE DI INERZIA"

SIA DATO UN CORPO RIGIDO S, ALLORA IL MOTO INTORNO AL BARICENTRO SARÀ UN MOTO "RIGIDO SFERICO"

INFATTI
$$\begin{cases} \underline{V}_i' = \underline{V}_G + \underline{V}_i \\ \underline{V}_i' = \underline{V}_G + \omega \wedge (P_i - G) \end{cases}$$

DA CUI DEDUCIAMO CHE

$$\boxed{\underline{V}_i = \underline{\omega} \wedge (P_i - G)} \qquad \text{(MOTO RIGIDO SFERICO)}$$

SCRIVIAMO L'ESPRESSIONE DI $\underline{K}_G$ NEL RIF. BARICENTRALE

$$\underline{K}_G = \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i \underline{V}_i = \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) \wedge m_i [\underline{\omega} \wedge (P_i - G)]$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} m_i [\underline{\omega} \wedge (P_i - G)] \wedge (P_i - G)$$

DA CUI:

$$\underline{K}_G = -\sum_i m_i \left\{ \left[\underline{\omega} \cdot (P_i - G)\right](P_i - G) - \left[(P_i - G)\cdot(P_i - G)\right]\underline{\omega} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ (P_i - G)^2 \underline{\omega} - \left[\underline{\omega} \cdot (P_i - G)\right](P_i - G) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ (x_c^{(i)} x_c^{(i)}) \omega_b \underline{e}_b - \left[\omega_a x_a^{(i)}\right] x_b^{(i)} \underline{e}_b \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ (x_c^{(i)} x_c^{(i)}) \underset{\underset{\omega_a \delta_{ab}}{\uparrow}}{\omega_b} - x_a^{(i)} x_b^{(i)} \omega_a \right\} \underline{e}_b$$

$$= \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_c^{(i)} x_c^{(i)}) \delta_{ab} - x_a^{(i)} x_b^{(i)} \right] \right\}}_{\underline{I_{ab}}} \omega_a \underline{e}_b$$

↑ TENSORE DI INERZIA

QUINDI

$$\boxed{K_{Gb} \underline{e}_b = I_{ab} \, \omega_a \, \underline{e}_b} \Rightarrow \boxed{K_{Gb} = I_{ab} \, \omega_a}$$

DOVE

$$\boxed{I_{ab} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_c^{(i)} x_c^{(i)}) \delta_{ab} - x_a^{(i)} x_b^{(i)} \right]}$$

SI CHIAMERÀ "TENSORE DI INERZIA" DEL SISTEMA S

1) OSSERVIAMO CHE È SI TRASFORMA COME UN TENSORE

INFATTI $\quad x_c^{(i)} x_c^{(i)} = x_{c'}^{(i)} x_{c'}^{(i)} \quad \Leftarrow$ SCALARE

$$\delta_{ab} = A_a{}^{a'} A_b{}^{b'} \delta_{a'b'}$$

$$x_a^{(i)} x_b^{(i)} = A_a{}^{a'} A_b{}^{b'} x_{a'}^{(i)} x_{b'}^{(i)}$$

da cui $$\boxed{I_{ab} = A_a^{\ a'} A_b^{\ b'} I_{a'b'}}$$ (LEGGE DI TRASF. DI UN TENSORE DOPPIO)

2)

$$I_{ab} = I_{ba} \quad \text{(SIMMETRICO)}$$

3) CALCOLIAMO LE COMPONENTI DI I_{ab}

$$I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(x_1^{(i)} x_1^{(i)} + x_2^{(i)} x_2^{(i)} + \cancel{x_3^{(i)} x_3^{(i)}} \right) \delta_{33} - \cancel{x_3^{(i)} x_3^{(i)}} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i)})^2 \right]$$ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO L'ASSE $\underline{e}_3$

ANALOGAMENTE

$$I_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_1^{(i)})^2 + (x_3^{(i)})^2 \right]$$ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO L'ASSE $\underline{e}_2$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_2^{(i)})^2 + (x_3^{(i)})^2 \right]$$ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO L'ASSE $\underline{e}_1$

LE COMPONENTI "FUORI DIAGONALE" DI I_{ab} SI DIRANNO PRODOTTI DI INERZIA

$$I_{12} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\cancel{\left(x_c^{(i)} x_c^{(i)} \right) \delta_{12}} - x_1^{(i)} x_2^{(i)} \right] =$$

$$= - \sum_{i=1}^{N} m_i \, x_1^{(i)} x_2^{(i)}$$

$$I_{13} = - \sum_{i=1}^{N} m_i \, x_1^{(i)} x_3^{(i)}$$

$$I_{23} = - \sum_{i=1}^{N} m_i \, x_2^{(i)} x_3^{(i)}$$

SUPPONIAMO DI AVERE UN'ASSE DI ROTAZIONE $\underline{u}$ (VERSORE) CHE NON COINCIDA CON NESSUNO DEGLI ASSI $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

ALLORA SI PROVA CHE IL "MOMENTO DI INERZIA" DEL SISTEMA S RISPETTO ALL'ASSE DI VERSORE $\underline{u}$ È DATO DA

$$\boxed{(1) \qquad I_u = I_{ab}\, u_a u_b} \qquad (\text{SCALARE})$$

PROVIAMOLO: ESSENDO (1) UNO SCALARE POSSIAMO PENSARE DI FARE UN CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO FINO A FARE COINCIDERE IL NUOVO ASSE z CON L'ASSE DI VERSORE $\underline{u}$ IN QUESTO CASO AVREMO

$$\underline{u} = (0, 0, 1)$$

DA CUI

$$I_u = I_{ab}\, u_a u_b = I_{33}$$

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE z CHE IN QUESTO CASO COINCIDE CON $\underline{u}$

DA CUI PROVATA LA TESI CHE "IL MOMENTO DI INERZIA" RISPETTO AD $\underline{u}$

$$I_u = I_{ab}\, u_a u_b.$$

RIFERIMENTI: "PRINCIPALE" E "CENTRALE" DI INERZIA

ESSENDO I_{ab} UN "TENSORE DOPPIO SIMMETRICO EUCLIDEO" $\exists$ UNA BASE COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI I_{ab} CON 3 AUTOVALORI REALI (NON NECESSARIAMENTE DISTINTI), DOVE I_{ab} HA FORMA DIAGONALE.

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

DEF 1 : IL SISTEMA DI RIFERIMENTO I CUI ASSI SONO DESCRITTI DAI TRE AUTOVETTORI DI I_{ab} E HA COME ORIGINE IL BARICENTRO G SI DICE $\boxed{\text{"CENTRALE DI INERZIA"}}$

DEF. 2 IL SISTEMA DI RIFERIMENTO I CUI ASSI SONO DESCRITTI DAI TRE AUTOVETTORI DI I_{ab} MA HA COME ORIGINE UN $\forall\ P \neq G$ SI DICE $\boxed{\text{" PRINCIPALE DI INERZIA"}}$

OVVIAMENTE SIA NEL RIF. "CENTRALE DI INERZIA" CHE NEL RIF. "PRINCIPALE DI INERZIA" IL TENSORE HA FORMA DIAGONALE, ESSENDO A, B, C (NELLA BASE DEI TRE AUTOVETTORI $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) I MOMENTI DI INERZIA

$$A = I_{11} \quad , \quad B = I_{22} \quad , \quad C = I_{33}$$

RISPETTO AGLI ASSI $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ ED $\underline{e}_3$ RISPETTIVAMENTE. (I PRODOTTI DI INERZIA SONO OVVIAMENTE NULLI).

ELLISSOIDE DI INERZIA

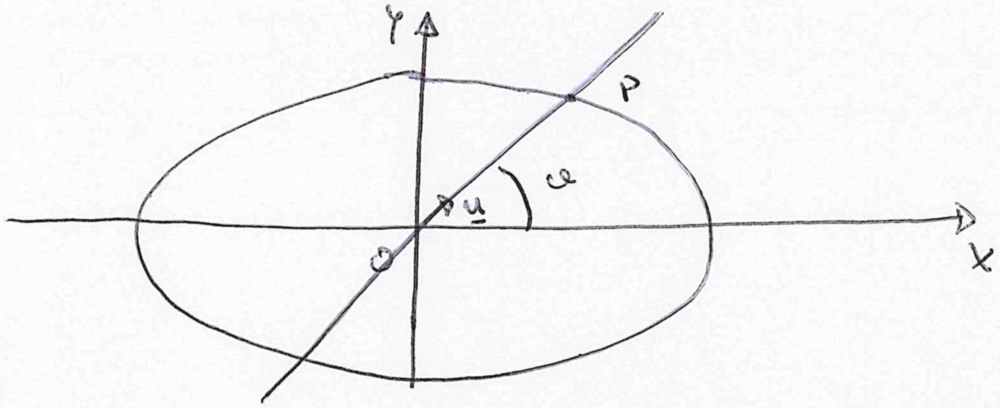
SE CONSIDERIAMO UN RIFERIMENTO "PRINCIPALE DI INERZIA" $\{O, \underline{e}_i\}$ E CONSIDERIAMO IN ESSO LA "QUADRICA DI INERZIA" DI EQUAZIONE

$$\boxed{I_{11}\, x^2 + I_{22}\, y^2 + I_{33}\, z^2 = 1} \qquad (2)$$

DOVE TUTTI I COEFFICIENTI I_{11}, I_{22}, I_{33} SONO POSITIVI ESSENDO PER DEFINIZIONE I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AI VARI ASSI. QUINDI LA (2) RAPPRESENTA UN "ELLISSOIDE DI INERZIA"

CONSIDERIAMO, PER SEMPLICITÀ, IL CASO PIANO

$$I_{11}\, x^2 + I_{22}\, y_2 = 1 \qquad (*)$$



SUPPONIAMO CHE L'ASSE DI ROTAZIONE DI VERSORE $\underline{u}$ PASSI PER L'ORIGINE O ESSENDO $\underline{u} \equiv (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

L'ASSE INTERSECA L'ELLISSE NEL PUNTO $P \equiv (\overline{OP}\cos\alpha, \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha)$ CHE DOVENDO APPARTENERE ALL'ELLISSE SODDISFERÀ LA (*)

$$I_{11}\,\overline{OP}^2\cos^2\alpha + I_{22}\,\overline{OP}^2\operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

DA CUI

$$I_{11}\cos^2\alpha + I_{22}\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{\overline{OP}^2} \qquad (*1)$$

MA SE VALUTIAMO IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE $\underline{u}$

$$\boxed{I_u = I_{ab}\, u_a u_b = I_{11}\cos^2\alpha + I_{22}\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{\overline{OP}^2}}$$

QUINDI PER IL CALCOLO DI I_u È SUFFICIENTE VALUTARE LA DISTANZA $\overline{OP}^2$.

"VARIAZIONE DEL TENSORE DI INERZIA AL VARIARE DEL POLO"

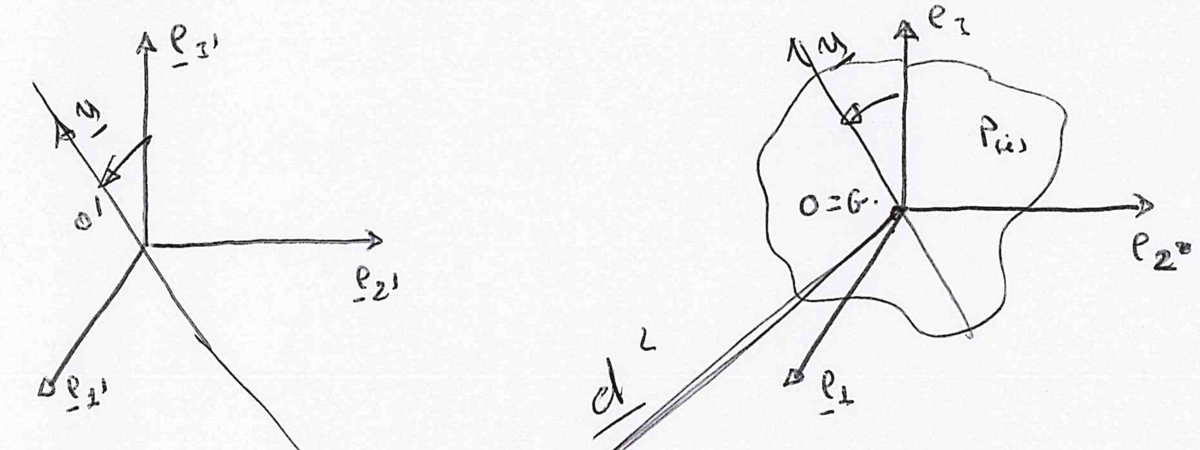
"LEGGE DI HUYGHENS"

Supponiamo che l'asse di rotazione $\underline{u}$ non passi per l'origine del nostro riferimento principale di inerzia. Vogliamo trovare la connessione tra il momento di inerzia I_u ~~con~~ il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo al vettore $\underline{u}$ ma che passa per il baricentro del sistema S.

Per fare ciò vediamo come varia il tensore di inerzia per una traslazione degli assi.

Consideriamo quindi due riferimenti

$\{O', \underline{e}_i'\}$ e $\{O \equiv G, \underline{e}_i\}$ ottenuti per una traslazione degli assi



Valutiamo il tensore $\boxed{I'_{ab}}$ valutato rispetto al rif. $\boxed{\{O', \underline{e}_i'\}}$ con il tensore di inerzia $\boxed{I_{ab}}$ valutato rispetto al rif. $\boxed{\{O \equiv G, \underline{e}_i\}}$ ottenuto con una traslazione degli assi. Se calcoliamo le componenti del vettore associato all'i-esimo punto

$$\boxed{P_{(i)} - O' = (P_{(i)} - O) + (O - O')}$$ avremo

$$\boxed{x'^{(i)}_d = x^{(i)}_d + x'_{(o)d}}$$

da cui

$$I'_{ab} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \left(x'^{(i)}_c \, x'^{(i)}_c \right) \delta_{ab} - x'^{(i)}_a \, x'^{(i)}_b \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \Big\{ \Big[\left(x^{(i)}_c + x'_{(o)c} \right) \left(x^{(i)}_c + x'_{(o)c} \right) \delta_{ab} -$$

$$- \left(x^{(i)}_a + x'_{(o)a} \right) \left(x^{(i)}_b + x'_{(o)b} \right) \Big] \Big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \left(x^{(i)}_c \, x^{(i)}_c \right) \delta_{ab} - x^{(i)}_a \, x^{(i)}_b \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \left(x'_{(o)c} \, x'_{(o)c} \right) \delta_{ab} - x'_{(o)a} \, x'_{(o)b} \right\}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ 2 \, x^{(i)}_c \, x'_{(o)c} \, \delta_{ab} - x^{(i)}_a \, x'_{(o)b} - x'_{(o)a} \, x^{(i)}_b \right\}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, x^{(i)}_c \right)}_{0} 2 \, x'_{(o)c} \, \delta_{ab} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, x^{(i)}_a \right)}_{0} x'_{(o)b} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, x^{(i)}_b \right)}_{0} x'_{(o)a}$$

se come abbiamo fatto $\boxed{O \equiv G}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \, x^{(i)}_d = 0}$ proprio per

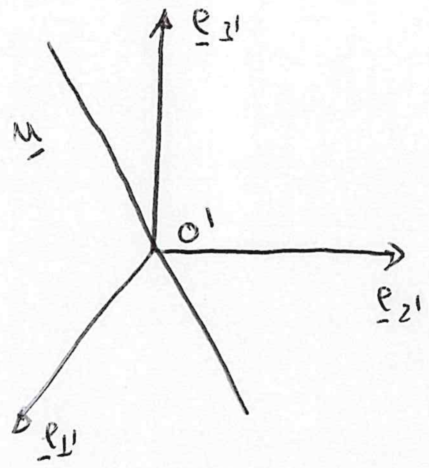
definizione di baricentro in quanto $G - O = 0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} (P_i - G) m_i$

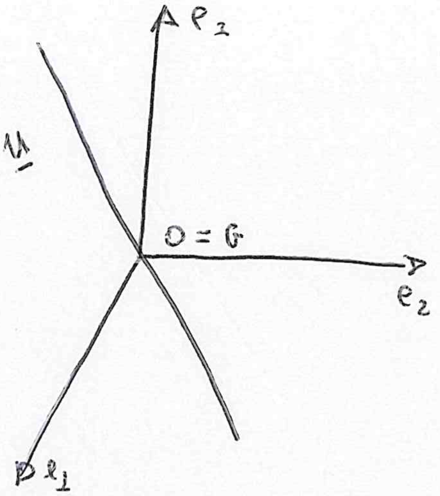
da cui

$$\boxed{I'_{ab} = I_{ab} + m \left[x'_{(G)c} \, x'_{(G)c} \, \delta_{ab} - x'_{(G)a} \, x'_{(G)b} \right]}$$

$$\uparrow$$

legge che descrive la variazione del tensore di inerzia per una traslazione degli assi





SE QUINDI CALCOLIAMO IL "MOMENTO DI INERZIA" DEL SISTEMA S' RISPETTO AD UN ASSE DI VERSORE $\underline{u}$ PASSANTE PER O' AVREMO

$$I'_u = I'_{ab} u_a u_b = \underbrace{I_{ab} u_a u_b}_{I_u} + m\left[x'_{(G)c} x'_{(G)c} \delta_{ab} - x'_{(G)a} x'_{(G)b}\right] u_a u_b$$

MENTRE PER IL 2° TERMINE ESSENDO

$$\delta_{ab} u_a u_b = 1$$

AVREMO

$$\boxed{\left[x'_{(G)c} x'_{(G)c} - x'_{(G)a} u_a \, x'_{(G)b} u_b\right] = d^2} \qquad (+++)$$

ESSENDO d^2 LA DISTANZA AL QUADRATO DI G DALL'ASSE $\underline{u}$ PASSANTE PER O'. INFATTI LA (+++) E' UNO SCALARE CHE IN PARTICOLARE POSSIAMO VALUTARE NEL RIFERIMENTO DI ORIGINE O', IN CUI SI FA COINCIDERE (CON POSSIBILI ROTAZIONI) L'ASSE $\underline{u}$ CON L'ASSE z' IN QUESTO CASO AVREMO

$$\begin{cases} x'_{(G)c} x'_{(G)c} = x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ x'_{(G)a} u_a \, x'_{(G)b} u_b = z^2 \end{cases}$$

DA CUI:

$$x'_{(G)c}\, x'_{(G)c} - x'_{(G)a}\, u_a\, x'_{(G)b}\, u_b = x'^2 + y'^2 = d^2$$

DOVE d^2 È LA DISTANZA DI G DALL'ASSE $\underline{e}_z' = \underline{u}$

QUESTA FORMULA CI DÀ LA LEGGE DI "HUYGHENS" SUL MOMENTO DI INERZIA

$$\boxed{I'_{u(O')} = I_{u(G)} + m d^2}$$

— o —

"ESTENSIONE DAL CASO DISCRETO AL CASO CONTINUO"

QUANDO CONSIDERIAMO UN NUMERO MOLTO GRANDE DI PARTICELLE COSTITUENTI UN SISTEMA S, DELL'ORDINE DI $N \simeq 10^{24}$ MOLECOLE O PARTICELLE (PARI AL NUMERO DI AVOGADRO) SI INTRODUCE LA SCHEMATIZZAZIONE DI "CORPO CONTINUO".

IN PARTICOLARE SI SUDDIVIDE LO SPAZIO IN VOLUMETTI V, CIASCUNO CONTENENTE UNA MASSA m E SI COSTRUISCE LA SUCCESSIONE $\left\{\frac{m}{V}\right\}$ DEFINENDO LA QUANTITÀ "DENSITÀ"

$$\boxed{\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V}}$$

PER FARE QUESTO OCCORRE SIA RISPETTATI DUE REQUISITI

1) I VOLUMI CHE SI CONSIDERANO NELLA SUCCESSIONE $\left\{\frac{m}{V}\right\}$ DEVONO ESSERE MOLTO PICCOLI RISPETTO AL VOLUME $\mho$ OCCUPATO DALL'INTERO SISTEMA

2) QUESTI VOLUMI DEVONO ESSERE ABBASTANZA GRANDI DA TRASCURARE LE FLUTTUAZIONI STATISTICHE.

OSSERVIAMO CHE LA MASSA m CONTENUTA IN UN CERTO VOLUME È DATA DA

$$\boxed{m = N m_i}$$

ORA NON È POSSIBILE STABILIRE CON ESATTEZZA QUANTE SIANO LE MOLECOLE N CONTENUTE IN CIASCUNO DEI VOLUMETTI

COMUNQUE È POSSIBILE STIMARE IL "NUMERO MEDIO" DI MOLECOLE CONTENUTE IN UN CERTO ISTANTE IN UN CERTO VOLUME

$$\boxed{m = \langle N \rangle m_i}$$

DOVE AVREMO $\boxed{\langle N \rangle \neq N}$ DA CUI POSSIAMO DEFINIRE UNO SCARTO

$$\Delta N = N - \langle N \rangle$$

SE CALCOLIAMO $\langle \Delta N \rangle = 0$, MENTRE IN GENERALE SE VALUTIAMO LA MEDIA DEI QUADRATI

$$\boxed{\langle \Delta N^2 \rangle \neq 0}$$

LE FLUTTUAZIONI STATISTICHE SONO CONNESSE ALL'ESISTENZA DELLA QUANTITÀ $\boxed{\langle \Delta N^2 \rangle \neq 0}$.

SI PUÒ PROVARE CHE LE FLUTTUAZIONI STATISTICHE

$$\boxed{\text{FLUT. STAT.} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

QUINDI SE NON ABBIAMO UN NUMERO ELEVATO DI PARTICELLE, NON SI POSSONO TRASCURARE LE FLUTT. STATISTICHE, DA OCCORRE CHE VENGA SODDISFATTO IL 2° REQUISITO.

IN QUESTO CASO POSSIAMO PASSARE ALLA SCHEMATIZZAZIONE DI SISTEMA CONTINUO E' DEFINIRE

$$G-O=\frac{1}{m}\int(P-O)\,\rho\, d\Omega \qquad\qquad dm=\rho\, d\Omega$$

ED ANALOGAMENTE

$$I_{ab}=\int_{\Omega}\rho\,(x_c x_c\,\delta_{ab}-x_a x_b)\,d\Omega.$$