"BARICENTRO E SUE PROPRIETÀ" (0)

$$G - O = \frac{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) m_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{m}} = \frac{\int (P - O)\, dm}{\underbrace{\int dm}_{m}}$$

$$dm = \rho(P)\, dG \qquad dG = \begin{cases} dx & \text{(INTEGRALE DI "LINEA")} \\ ds & \text{(INTEGRALE DI "SUPERFICIE")} \\ dV & \text{(INTEGRALE DI "VOLUME")} \end{cases}$$

__DEF.__ CHIAMIAMO α-DIAMETRALE CONIUGATO ALLA DIREZIONE $\hat{z}$ QUEL α (POTREBBE TRATTARSI DI UN PUNTO, O DI UNA RETTA O DI UN PIANO) CHE DIVIDE LA FIGURA MATERIALE IN DUE PARTI f_1 ED f_2 TALI CHE.

$\forall P_1 \in f_1 \ \exists P_2 \in f_2$ TALE CHE:

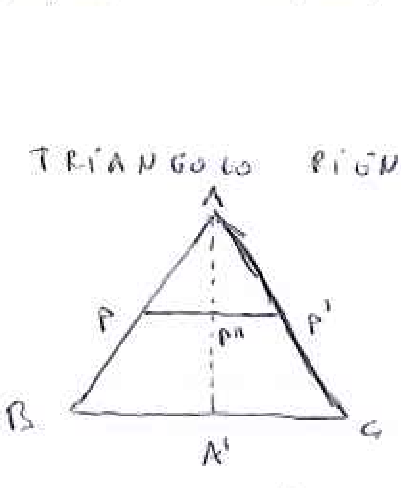
1) $m(P_1) = m(P_2)$

2) $\overline{P_1 P_2} \uparrow\uparrow \hat{z}$

3) $d(P_1, \alpha) = d(P_2, \alpha)$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO UN TRIANGOLO PIENO OMOGENEO ABC



CONSIDERIAMO LA MEDIANA AA' RELATIVA AL LATO **BC**, QUESTA È UN α-DIAMETRALE CONIUGATO ALLA DIREZIONE $\hat{z}$

DEL LATO $\overline{BC}$, INFATTI ESSENDO IL TRIANGOLO "OMOGENEO" TUTTI I PUNTI HANNO LA STESSSA MASSA DA CUI E' SODDISFATTA LA PROPRIETA (1).

SE ADESSO CONSIDERIAMO LO STRATERELLO INFINITESIMO $\overline{PP'}$ PARALLELO AL LATO $\overline{BC}$ PER COSTRUZIONE E' SODDISFATTA LA PROPRIETA' (2)

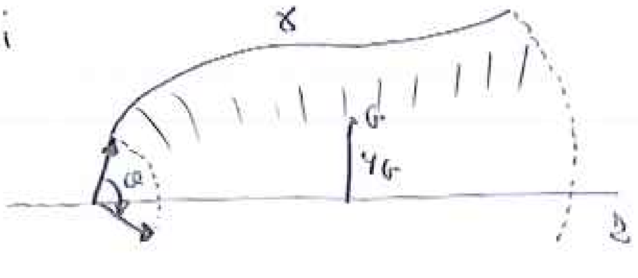
OGNI COPPIA DI PUNTI APPARTENENTI AL SEGMENTO $\overline{PP'}$ CHE SIANO SIMMETRICI RISPETTO P'', SODDISFERA' TUTTI I REQUISITI 1), 2), 3) (QUESTO VARRA' PER TUTTI GLI STRATERELLI PARALLELI A $\overline{BC}$)

ANALOGAMENTE LE RIMANENTI MEDIANE SONO Q-DIAMETRALI E IL BARICENTRO SI TROVA COME PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE MEDIANE.

<u>NOTA</u>: PER UN SISTEMA MATERIALE OMOGENEO TUTTE LE RETTE DI SIMMETRIA SONO DELLE Q-DIAMETRALI

PRIMO E SECONDO TEOREMA DI GULDINO

<u>1° TEOR. DI GULDINO</u>: SUPPONIAMO DI AVERE UNA SUPERFICIE GENERATA DALLA ROTAZIONE DI UNA CURVA REGOLARE PIANA γ RISPETTO AD UNA RETTA z CHE NON LA INTERSECHI



SI PROVA CHE: "L'AREA DELLA SUPERFICIE OTTENUTA CON QUESTA ROTAZIONE, È LEGATA AL BARICENTRO DELLA CURVA REGOLARE γ PER IL TRAMITE DELLA RELAZIONE":

$$S = \ell \, y_G \, \alpha$$

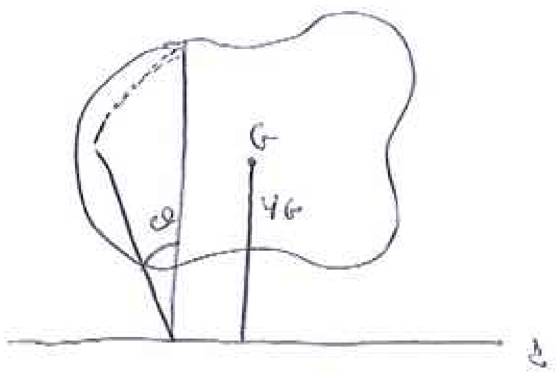
α = ANGOLO DI ROTAZIONE

ℓ = LUNGHEZZA DELLA CURVA γ

y_G = ORDINATA DEL BARICENTRO G DELLA CURVA

2° TEOREMA DI GULDINO:

CONSIDERIAMO UN SOLIDO GENERATO DALLA ROTAZIONE DI UNA SUPERFICIE REGOLARE PIANA RISPETTO AD UNA RETTA r CHE NON INTERSECHI LA SUPERFICIE



ALLORA AVREMO:

$$V = \sigma \, y_G \, \alpha$$

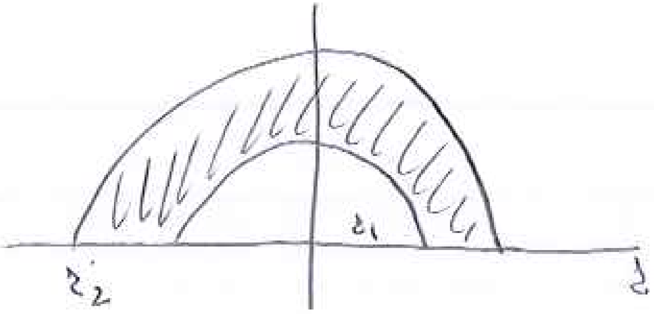
V = VOLUME DEL SOLIDO GENERATO

σ = AREA DELLA SUPERFICIE REGOLARE

y_G = ORDINATA DEL BARICENTRO DELLA SUPERFICIE

ESEMPIO 1

CALCOLARE IL BARICENTRO DELLA SEMICORONA CIRCOLARE



$$V = \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)$$

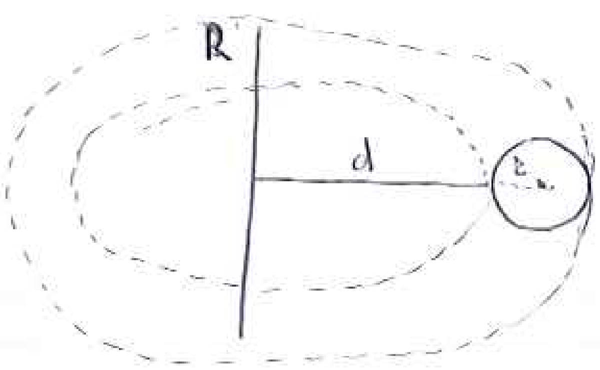
DA CUI APPLICANDO GULDINO

$$y_G = \frac{V}{\sigma\, 2\pi} = \frac{\frac{4}{3}(r_2^3 - r_1^3)\pi}{\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\pi \cdot 2\pi} =$$

$$y_G = \frac{\frac{4}{3}(r_2 - r_1)(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)\pi} = \frac{4}{3}\,\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{\pi(r_1 + r_2)}$$

ESEMPIO 2

CALCOLARE IL BARICENTRO DELLA CIRCONFERENZA IL CUI BORDO È POSTO AD UNA DISTANZA "d" DA UNA RETTA R



APPLICANDO GULDINO SE RUOTIAMO LA CIRCONFERENZA ATTORNO ALLA RETTA R DI UN ANGOLO $\alpha = 2\pi$

IL TORO GENERATO AVRÀ IL VOLUME DEL CILINDRO DI ALTEZZA $h = 2\pi(r+d)$ E BASE πr^2

DA CUI $V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot 2\pi(r+d) \Rightarrow y_G = \frac{V}{\sigma\, 2\pi} = \frac{2\pi^2 r^2 (r+d)}{\pi r^2\, 2\pi} = r+d$

"ESERCIZI"

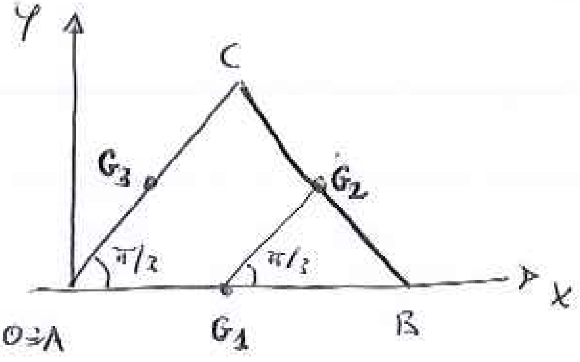
1) CALCOLARE IL BARICENTRO COSTITUITO DA 3 ASTE RIGIDE OMOGENEE DI UGUALE LUNGHEZZA ℓ, MA AVENTE MASSA DIVERSA

$\overline{AB}$ DI MASSA $2m$

$\overline{BC}$ DI MASSA m

$\overline{CA}$ DI MASSA $3m$

DISPOSTE IN MODO DA FORMARE UN TRIANGOLO EQUILATERO



$$G_1 \equiv \left[\frac{\ell}{2}, 0\right] \qquad G_3 \equiv \left[\frac{\ell}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{1/2}, \frac{\ell}{2}\overbrace{\sin\frac{\pi}{3}}^{\sqrt{3}/2}\right] = \left[\frac{\ell}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right]$$

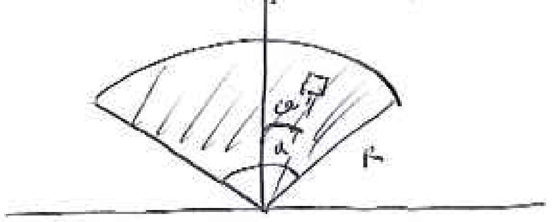
$$G_2 \equiv \left[\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right] = \left[\frac{3}{4}\ell, \frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right]$$

$$x_G = \frac{2m\,\frac{\ell}{2} + 3m\cdot\frac{\ell}{4} + m\cdot\frac{3}{4}\ell}{6m} = \frac{\frac{5}{2}\ell}{6} = \frac{5}{12}\ell$$

$$y_G = \frac{2m\cdot 0 + 3m\,\frac{\sqrt{3}}{4}\ell + m\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\ell}{6m} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell$$

---

2) CALCOLARE IL BARICENTRO DEL SETTORE CIRCOLARE OMOGENEO DI RAGGIO R E DI AMPIEZZA α



OVVIAMENTE $x_G = 0$

$$y_G = \frac{1}{m}\int y_P\,dm = \frac{\sigma}{m}\iint_D \rho\sin\theta\;\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{m}\int_0^R \rho^2\,d\rho\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{\sigma}{m}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R\left[\sin\theta\right]_{-\alpha/2}^{\alpha/2}$$

$$= \frac{\sigma}{m}\,\frac{R^3}{3}\left\{+\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = \frac{\sigma}{m}\,\frac{R^3}{3}\,2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

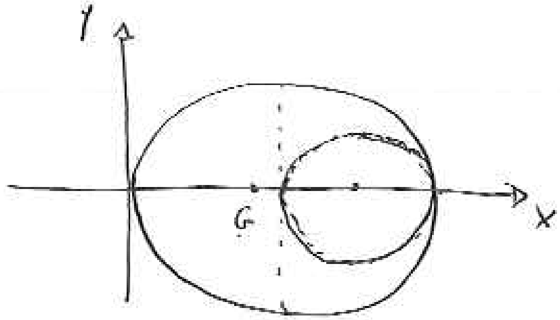
$$m = \sigma \iint_D \rho \, d\rho \, d\alpha = \sigma \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R \alpha = \sigma \frac{R^2 \alpha}{2}$$

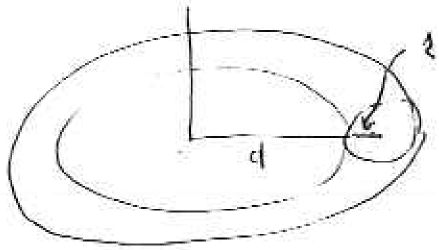
DA CUI $\quad y_G = \frac{\sigma \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha/2 \cdot 2}{\sigma R^2 \alpha} = \frac{4R}{3\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

NEL CASO DEL SEMIDISCO $\quad \alpha = \pi \qquad y_G = \frac{4R}{3\pi}$

3)
CALCOLARE IL BARICENTRO DI UN DISCO OMOGENEO DI RAGGIO R CON UN BUCO CIRCOLARE DI RAGGIO R/2 CON I DUE CENTRI A DISTANZA $\frac{R}{2}$

GULDINO:





$V = \pi r^2 \cdot 2\pi (r + d)$

$V = S \, x_G \, \alpha \qquad V_1 = \pi R^2 \cdot 2\pi (R + 0) = 2\pi^2 R^3 \qquad (d = 0)$

$V_2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 2\pi \left(\frac{R}{2} + R\right) = \frac{3}{4}\pi^2 R^3 \qquad (d = R)$

$V = V_1 - V_2 = 2\pi^2 R^3 - \frac{3}{4}\pi^2 R^3 = \frac{5}{4}\pi^2 R^3$

$S = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi R^2$

DA CUI $\quad x_G = \frac{V}{S \cdot 2\pi} = \frac{\frac{5}{4}\pi^2 R^3}{\frac{3}{4}\pi R^2 \cdot 2\pi} = \frac{5}{6} R$

ALTRIMENTI CONSIDERIAMO IL METODO "STANDARD"

PRIMO DISCO DI CENTRO $G_1 \equiv (R, 0) \quad$ MASSA $M_1 = \sigma \pi R^2$

SECONDO DISCO DI CENTRO $G_2 \equiv (R + R/2, 0) \quad$ MASSA $M_2 = -\sigma \pi (R/2)^2$

da cui

$$x_G = \frac{\sigma \pi R^2 \cdot R - \sigma \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} R}{\sigma \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{R^{\not 2}\left(1 - \frac{3}{8}\right)}{R^{\not 2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} R$$

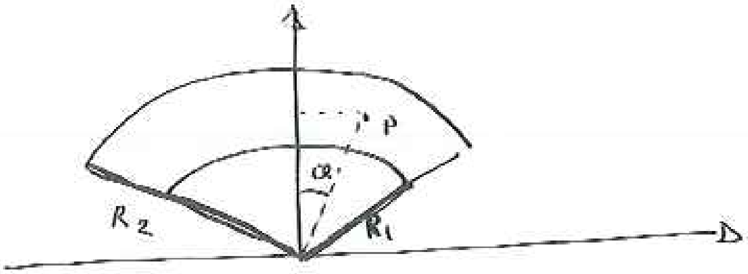
$$= \frac{5}{6} R.$$

$$M_2 + M_1 = M = \sigma \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \sigma \pi R^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4M}{3\pi R^2}$$

Es.

4) CALCOLARE IL BARICENTRO DI UN SETTORE OMOGENEO DI CORONA CIRCOLARE DI RAGGI R_1 ed R_2 ($R_1 < R_2$) ed AMPIEZZA α



$$y_P = \rho \cos\varphi \qquad y_G = \frac{1}{m} \iint_D y_P \, \sigma \, dc = \quad (dc \to \rho \, d\rho \, d\varphi)$$

$$= \frac{\sigma}{m} \iint_D \rho \cos\varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{\sigma}{m} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \, d\rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\sigma}{m} \cdot \frac{1}{3} \left[R_2^3 - R_1^3 \right] \left[\sin\varphi \right]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} =$$

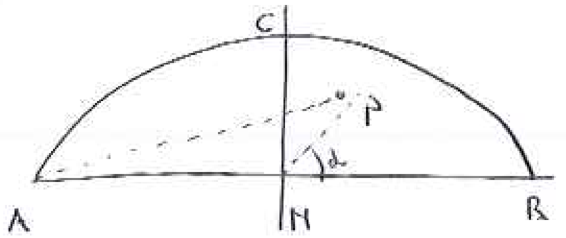
$$= \frac{\sigma}{m} \cdot \frac{1}{3} \left[R_2^3 - R_1^3 \right] 2 \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{m} \frac{2}{3} \left[R_2^3 - R_1^3 \right] \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$m = \sigma \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = \sigma \int_{R_1}^{R_2} \rho \, d\rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi = \frac{\sigma}{2} \cdot \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \alpha$$

da cui

$$y_G = \frac{\frac{2}{3} \left[R_2^3 - R_1^3 \right] \sin\alpha/2}{\frac{1}{2} \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \alpha} = \frac{4 \left(R_2^3 - R_1^3 \right) \sin(\alpha/2)}{3\alpha \left(R_2^2 - R_1^2 \right)}$$

5) CALCOLARE IL BARICENTRO DI UN SEMICERCHIO S DI RAGGIO R NON OMOGENEO CON DENSITA' (4)



$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{(P-A)\cdot(C-M)}{R^2}\right)$$

CON P UN GENERICO PUNTO DI S E A, B, C, M I PUNTI IN FIGURA

$$(P-A)\cdot(C-M) = (P-A)_y R = yR \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{yR}{R^2}\right)$$

DA CUI: ANALOGAMENTE A PRIMA: $x_G = 0$ $y_G \neq 0$

$$\begin{cases} x_P = \rho \cos\alpha \\ y_P = \rho \sin\alpha \end{cases}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\int y_P \, dm = \frac{\iint_S \rho \sin\alpha \, \sigma \, \rho \, d\rho \, d\alpha}{\iint_S \sigma \, \rho \, d\rho \, d\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma_0 \iint \rho \sin\alpha \left(1 + \frac{\rho \sin\alpha}{R}\right) \rho \, d\rho \, d\alpha}{\sigma_0 \iint \left(1 + \frac{\rho \sin\alpha}{R}\right) \rho \, d\rho \, d\alpha} =$$

$$= \frac{\left\{ \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha + \frac{1}{R} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2\alpha \, d\alpha \right\}}{\int_0^R \rho \, d\rho \int_0^\pi d\alpha + \frac{1}{R} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha} =$$

$$= \frac{\left\{ \frac{R^3}{3} \left[-\cos\alpha\right]_0^\pi + \frac{1}{R} \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha \right\}}{\left\{ \frac{R^2}{2}\pi + \frac{1}{R} \frac{R^3}{3} \left[-\cos\alpha\right]_0^\pi \right\}} =$$

$$= \frac{\left\{ \frac{2}{3} R^3 + \frac{R^3}{4} \left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4} \left[\sin 2\alpha\right]_0^\pi \right] \right\}}{\left\{ \frac{R^2}{2}\pi + \frac{R^2}{3}\cdot 2 \right\}} = \frac{R^3 \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8} \right]}{R^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \right]}$$

CHE $x_G = 0$ SI VEDE SUBITO ANCHE ANALITICAMENTE IN QUANTO:

$$x_G = \frac{1}{m} \int x_p \, dm = \frac{1}{m} \iint_D \rho \cos\alpha \left(1 + \frac{\rho}{R} \sin\alpha \right) \rho \, d\rho \, d\alpha$$

OSSERVIAMO CHE

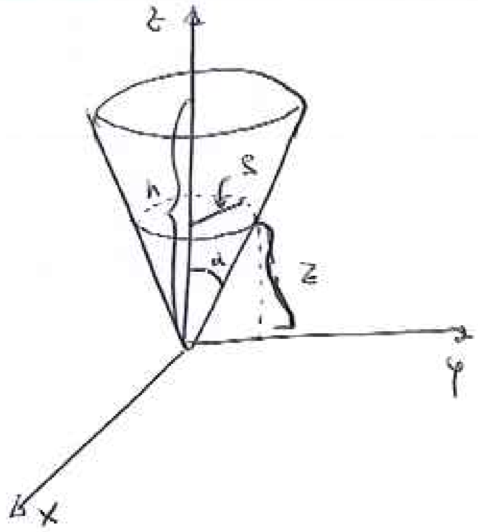
$$\int_0^{\pi} \cos\alpha = \left[\sin\alpha \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha = \int \sin\alpha \, d(\sin\alpha) = \left[\frac{\sin^2\alpha}{2} \right]_0^{\pi} = 0$$

DA CUI COME CI ASPETTAVAMO $x_G = 0$.

$\longleftrightarrow$

CALCOLARE IL BARICENTRO DI UN CONO OMOGENEO DI ALTEZZA h E RAGGIO DI BASE R



OVVIAMENTE $x_G = y_G = 0$

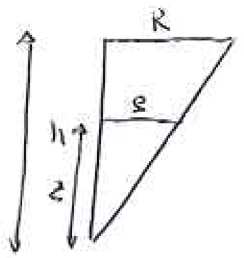
$$z_G = \frac{\cancel{\sigma} \iiint_D z \, dc}{\cancel{\sigma} \iiint_D dc}$$

POSSIAMO USARE:
COORDINATE CILINDRICHE

$x = \rho \cos\alpha$

$y = \rho \sin\alpha$

$z = z$



$$\frac{R}{\rho} = \frac{h}{z} \Rightarrow \rho = \frac{Rz}{h}$$

$$dc = \rho \, d\rho \, d\alpha \, dz$$

DA CUI:

$$z_G = \frac{\int_0^h z \, dz \cancel{\int_0^{2\pi} d\alpha} \int_0^{Rz/h} \rho \, d\rho}{\int_0^h dz \cancel{\int_0^{2\pi} d\alpha} \int_0^{Rz/h} \rho \, d\rho} = \frac{\int_0^h z \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}} \right]_0^{Rz/h} dz}{\int_0^h \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}} \right]_0^{Rz/h} dz} =$$

$$z_G = \frac{\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,dz}{\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^2\,dz} = \frac{\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h} = \frac{3}{4}h$$

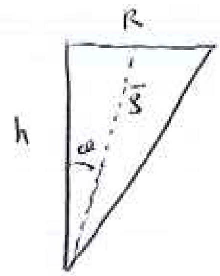
POSSIAMO USARE LE COORDINATE SFERICHE:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\alpha \cos\varphi \\ y = \rho \sin\alpha \sin\varphi \\ z = \rho \cos\alpha \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad 0 \le \alpha \le \delta \qquad 0 \le \rho \le \bar\rho$$

DOVE $\bar\rho \Rightarrow$ SI RICAVA RICORDANDO CHE:

$$\bar\rho \cos\alpha = h \Rightarrow \bar\rho = \frac{h}{\cos\alpha}$$

INFATTI



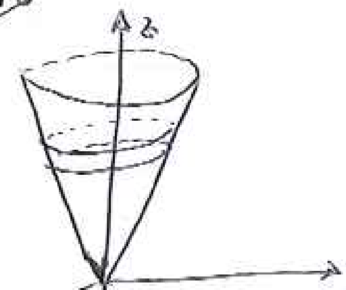
INOLTRE $dc = dV = \rho^2 \sin\alpha \, d\rho\, d\alpha\, d\varphi$

$$z_G = \frac{\iiint_\Delta z\,dc}{\iiint_\Delta dc} = \frac{\iiint_\Delta \rho\cos\alpha\,\rho^2\sin\alpha\,d\rho\,d\alpha\,d\varphi}{\iiint_\Delta \rho^2\sin\alpha\,d\rho\,d\alpha\,d\varphi} =$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\delta \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha \int_0^{h/\cos\alpha}\rho^3\,d\rho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\delta \sin\alpha\,d\alpha \int_0^{h/\cos\alpha}\rho^2\,d\rho} = \frac{\int_0^\delta \sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{h/\cos\alpha} d\alpha}{\int_0^\delta \sin\alpha\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{h/\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}\int_0^\delta \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\,d\alpha}{\frac{h^3}{3}\int_0^\delta \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\,d\alpha} = \frac{3}{4}h.$$

INFINE NOTA



SE CONSIDERO IL CILINDRETTO

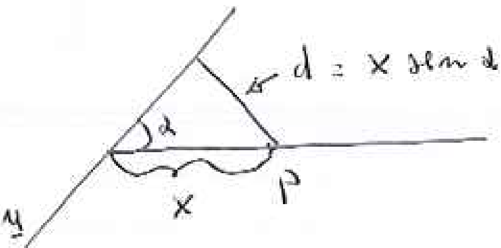
$$dV = \pi r^2\,dz = \pi\left(\frac{Rz}{h}\right)^2 dz$$

IL BARICENTRO TOTALE COME SOMMA DEI BARICENTRI DEI CILINDRETTI

$$z_G = \frac{\int_0^h z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 \, dz}{\int \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 \, dz} = \frac{\int_0^h z^3 \, dz}{\int_0^h z^2 \, dz} = \frac{3}{4} h.$$

MOMENTI DI INERZIA:

1) CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UN'ASTA DI MASSA m E LUNGHEZZA ℓ, RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER UN SUO ESTREMO E FORMANTE CON L'ASTA UN ANGOLO α



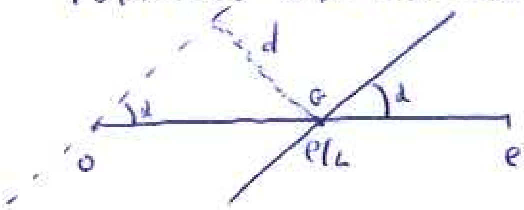
$P \equiv [x, 0, 0] \qquad x \in [0, \ell]$

$$I_\mu = \int_0^\ell (x \,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \, \overbrace{\sigma \, dx}^{dm} =$$

$$= \sigma \,\mathrm{sen}^2\alpha \int_0^\ell x^2 \, dx = \frac{1}{3} \underset{\frac{m}{\ell}}{\sigma} \,\mathrm{sen}^2\alpha \; \ell^3 = \frac{m}{\ell} \,\mathrm{sen}^2\alpha \, \frac{\ell^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} m \ell^2 \,\mathrm{sen}^2\alpha \qquad \left(\text{PER } \alpha = \pi/2 \quad I_\mu = \frac{1}{3} m \ell^2\right)$$

2) CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DELL'ASTA DEL PRECEDENTE ESERCIZIO RISPETTO AD UN ASSE BARICENTRICO FORMANTE UN ANGOLO α CON L'ASTA



APPLICHIAMO IL TEOREMA DI Huyghens

$I_\mu^{(O)} = I_\mu^{(G)} + m d^2$ DOVE d È LA DISTANZA DEL BARICENTRO G DALLA RETTA μ PASSANTE PER O

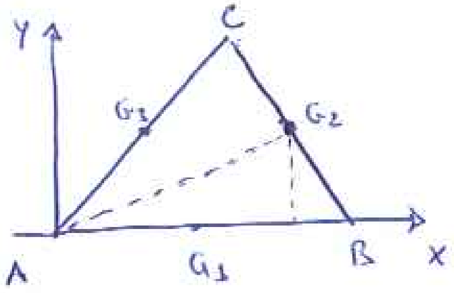
$I_\mu^{(G)} = I_\mu^{(O)} - m d^2 \qquad d = \frac{\ell}{2} \,\mathrm{sen}\,\alpha$ DA CUI

$$I_\mu^{(G)} = I_\mu^{(O)} - m \frac{\ell^2}{4} \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{3} m \ell^2 \mathrm{sen}^2\alpha - \frac{m}{4} \ell^2 \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{12} m \ell^2 \mathrm{sen}^2\alpha$$

3) CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO RIGIDO A FORMA TRIANGOLARE COSTITUITO DALLE TRE ASTE DELL'ESERCIZIO 1 RISPETTO

a) ALL'ASSE NORMALE AL TRIANGOLO PASSANTE PER A

b) ALL'ASSE NORMALE E BARICENTRICO.



RICORDIAMO CHE

$$G \equiv \left[\frac{5}{12} \ell, \frac{\sqrt{3}}{6} \ell \right]$$

$$\begin{cases} G_1 \equiv \left[\frac{\ell}{2}, 0 \right] ; \; G_2 \equiv \left[\frac{3}{4} \ell, \frac{\sqrt{3}}{4} \ell \right] \\ G_3 \equiv \left[\frac{\ell}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \ell \right] \end{cases}$$

$$I_A = I_A(\overline{AB}) + I_A(\overline{BC}) + I_A(\overline{CA})$$

RICORDIAMO CHE

$\overline{AB}$ HA UNA MASSA $2m$ $\Rightarrow I_A(AB) = \frac{1}{3}(2m)\ell^2 = \frac{2}{3} m \ell^2$

$\overline{CA}$ " " " $3m$ $\Rightarrow I_A(AC) = \frac{1}{3}(3m)\ell^2 = m\ell^2$

$\overline{BC}$ " " " m $\Rightarrow$ APPLICHIAMO IL TEOR. DI HUYGENS

$$I_A(\overline{BC}) = I_{G_2}(\overline{BC}) + m\,(\overline{AG_2})^2$$

(ASCISSA DI G_2 ↓, ORDINATA DI G_2 ↓)

$$I_{G_2}(BC) = \frac{1}{12} m \ell^2 \quad , \quad (\overline{AG_2})^2 = \left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ell\right)^2 = \frac{3}{4}\ell^2$$

DA CUI.

$$I_A(\overline{BC}) = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{3}{4} m \ell^2 = \frac{5}{6} m \ell^2$$

DA CUI.

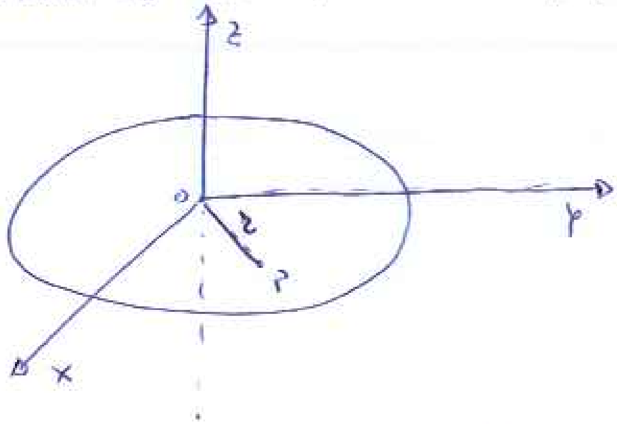
$$I_A = \left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{5}{6} \right) m \ell^2 = \frac{5}{2} m \ell^2$$

b) PER CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE

$$I_A = I_G + (6m)(\overline{GA})^2 \qquad \text{DA CUI} \qquad I_G = I_A - 6m(\overline{GA})^2$$

$$(\overline{GA})^2 = \left(\frac{5}{12}\ell\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ell\right)^2 = \frac{37}{144}\ell^2 \Rightarrow I_G = \frac{5}{2} m \ell^2 - (6m)\cdot\frac{37}{144}\ell^2 = \frac{23}{24} m \ell^2$$

CALCOLARE I MOMENTI DI INERZIA DI UN DISCO OMOGENEO D DI MASSA M E RAGGIO R RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO NORMALE ED ALL'ASSE BARICENTRICO COMPLANARE:



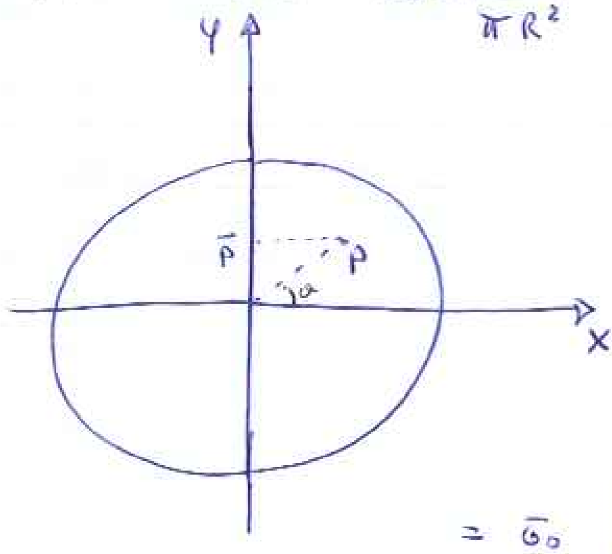
$$I_{z,0} = \int \rho^2 dm =$$

$$= \sigma \iint_D \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \sigma_0 \frac{\pi}{2} R^4$$

RICORDANDO CHE $\sigma_0 = \frac{M}{\pi R^2}$

$$I_{z,0} = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$



$$I_{y,0} = \int (P - \bar{P})^2 dm =$$

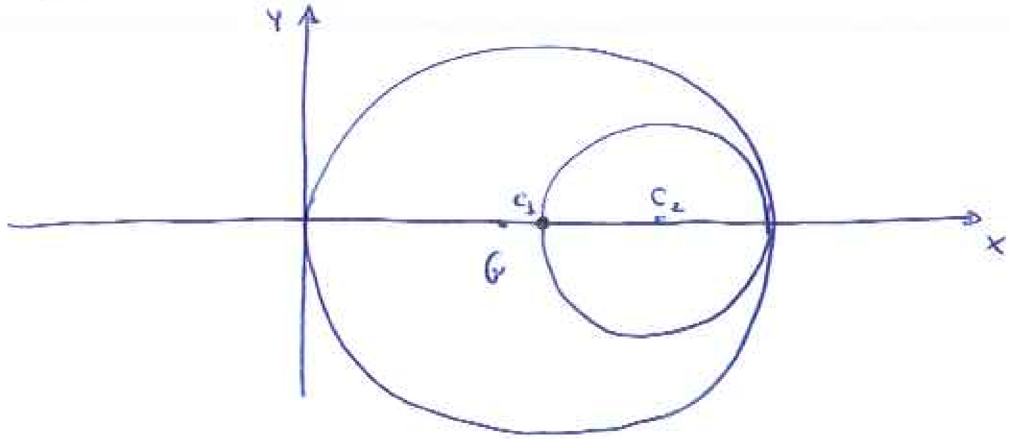
$$= \int x^2 dm = \sigma_0 \iint_D \rho^2 \cos^2\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \sigma_0 \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4} \left[\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \right]$$

$$= \sigma_0 \pi \frac{R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} M R^2$$

CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO E NORMALE DI UN DISCO OMOGENEO DI RAGGIO R E MASSA M CON UN BUCO CIRCOLARE DI RAGGIO $\frac{R}{2}$ ED I DUE CENTRI A DISTANZA $R/2$



RICORDIAMO CHE $G = \left[\frac{5}{6}R, 0\right]$

CALCOLIAMO I DUE MOMENTI DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE NORMALE PASSANTE PER G, DEI DUE DISCHI "PIENO" E "VUOTO"

$I^{(pieno)}_{G,z}$ SI OTTIENE DALLA RELAZIONE

$$I^{(P)}_{G,z} = I^{(P)}_{C_1,z} + M_P\left(\overline{GC_1}\right)^2 = \frac{1}{2} M_P R^2 + M_P\left(\frac{1}{6}R\right)^2 = \frac{19}{36} M_P R^2 = \frac{19}{27} M R^2$$

$M_P = \frac{4}{3} M$ (INFATTI $M = \sigma_0 \pi R^2 - \sigma_0 \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\sigma_0 \pi R^2$

$M_V = -\frac{1}{3} M$ DA CUI $\boxed{\sigma_0 = \frac{4}{3}\frac{M}{\pi R^2}}$ DA CUI PER CALCOLARE

$$M_P = \sigma_0 \pi R^2 = \frac{4}{3}\frac{M}{\pi R^2}\cdot \pi R^2 = \frac{4}{3} M$$ ANALOGAMENTE

$$M_V = -\sigma_0 \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}\frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{4} = -\frac{1}{3} M\ )$$

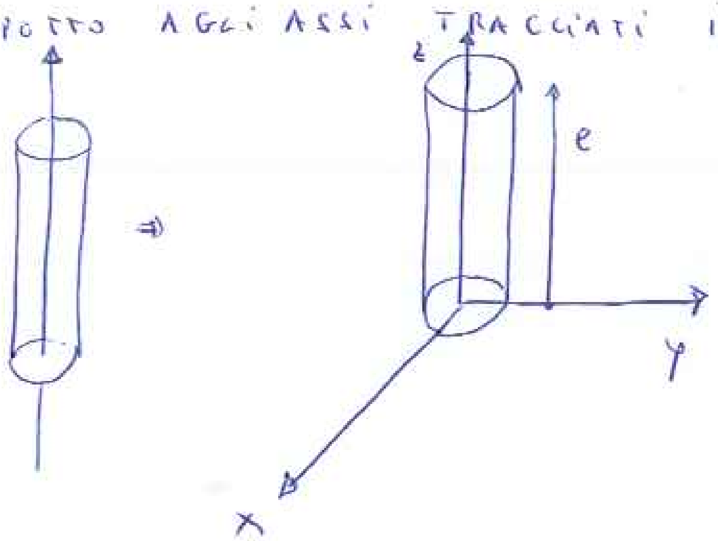
ANALOGAMENTE

$$I^{(vuoto)}_{G,z} = I^{(V)}_{G,z} = I^{(V)}_{C_2,z} + M_V\left(\overline{C_2 G}\right)^2 = \frac{1}{2} M_V \frac{R^2}{4} + M_V\left(\frac{1}{6}R + \frac{1}{2}R\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} M_V R^2 + M_V \frac{4}{9} R^2 = \frac{41}{72} M_V R^2 = \frac{41}{72}\cdot\left(-\frac{1}{3}M\right)R^2 = -\frac{41}{216} M R^2$$

DA CUI: $I_{G,z} = I^{(P)}_{G,z} + I^{(V)}_{G,z} = \frac{19}{27} M R^2 - \frac{41}{216} M R^2 = \frac{37}{72} M R^2$

CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UN CILINDRO RISPETTO AGLI ASSI TRACCIATI IN FIGURA



$$I_{G,z} = \iiint d^2\, dm$$

$$d^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$dm = \tau_0\, \rho\, d\rho\, d\alpha\, dz$$

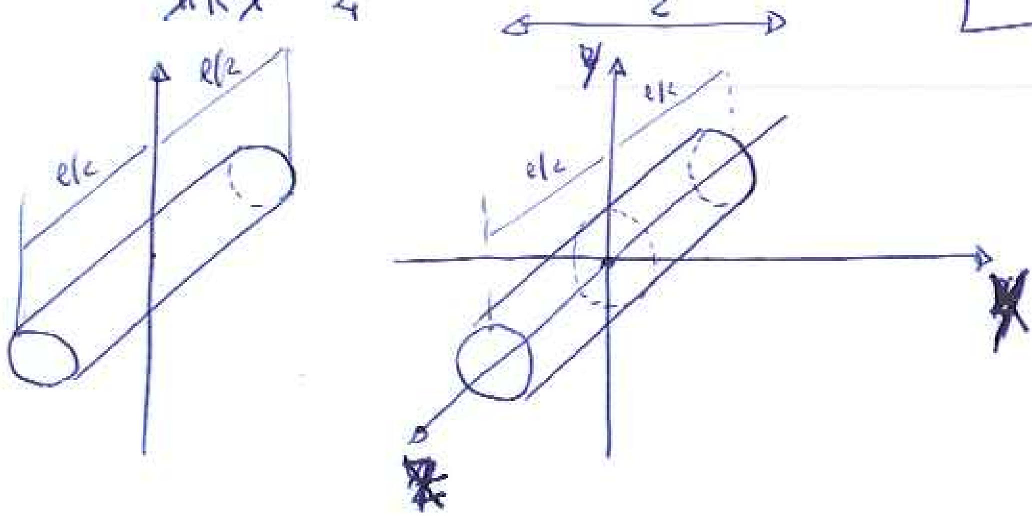
DA CUI $\displaystyle I_{Gz} = \tau_0 \iiint_D \rho^3\, d\rho\, d\alpha\, dz = \tau_0 \int_0^R \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{e} dz$

$$= \tau_0 \frac{R^4}{4} 2\pi e$$

RICORDANDO CHE $\tau_0 = \dfrac{M}{\pi R^2 e}$

$$I_{Gz} = \frac{M}{\pi R^2 e} \frac{R^4}{4} 2\pi e = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{1}{2} M R^2}$$



$P = (x, y, z)$

$\bar{P} = (0, y, 0)$

$$(P - \bar{P})^2 = x^2 + z^2$$

$$0 \le x^2 + y^2 \le R^2$$

$$-\frac{e}{2} \le z \le \frac{e}{2}$$

$$I_{yG} = \iiint_D (x^2 + z^2)\, \tau_0\, dx\, dy\, dz = \tau_0 \iiint_D (\rho^2 \cos^2\alpha + z^2)\, \rho\, d\rho\, d\alpha\, dz$$

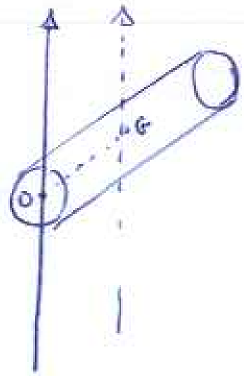
$$I_{yG} = \sigma_0 \left\{ \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz + \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z^2 dz \right.$$

$$= \sigma_0 \left\{ \frac{R^4}{4} \ell \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} d\alpha + \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} \right\} =$$

$$= \sigma_0 \left\{ \frac{R^4}{4} \ell \left[\frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4} \left[\sin 2\alpha \right]_0^{2\pi} \right] + \frac{R^2}{3} \pi \cdot \frac{\ell^3}{4} \right\}$$

$$= \sigma_0 \left\{ \frac{R^4}{4} \ell \pi + \frac{R^2 \pi \ell^3}{12} \right\} = \frac{M}{\pi R^2 \cdot \ell} \left\{ \frac{R^4}{4} \ell \pi + \frac{R^2}{12} \pi \ell^3 \right\}$$

$$\boxed{I_{yG} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M \ell^2}$$



APPLICHIAMO HUYGHENS

$$I_{u,O} = I_{u,G} + M \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M \ell^2\right) + M \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{3} M \ell^2$$

APPLICHIAMO HUYGHENS

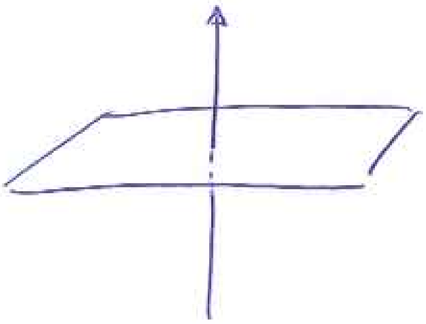
$$I_u = I_{u,G} + M R^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$$

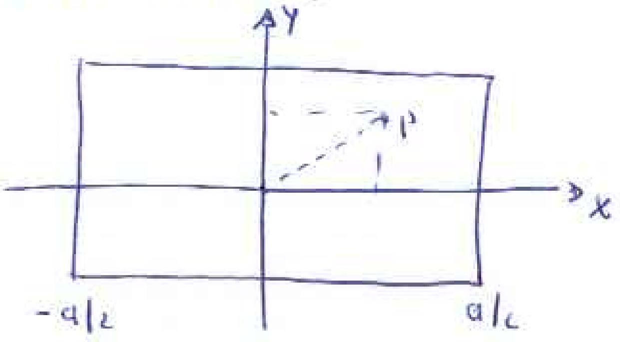
CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA LAMINA RETTANGOLARE DI LATO MAGGIORE a E LATO MINORE b RISPETTO AD:

A) UN ASSE BARICENTRALE NORMALE AL PIANO

B) UN ASSE BARICENTRALE PASSANTE PER IL PIANO CHE DIVIDE IL LATO MAGGIORE IN DUE PARTI EGUALI.

A)





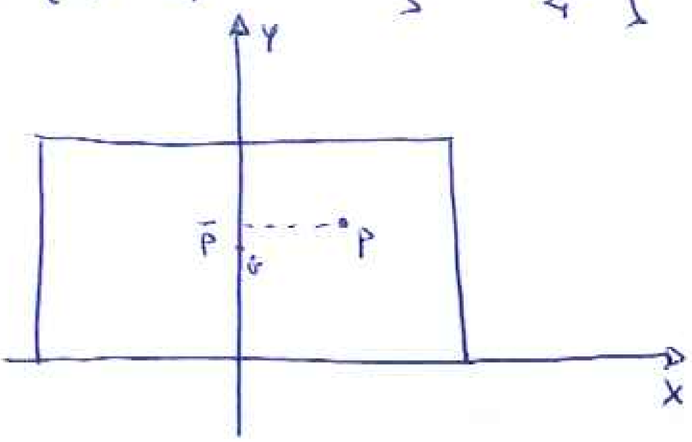
$$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$$
$$-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$$

$$I_{zG} = \iint_D (x^2+y^2)\,dm = \sigma \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} x^2\,dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy \right\}$$

$$= \sigma \left\{ \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} \cdot b + a \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} \right\} =$$

$$= \frac{M}{ab} \left\{ \frac{1}{3}\,\frac{a^3}{4}\,b + \frac{1}{3}\,a\,\frac{b^3}{4} \right\} = \frac{1}{12} M (a^2+b^2)$$

B)

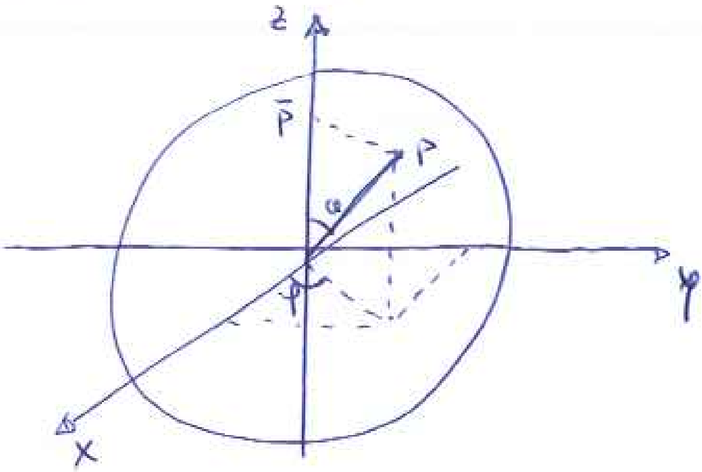


$$I_{y,G} = \iint_D x^2\,dm = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} x^2\,dx \int_{0}^{b} dy$$

$$= \frac{M}{ab} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} b$$

$$I_{y,G} = \frac{M}{a\not{b}} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{a^3 \not{b}}{4} = \frac{1}{12} M a^2$$

CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA SFERA OMOGENEA DI MASSA M E RAGGIO R RISPETTO AD UN SUO DIAMETRO

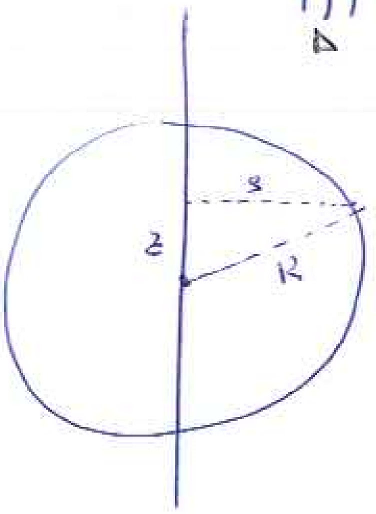


$$I_{z,G} = \iiint (P - \bar{P})^2 \, dm$$

$$= \iiint_D (x^2 + y^2) \, dm$$

CONVIENE INTEGRARE IN COORDINATE CILINDRICHE

$$I_{z,G} = \sigma_0 \iiint_D \rho^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \qquad \text{DOVE} \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -R \le z \le R \\ 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - z^2} \end{array}$$



$\leftarrow \rho = \sqrt{R^2 - z^2}$ DA CUI AVREMO

$$I_{zG} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left\{ \int_{-R}^{R} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \right\} =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} \left\{ 2\pi \int_{-R}^{R} dz \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \right\} = \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \, dz =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{-R}^{R} (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) \, dz = \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \left\{ 2R^5 + \frac{1}{5} \left[z^5 \right]_{-R}^{R} \right.$$

$$\left. - 2R^2 \frac{1}{3} \left[z^3 \right]_{-R}^{R} \right\} = \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \left\{ 2R^5 + \frac{2}{5} R^5 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} R^2 \cdot 2R^3 \right] = \frac{3}{8} M R^2 \left[2 + \frac{2}{5} - \frac{4}{3} \right] = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{15} M R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

IN COORDINATE SFERICHE AVREMO

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \sin\alpha \\ y = \rho \sin\varphi \sin\alpha \\ z = \rho \cos\alpha \end{cases} \qquad x^2+y^2 = \rho^2 \sin^2\alpha$$

da cui avremo $dc = \rho^2 \sin\alpha \, d\rho \, d\alpha \, d\varphi$

$$I_{z,G} = \sigma_0 \iiint_D (\rho^2 \sin^2\alpha) \, \rho^2 \sin\alpha \, d\rho \, d\alpha \, d\varphi =$$

$$= \sigma_0 \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3\alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma_0 \, 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\alpha \, d\alpha$$

OPPURE $\Rightarrow$ $\sin^3\alpha = \sin\alpha \sin^2\alpha = \sin\alpha (1-\cos^2\alpha)$

RICORDIAMO CHE: $\sin^3\alpha = \sin\alpha \sin^2\alpha = \sin\alpha \left[\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sin\alpha - \sin\alpha \cos 2\alpha\right\} = \frac{1}{2}\left\{\sin\alpha - \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^3\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha$$

da cui $\quad \sin^3\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha \cos^2\alpha$

$$\int_0^\pi \sin^3\alpha \, d\alpha = \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha - \int_0^\pi \sin\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha =$$

$$= \left[-\cos\alpha\right]_0^\pi + \int_1^{-1} \cos^2\alpha \, d(\cos\alpha) = -\left[\cos\alpha\right]_0^\pi + \underbrace{\left[\frac{\cos^3\alpha}{3}\right]_0^\pi}_{-\frac{2}{3}} =$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

da cui $\quad I_{z,G} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \dfrac{2}{5}\pi R^5 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{5} M R^2$

CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA SUPERFICIE SFERICA OMOGENEA DI MASSA M E RAGGIO R RISPETTO AD UN SUO DIAMETRO

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = R\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ z = R\cos\alpha \end{cases} \qquad x^2+y^2 = R^2\,\mathrm{sen}^2\alpha$$

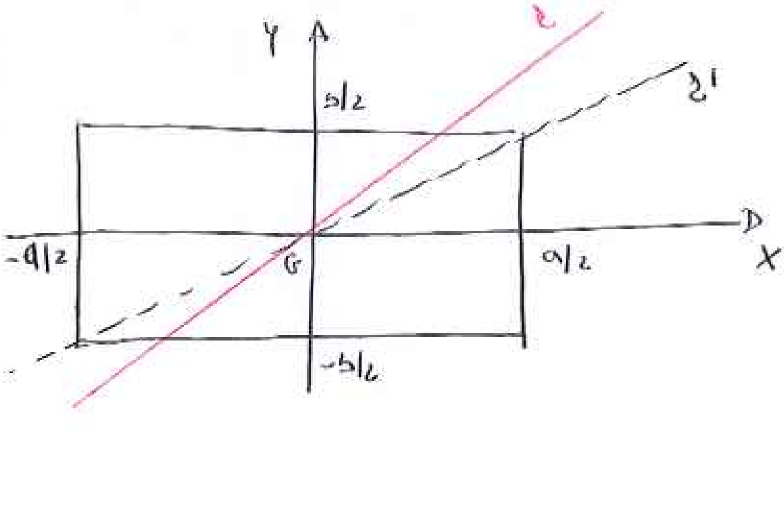
$$d\sigma = dx\,dy = R^2\,\mathrm{sen}\,\alpha \,d\alpha\, d\varphi$$

da cui $I_{z,G} = \sigma_0 \iint_D R^4 \,\mathrm{sen}^3\alpha\, d\alpha\, d\varphi = \sigma_0 R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3\alpha\, d\alpha$

$$= \sigma_0 R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot R^4 \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{2}{3} M R^2.$$

"TENSORI DI INERZIA"

A) CALCOLARE IL TENSORE DI INERZIA DI UNA LAMINA RETTANGOLARE OMOGENEA R DI MASSA M E LATI a, b RISPETTO AL RIFERIMENTO CENTRALE DI INERZIA RIPORTATO IN FIGURA



B) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSOIDE (CENTRALE) DI INERZIA ED UTILIZZARLA PER CALCOLARE I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO ALLA RETTA z (BISETTRICE) ED z' (DIAGONALE)

$$I_{11} = \iint_D [(x^2+y^2) - x^2]\,dm = \iint_D y^2\,dm = \sigma_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy = \sigma_0 a \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{M}{ab}\cdot a\,\frac{b^3}{12} = \frac{1}{12} M b^2$$

$$I_{22} = \iint x^2\,dm = \sigma_0 \int_{-a/2}^{a/2} x^2\,dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = \frac{M}{ab}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2}\cdot b = \frac{1}{12} M a^2$$

E ANALOGAMENTE

$$I_{33} = \iint_D (x^2+y^2)\,dm = I_{11}+I_{22} = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$$

$I_{13} = I_{23} = 0$ E ANALOGAMENTE $I_{12} = \iint_D xy\,dm = 0$

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

B)

L'ELLISSOIDE DI INERZIA SI SCRIVERA' COME

$$\frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M(a^2+b^2)}{12}z^2 = 1$$

CONSIDERIAMO IL PUNTO DI INTERSEZIONE DI ξ CON TALE ELLISSOIDE

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ \frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M(a^2+b^2)}{12}z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{M(a^2+b^2)}{12}y^2 = 1$$

DA CUI IL PUNTO DI INTERSEZIONE SARA' $\begin{cases} x_P^2 = y_P^2 = \frac{12}{M(a^2+b^2)} \\ z_P = 0 \end{cases}$

QUINDI LA DISTANZA $\overline{OP}^2 = x_P^2 + y_P^2 = \frac{24}{M(a^2+b^2)}$

DA CUI $I_{\xi,O} = \frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{M(a^2+b^2)}{24}$

ANALOGAMENTE IL PUNTO DI INTERSEZIONE DI ξ' CON L'ELLISSOIDE

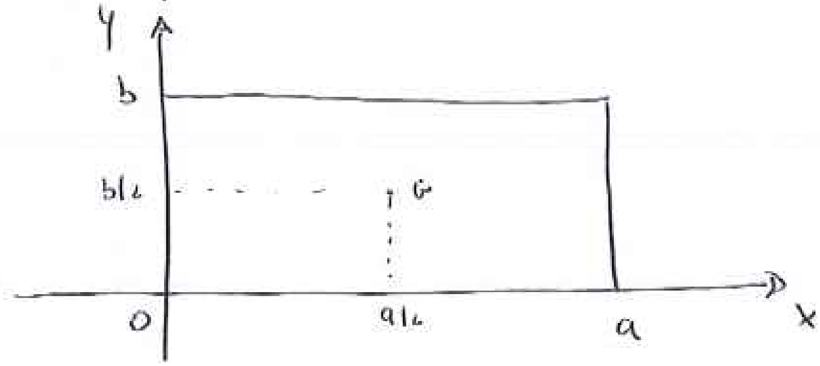
$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = 0 \\ \frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M(a^2+b^2)}{12}z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\frac{Mb^2}{12}x_P^2 = 1 \Rightarrow x_P^2 = \frac{6}{Mb^2}$$

$z_P = 0$ $\qquad y_P^2 = \frac{6}{Ma^2}$

da cui $\overline{OP}^2 = x_P^2 + y_P^2 = \frac{6}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{6}{M}\,\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}$

Quindi $I_{O,\gamma'} = \frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{M}{6}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

CALCOLARE LA MATRICE DI INERZIA RISPETTO AD UN RIF. AVENTE COME ORIGINE UN VERTICE DELLA LAMINA E ASSI x ed y SOVRAPPOSTI AI LATI.



$$I_{11} = \iint y^2\,dm = \sigma_0 \int_0^a dx \int_0^b y^2\,dy = \frac{M}{ab}\cdot a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3}Mb^2$$

$$I_{22} = \sigma_0 \int_0^a x^2\,dx \int_0^b dy = \frac{M}{ab}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a b = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

$$I_{12} = -\sigma_0 \int_0^a x\,dx \int_0^b y\,dy = -\frac{M}{ab}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = -\frac{1}{4}Mab$$

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

OPPURE POTEVAMO SCRIVERE

$$I_{ab}^{(O)} = I_{ab}^{(G)} + M\left(x_c^{(G)} x_c^{(G)} \delta_{ab} - x_a^{(G)} x_b^{(G)} \right)$$

$$M\left(x_c^{(G)} x_c^{(G)} \delta_{ab} - x_a^{(G)} x_b^{(G)} \right) = \begin{pmatrix} M(x_2^{(G)})^2 & -M x_1^{(G)} x_2^{(G)} & 0 \\ -M x_1^{(G)} x_2^{(G)} & M(x_1^{(G)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\left[(x_1^{(G)})^2 + (x_2^{(G)})^2\right] \end{pmatrix}$$

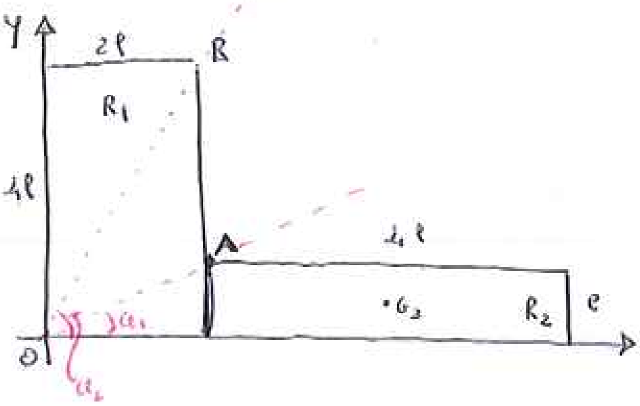
$$x^G \equiv \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right]$$

$$M\left(x_c^{(G)} x_c^{(G)} \delta_{ab} - x_a^{(G)} x_b^{(G)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{4} & -\frac{M}{4}ab & 0 \\ -\frac{M}{4}ab & \frac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{4}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$$I_{ab}^{(O)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{M}{4}b^2 & -\frac{M}{4}ab & 0 \\ -\frac{M}{4}ab & \frac{M}{4}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{4}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{M}{4}ab & 0 \\ -\frac{M}{4}ab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

SI CONSIDERI LA FIGURA PIANA Σ RIPORTATA IN FIGURA COMPOSTA DALLE DUE LAMINE RETTANGOLARI OMOGENEE R_1 ed R_2 CON R_1 DI MASSA $3m$ E LATI 2ℓ E 4ℓ E DA R_2 DI MASSA m E LATI 4ℓ ed ℓ.



A) DETERMINARE LA MATRICE DI INERZIA DI Σ RISPETTO AL RIF. $\{O, xyz\}$

B) I MOMENTI DI INERZIA DI Σ RISPETTO ALLE RETTE $\overline{OA}$ ed $\overline{OR}$

$$I^{(O)}_{ab} = I^{(O)}_{ab}(R_1) + I^{(O)}_{ab}(R_2)$$

$$I^{(O)}_{ab}(R_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} M b^2 & -\frac{M}{4} ab & 0 \\ -\frac{M}{4} ab & \frac{1}{3} M a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} M (a^2+b^2) \end{pmatrix} = \qquad \begin{cases} a = 2\ell \\ b = 4\ell \\ M = 3m \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 m\ell^2 & -6 m\ell^2 & 0 \\ -6 m\ell^2 & 4 m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$I^{(O)}_{ab}(R_2) = I^{(G_2)}_{ab}(R_2) + M \left(X^{(G_2)}_n X^{(G_2)}_n \delta_{ab} - X^{(G_2)}_a X^{(G_2)}_b \right) \qquad G_2 \equiv [4\ell, \ell/2]$$

ΔΑ αυ'

$$I^{(G_2)}_{ab}(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} M (a^2+b^2) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} M = m \\ a = 4\ell \\ b = \ell \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$M \left(X^{(G_2)}_n X^{(G_2)}_n \delta_{ab} - X^{(G_2)}_a X^{(G_2)}_b \right) = \begin{pmatrix} m(\ell/2)^2 & -m 2\ell^2 & 0 \\ -m 2\ell^2 & m(4\ell)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m[(4\ell)^2 + (\ell/2)^2] \end{pmatrix}$$

ΔΑ αυ':

$$I^{(O)}_{ab}(R_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{m}{4}\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{4}{3} m\ell^2 + 16 m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12} m\ell^2 + \frac{65}{4} m\ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$I^{(0)}_{ab}(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} m\ell^2 & -2m\ell^2 & 0 \\ -2m\ell^2 & \frac{52}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{3} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$I^{(0)}_{ab}(P) = I^{(0)}_{ab}(R_1) + I^{(0)}_{ab}(R_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(16+\frac{1}{3}\right) m\ell^2 & -8m\ell^2 & 0 \\ -8m\ell^2 & \left(4+\frac{52}{3}\right) m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(20+\frac{53}{3}\right) m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{49}{3} m\ell^2 & -8m\ell^2 & 0 \\ -8m\ell^2 & \frac{64}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{113}{3} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

B)

$\overline{OA} = \sqrt{\ell^2 + (2\ell)^2} = \sqrt{5}\,\ell$ da cui $\ell = \sqrt{5}\,\ell \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\ell = \sqrt{5}\,\ell \cos\alpha_1 \Rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

da cui il versore della retta $\overline{OA}$ $u_{\overline{OA}} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

quindi

$$I_{\overline{OA}} = I_{ab}\, u^a u^b = \left\{\frac{49}{3}\cdot\frac{4}{5} + \frac{64}{3}\cdot\frac{1}{5} - 2\left(8\cdot\frac{2}{5}\right)\right\} m\ell^2 = \frac{164}{15} m\ell^2$$

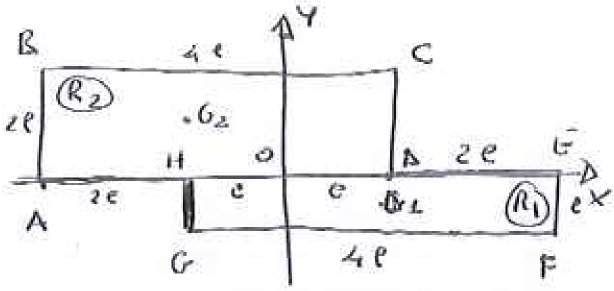
mentre $\overline{OR} = \sqrt{(4\ell)^2 + (2\ell)^2} = 2\sqrt{5}\,\ell \Rightarrow 4\ell = 2\sqrt{5}\,\ell \cdot \operatorname{sen}\alpha_2$

$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad 2\ell = 2\sqrt{5}\,\ell \cos\alpha_2$

$u_{\overline{OR}} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ $\Rightarrow I_{\overline{OR}} = I_{ab}\, u^a u^b = I_{11}(u^1)^2 + I_{22}(u^2)^2 + 2I_{12}\,u^1 u^2 =$

$$I_{OR2} = m\ell^2\left[\frac{49}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{64}{3}\cdot\frac{4}{5} + 2\left(-8\cdot\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{209}{15}\, m\ell^2$$

Si consideri la figura rigida piana P come in figura ottenuta saldando assieme due lamine rettangolari $R_1 \equiv EFGH$ ed $R_2 \equiv ABCD$ entrambe omogenee e di massa m di dimensioni $\overline{BC} = \overline{GF} = 4\ell$; $\overline{AB} = 2\ell$; $\overline{EF} = \ell$; $\overline{AH} = \overline{HD} = \overline{DE} = 2\ell$



Preso il sistema di riferimento riportato in figura $\{O, x, y, z\}$ con O il punto medio di $\overline{HD}$, determinare

1) il tensore di inerzia rispetto $\{O, x, y, z\}$
2) il momento di inerzia del sistema rispetto alla retta $\overline{OF}$
3) il momento di inerzia del sistema rispetto alla normale alla lamina passante per G.

I due baricentri sono G_1 di $R_1 \Rightarrow G_1 = [\ell, -\ell/2]$

G_2 di $R_2 \Rightarrow G_2 = [-\ell, \ell]$

Quindi

$$I^{(O)}_{\alpha\beta}(R_1) = I^{(G_1)}_{\alpha\beta}(R_1) + M\left(x_u^{(G_1)} x_u^{(G_1)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G_1)} x_\beta^{(G_1)}\right)$$

$$I^{(O)}_{\alpha\beta}(R_2) = I^{(G_2)}_{\alpha\beta}(R_2) + M\left(x_u^{(G_2)} x_u^{(G_2)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G_2)} x_\beta^{(G_2)}\right)$$

$$I^{(G_1)}_{\alpha\beta}(R_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m(a^2+b^2) \end{pmatrix} \qquad a = 4\ell, \quad b = \ell$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{12} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$M\left(x_u^{(G_1)} x_u^{(G_1)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G_1)} x_\beta^{(G_1)}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{4} & m\ell^2/2 & 0 \\ m\ell^2/2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\ell^2+\frac{\ell^2}{4}\right) \end{pmatrix}$$

DA CUI:

$$I_{\alpha\beta}^{(o)}(R_1) = \begin{pmatrix} m\ell^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) & \frac{m\ell^2}{2} & 0 \\ \frac{m\ell^2}{2} & \left(\frac{4}{3}+1\right)m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{17}{12}+\frac{5}{4}\right)m\ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & \frac{m\ell^2}{2} & 0 \\ \frac{m\ell^2}{2} & \frac{7}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

ANALOGAMENTE:

$$I_{\alpha\beta}^{(G_2)}(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2+b^2) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a = 4\ell \\ b = 2\ell \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$M\left(x_u^{(G_2)} x_u^{(G_2)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G_2)} x_\beta^{(G_2)}\right) = \begin{pmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$I^{(O)}_{\alpha\beta}(R_2) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}+1\right)m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & \left(\frac{4}{3}+1\right)m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{3}+2\right)m\ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & \frac{7}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$I^{(O)}_{\alpha\beta}(R) = I^{(O)}_{\alpha\beta}(R_1) + I^{(O)}_{\alpha\beta}(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}m\ell^2 & \frac{3}{2}m\ell^2 & 0 \\ \frac{3}{2}m\ell^2 & \frac{14}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

2)

consideriamo la retta per $\overline{OF}$

$\overline{OE} = \overline{OF}\cos\alpha$ $\qquad$ $\overline{OF} = \sqrt{(\overline{OE})^2 + (\overline{EF})^2} = \sqrt{9\ell^2+\ell^2} = \ell\sqrt{10}$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{3\ell}{\sqrt{10}\,\ell} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{EF} = \overline{OF}\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\ell}{\sqrt{10}\,\ell} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

da cui il versore di $\overline{OF}$ sarà $u_{OF} \equiv \{\cos\alpha, -\sin\alpha\} =$

$$= \left\{\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$$

quindi:

$$I_{u_{OF}} = I^{(O)}_{\alpha\beta}(R)\, u^\alpha u^\beta = \frac{5}{3}m\ell^2\cdot\frac{9}{10} + \frac{14}{3}m\ell^2\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{3}{2}m\ell^2\cdot\left(-\frac{3}{10}\right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{u_{OF}} = \frac{16}{15}m\ell^2}$$

3) CONSIDERIAMO LA RETTA PASSANTE PER G.

CALCOLIAMO G $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_G = \frac{1}{2m}\left(m\, x_{G_1} + m\, x_{G_2}\right) = 0 \\ y_G = \frac{1}{2m}\left(m\, y_{G_1} + m\, y_{G_2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ell}{2} + \ell\right) = \frac{\ell}{4} \end{cases}$

$G = \left(0, \frac{\ell}{4}\right)$ OSSERVIAMO CHE $I_{z_0} = I^{(0)}_{\alpha\beta}(R)\, u^\alpha u^\beta = I^{(0)}_{33} = \frac{19}{3} m \ell^2$

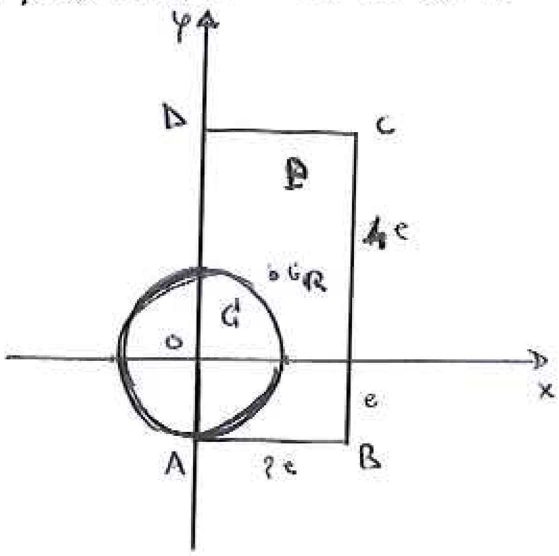
$u = (0, 0, 1)$

DA CUI:

$$I_{z,0} = I_{z,G} + 2m\left(\overline{GO}\right)^2 \Rightarrow I_{z,G} = \frac{19}{3} m\ell^2 - 2m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{19}{3} - \frac{1}{8}\right) m\ell^2 = \frac{149}{24} m\ell^2$$

SI CONSIDERI LA FIGURA RIGIDA PIANA $\mathcal{P}$ IN FIGURA, OTTENUTA SALDANDO DUE LAMINE, UNA RETTANGOLARE ED UNA CIRCOLARE INDICATE CON $\mathcal{R}$ E $\mathcal{C}$, ENTRAMBE OMOGENEE E DI MASSA m CIASCUNA. LA LAMINA RETTANGOLARE, DI VERTICI A, B, C, D HA DIMENSIONI $\overline{AB} = 2\ell$ E $\overline{BC} = 4\ell$, MENTRE QUELLA CIRCOLARE HA RAGGIO ℓ E CENTRO IN O CHE E' POSTO SUL LATO $\overline{AD}$ AD UNA DISTANZA ℓ DA A. LA LAMINA CIRCOLARE SI SOVRAPPONE PER UNA META' A QUELLA RETTANGOLARE.



SCELTO IL RIFERIMENTO $\{O, x, y, z\}$ COME IN FIGURA DETERMINARE IL TENSORE DI INERZIA DI $\mathcal{P}$ NEL RIFERIMENTO $\{O, x, y, z\}$

NOTA: TRASCURIAMO IL FATTO CHE $\mathcal{R}$ E $\mathcal{C}$ SIANO SOVRAPPOSTE

$$I^{(0)}_{\alpha\beta}(P) = I^{(0)}_{\alpha\beta}(R) + I^{(0)}_{\alpha\beta}(G)$$

IL BARICENTRO DI R $\quad G_R = [\ell, \ell]$

DA CUI

$$I^{(0)}_{\alpha\beta}(R) = I^{(G_R)}_{\alpha\beta} + m\left(X^{(G_R)}_k X^{(G_R)}_k \delta_{\alpha\beta} - X^{(G_R)}_\alpha X^{(G_R)}_\beta\right)$$

DOVE

$$I^{(G_R)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m (a^2+b^2) \end{pmatrix} = \qquad a = 2\ell \quad b = 4\ell$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} m \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} m \ell^2 \end{pmatrix}$$

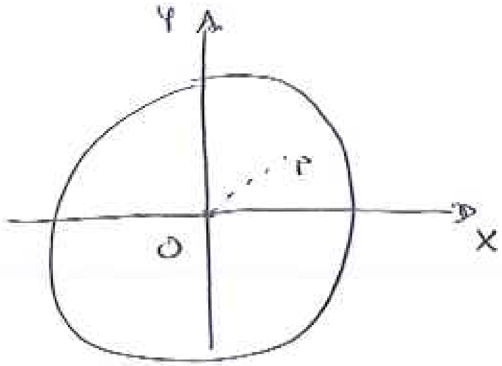
$$m\left(X^{(G_R)}_k X^{(G_R)}_k \delta_{\alpha\beta} - X^{(G_R)}_\alpha X^{(G_R)}_\beta\right) = \begin{pmatrix} m\ell^2 & -m\ell^2 & 0 \\ -m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

DA CUI:

$$I^{(0)}_{\alpha\beta}(R) = \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{3}+1\right) m\ell^2 & -m\ell^2 & 0 \\ -m\ell^2 & \left(\frac{1}{3}+1\right) m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{3}+2\right) m\ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} m\ell^2 & -m\ell^2 & 0 \\ -m\ell^2 & \frac{4}{3} m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO IL TENSORE DI INERZIA DI C RISPETTO AL RIF. $\{0, x, y, z\}$



$P \doteq (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, 0)$

$$I_{11} = \sigma \iint_{\Delta} \rho^2 \sin^2\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \sigma \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \sigma \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \left[\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_{22} = \sigma \iint_{\Delta} \rho^2 \cos^2\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \sigma \cdot \int_0^R \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \sigma \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \sigma \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{4} \left[\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{4} m R^2$$

$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{2} m R^2 \qquad I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$

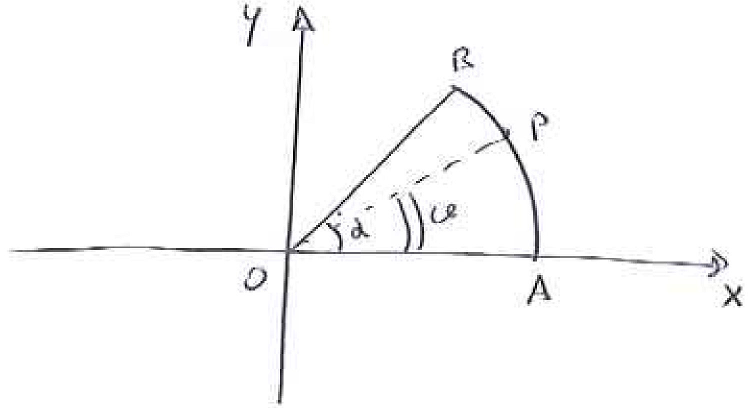
$$I^{(0)}_{\alpha\beta}(G) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m \ell^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$I^{(\omega)}_{\alpha\beta}(P) = \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{3} + \frac{1}{4}\right) m \ell^2 & - m \ell^2 & 0 \\ - m \ell^2 & \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) m \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{2}\right) m \ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{12} m \ell^2 & - m \ell^2 & 0 \\ - m \ell^2 & \frac{19}{12} m \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{6} m \ell^2 \end{pmatrix}$$

CONSIDERIAMO UN ARCO DI ANELLO $\widehat{AB}$ DI MASSA m E RAGGIO R, DI APERTURA $A\hat{O}B = \alpha$, OMOGENEO E POSTO NEL PIANO (X,Y) CALCOLIAMO IL TENSORE DI INERZIA NEL RIF. (O,X,Y,Z) IN FIGURA.



$P \equiv [R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ 0]$

$0 \leq \theta \leq \alpha$

RICORDIAMO CHE $ds = R\,d\theta \Rightarrow \int ds = R\int_0^\alpha d\theta = R\alpha$

DA CUI $\sigma = \dfrac{m}{R\alpha}$

$$I_{11}^{(O)} = \sigma\int y^2\,ds = \sigma\int_0^\alpha R^2\sin^2\theta\,R\,d\theta = \frac{m}{R\alpha}R^3\int_0^\alpha \sin^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{mR^2}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{mR^2}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^\alpha\right) =$$

$$= \frac{mR^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) = mR^2\frac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4\alpha}$$

$$I_{22}^{(O)} = \sigma\int x^2\,ds = \sigma\int_0^\alpha R^2\cos^2\theta\,R\,d\theta = \frac{m}{R\alpha}R^3\int_0^\alpha \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{mR^2}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{mR^2}{\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^\alpha\right\}$$

$$= mR^2\frac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{4\alpha}$$

$$I^{(0)}_{33} = \bar{I}^{(0)}_{11} + \bar{I}^{(0)}_{22} = mR^2$$

$$\bar{I}^{(0)}_{12} = -\sigma \int xy\, ds = -\sigma \int_0^\alpha R^2 \sin\varphi \cos\varphi \, R\, d\varphi = -\frac{m}{R\alpha} R^3 \int_0^\alpha \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{mR^2}{\alpha} \int_0^\alpha \sin\varphi \, d(\sin\varphi) = -\frac{mR^2}{\alpha}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= -mR^2 \frac{\sin^2\alpha}{2\alpha} \qquad I_{13} = I_{23} = 0$$

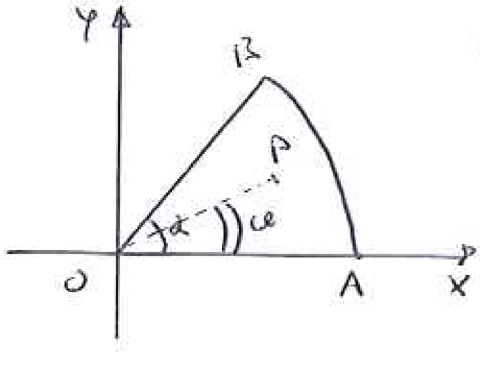
DA CUI:

$$\bar{I}^{(0)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} mR^2 \dfrac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4\alpha} & -mR^2 \dfrac{\sin^2\alpha}{2\alpha} & 0 \\ -mR^2 \dfrac{\sin^2\alpha}{2\alpha} & mR^2 \dfrac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{4\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

OSSERVIAMO CHE PER $\alpha = 2\pi$ ABBIAMO IL TENSORE DI INERZIA DI UN ANELLO

$$I^{(0)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

CONSIDERIAMO UN SETTORE CIRCOLARE OMOGENEO AOB, DI MASSA m, RAGGIO R ed APERTURA $A\hat{O}B = \alpha$. CALCOLARE IL TENSORE DI INERZIA NEL RIF $\{O, x, y, z\}$ ESSENDO IL SETTORE CIRCOLARE POSTO NEL PIANO x, y.



$P = [\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, 0]$ $\qquad 0 \le \varphi \le \alpha$

$\qquad 0 \le \rho \le R$

$dc = \rho\, d\rho\, d\varphi$

Deci:

$$I_{11}^{(0)} = \iint y^2\, dm = \sigma \iint (\rho \sin\varphi)^2 \rho\, d\rho\, d\varphi = \sigma \int_0^R \rho^3\, d\rho \int_0^\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$A = \iint_A \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^\alpha d\varphi = \frac{R^2}{2}\alpha \Rightarrow \sigma = \frac{m}{\frac{R^2\alpha}{2}} = \frac{2m}{R^2\alpha}$$

$$I_{11}^{(0)} = \frac{2m}{R^2\alpha} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \underbrace{\int_0^\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}_{\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}} = \frac{mR^2}{2\alpha} \cdot \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4}$$

$$I_{11}^{(0)} = mR^2 \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{8\alpha}$$

$$I_{22}^{(0)} = \iint x^2\, dm = \sigma \underbrace{\int_0^R \rho^3\, d\rho}_{\frac{R^4}{4}} \underbrace{\int_0^\alpha \cos^2\varphi\, d\varphi}_{\frac{2\alpha + 2\sin\alpha}{4}} = \frac{2m}{R^2\alpha} \cdot \frac{R^4}{4} \frac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{4} =$$

$$= mR^2 \frac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{8\alpha}$$

$$I_{33}^{(0)} = I_{11}^{(0)} + I_{22}^{(0)} = \frac{1}{2} mR^2$$

$I_{13}^{(0)} = I_{23}^{(0)} = 0$ pentru $I_{12}^{(0)} = -\iint_A xy\, dm = -\sigma \int_0^R \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^\varphi \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{\sin^2\alpha/2}$

$$= -\frac{2m}{R^2\alpha} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} = -mR^2 \frac{\sin^2\alpha}{4\alpha}$$

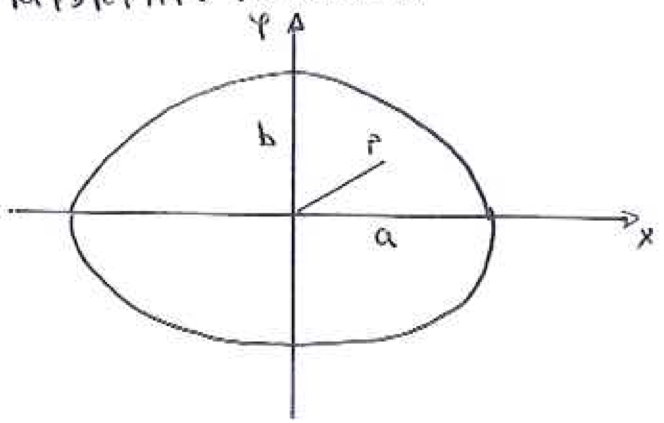
da cui

$$I^{(o)}_{d\beta} = \begin{pmatrix} mR^2 \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{8\alpha} & -mR^2 \frac{\sin^2\alpha}{4\alpha} & 0 \\ -mR^2 \frac{\sin^2\alpha}{4\alpha} & mR^2 \frac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{8\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} mR^2 \end{pmatrix}$$

da cui per $\alpha = 2\pi$ avremo il tensore di inerzia di un disco omogeneo rispetto da $\{O, x, y, z\}$

$$\bar{I}^{(o)}_{d\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} mR^2 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice di inerzia di una ellisse omogenea di massa m e semiassi a, b rispetto al riferimento $\{O x, y, z\}$ riportato in figura



$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 = 1 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 1$$

$$P \equiv [a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi,\ 0]$$

$$dA = ab\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$I^{(o)}_{11} = \sigma \iint b^2\rho^2\sin^2\varphi\,(ab\rho\, d\rho\, d\varphi) =$$

$$= \frac{m}{\pi ab} \cdot b^3 a \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{1/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi}_{\pi} = \frac{mb^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} mb^2$$

$$I_{22} = \sigma \iint_A a^2\rho^2\cos^2\varphi\,(ab\rho\, d\rho\, d\varphi) = \frac{m}{\pi ab}\frac{a^3 b}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi}_{\pi} = \frac{1}{4} ma^2$$

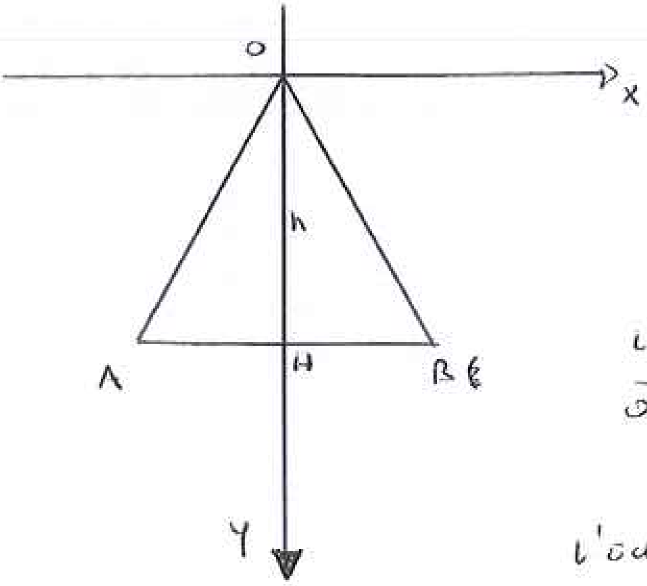
$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2)$$

$I_{13} = I_{23} = 0 \qquad I_{12} = -\sigma \iint xy\, d\sigma = -\sigma \int ab\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\rho =$

$= -\frac{m}{\pi ab} \cdot (ab)^2 \int_0^R \rho^3\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{0} = 0$

$$I^{(O)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

CALCOLARE IL TENSORE DI INERZIA DI UN TRIANGOLO ISOSCELE OMOGENEO P POSTO NEL PIANO (O, X, Y, Z) COME IN FIGURA ESSENDO P DI MASSA m BASE $\overline{AB} = a$ ED ALTEZZA $\overline{OH} = h$.



$\sigma = \frac{m}{ah/2} = \frac{2m}{ah}$

$A = \left(-\frac{a}{2}, h\right)$

$B = \left(\frac{a}{2}, h\right)$

L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER

$\overline{OA} \Rightarrow \frac{(x-0)}{\left(-\frac{a}{2}-0\right)} = \frac{(y-0)}{(h-0)} \Rightarrow x = -\frac{a}{2h} y$

L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER $\overline{OB}$

$\Rightarrow \frac{(x-0)}{\left(\frac{a}{2}-0\right)} = \frac{(y-0)}{h-0} \Rightarrow x = \frac{a}{2h} y$

DA CUI IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE SARA' $-\frac{a}{2h} y \le x \le \frac{a}{2h} y$

$0 \le y \le h.$

DA CUI: $P \equiv [x, y, 0]$

$I^{(O)}_{11} = \iint y^2\, dm = \frac{2m}{ah} \int_0^h y^2\, dy \int_{-(a/2h)y}^{(a/2h)y} dx = \frac{2m}{ah} \cdot \int_0^h y^2 \left(\frac{a}{h} y\right) dy =$

$$= \frac{2m}{ah}\cdot\frac{a}{h}\int_0^h y^3\,dy = \frac{2m}{h^2}\,\frac{h^4}{4} = \frac{2}{4}\,m h^2 = \frac{mh^2}{2}$$

$$I^{(O)}_{22} = \iint x^2\,dm = \frac{2m}{ah}\int_0^h dy\int_{-(a/2h)y}^{(a/2h)y} x^2\,dx = \frac{2m}{ah}\int_0^h\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} dy =$$

$$= \frac{2m}{3ah}\,2\left(\frac{a}{2h}\right)^3\int_0^h y^3\,dy = \frac{ma^2}{6h^4}\cdot\frac{h^4}{4} = \frac{1}{24}\,m a^2$$

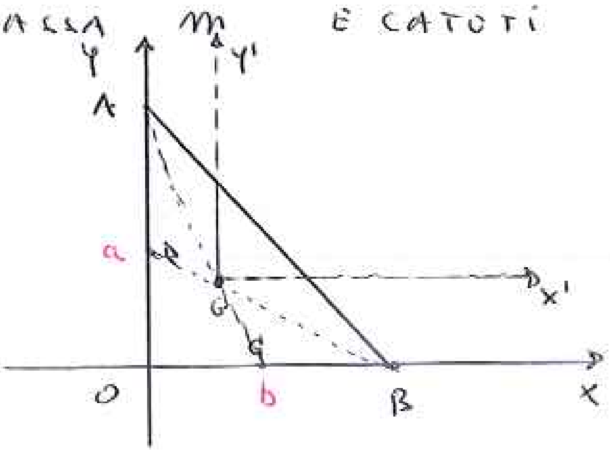
$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{mh^2}{2} + \frac{ma^2}{24}$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

$$I_{12} = -\iint xy\,dm = \frac{2m}{ah}\int_0^h y\,dy\int_{-(a/2h)y}^{(a/2h)y} x\,dx = 0$$

$$I^{(O)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{mh^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}\left(h^2 + \frac{a^2}{12}\right) \end{pmatrix}$$

CONSIDERIAMO UNA LAMINA OMOGENEA TRIANGOLARE AOB DI MASSA m E CATETI $\overline{OA} = a$ $\overline{OB} = b$. CALCOLIAMO IL TENSORE DI INERZIA RISPETTO AI DUE RIFERIMENTI IN FIGURA (O, x, y, z) ed (G, x', y', z') ESSENDO G IL BARICENTRO DELLA LAMINA



$A \equiv (0, a) \qquad B \equiv (b, 0) \qquad \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + a$

$0 \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq -\frac{a}{b}x + a$

$$I_{11} = \sigma \iint y^2 \, dA = \frac{2M}{ab} \cdot \int_0^b dx \int_0^{-\frac{a}{b}x + a} y^2 \, dy =$$

$$= \frac{2M}{ab} \int_0^b \frac{1}{3} \left(-\frac{a}{b}x + a\right)^3 dx =$$

$$= \frac{2M}{3ab} \int_0^b \left[-\frac{a^3}{b^3} x^3 + a^3 + 3 \frac{a^2}{b^2} x^2 \cdot a + 3\left(-\frac{a}{b}x\right) a^2\right] dx$$

$$= \frac{2M}{3ab} \left\{ -\frac{a^3}{b^3} \frac{b^4}{4} + a^3 b + \cancel{3} \frac{a^3}{b^2} \frac{b^3}{\cancel{3}} - 3 \frac{a^3}{b} \frac{b^2}{2} \right\} =$$

$$= \frac{2M}{3ab} \left\{ -\frac{1}{4} a^3 b + a^3 b + a^3 b - \frac{3}{2} a^3 b \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{M}{ab} \left[-\frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{2} \right] a^3 b = \frac{2}{3} \frac{M}{ab} \frac{1}{4} a^3 b = \frac{1}{6} M a^2$$

$$I_{22} = \sigma \iint x^2 \, dA = \frac{2M}{ab} \int_0^b x^2 \, dx \int_0^{-\frac{a}{b}x + a} dy =$$

$$= \frac{2M}{ab} \int_0^b x^2 \cdot \left(-\frac{a}{b} x + a\right) dx = \frac{2M}{ab} \left\{ -\frac{a}{b} \frac{b^4}{4} + a \frac{b^3}{3} \right\} =$$

$$= \frac{2M}{ab} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) a b^3 = \frac{2M}{ab} \left(\frac{-3 + 4}{12}\right) a b^3 = \frac{1}{6} M b^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{6} M (a^2 + b^2)$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

$$I_{12} = -\sigma \iint x\, y\, d\sigma = -\frac{2M}{ab} \int_0^b x\, dx \int_0^{-\frac{a}{b}x + a} y\, dy =$$

$$= -\frac{2M}{ab} \frac{1}{2} \int_0^b x \cdot \left(-\frac{a}{b} x + a\right)^2 dx =$$

$$= -\frac{M}{ab} \left\{ + \frac{a^2}{b^2} \frac{b^4}{4} + a^2 \frac{b^2}{2} - 2 \frac{a^2}{b} \frac{b^3}{3} \right\}$$

$$= -\frac{M}{ab} \left\{ \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{2} a^2 b^2 - \frac{2}{3} a^2 b^2 \right\} = -\frac{M}{ab} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right\} a^2 b^2$$

$$= -M \left(\frac{3 + 6 - 8}{12} \right) ab = -\frac{M}{12} ab$$

Da cui:

$$I_{\alpha\beta}^{(O)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} M a^2 & -\frac{M}{12} ab & 0 \\ -\frac{M}{12} ab & \frac{1}{6} M b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} M (a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che

$$I_{\alpha\beta}^{(O)} = I_{\alpha\beta}^{(G)} + m \left(x_u^{(G)} x_u^{(G)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G)} x_\beta^{(G)} \right)$$

Da cui

$$I_{\alpha\beta}^{(G)} = I_{\alpha\beta}^{(O)} - m \left(x_u^{(G)} x_u^{(G)} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^{(G)} x_\beta^{(G)} \right)$$

Calcoliamo le coordinate del baricentro.

PUNTO MEDIO DI $\overline{OB}$ $\Rightarrow$ $C \equiv \left(\frac{b}{2}, 0\right)$ ESSENDO $A \equiv (0, a)$

CALCOLIAMO LA RETTA PASSANTE PER $\overline{AC}$.

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow \frac{x - 0}{\frac{b}{2} - 0} = \frac{y - a}{0 - a}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b} x = -\frac{y-a}{a} \Rightarrow y = -2\frac{a}{b} x + a$$

PUNTO MEDIO DI $\overline{OA}$ $\Rightarrow$ $D \equiv \left(0, \frac{a}{2}\right)$ ESSENDO $B \equiv (b, 0)$

CALCOLIAMO LA RETTA PASSANTE PER $\overline{BD}$

$$\frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - y_B}{y_D - y_B} \Rightarrow \frac{x - b}{0 - b} = \frac{y - 0}{\frac{a}{2} - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} y = -\frac{(x-b)}{b} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\frac{a}{b} x + \frac{a}{2}$$

DA CUI:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{b} a x + a \\ y = -\frac{1}{2}\frac{a}{b} x + \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{3} \\ y = \frac{a}{3} \end{cases} \qquad G \equiv \left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

DA CUI

$$m\left(x_\mu^G x_\mu^G \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha^G x_\beta^G\right) = \begin{pmatrix} m\frac{a^2}{9} & -\frac{m}{9}ab & 0 \\ -\frac{m}{9}ab & m\frac{b^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{9}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

DA CUI:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} m a^2 & -\frac{m}{12} ab & 0 \\ -\frac{m}{12} ab & \frac{1}{6} m b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m (a^2+b^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m}{9} a^2 & -\frac{m}{9} ab & 0 \\ -\frac{m}{9} ab & \frac{m}{9} b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{9}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m}{18} a^2 & \frac{m}{36} ab & 0 \\ \frac{m}{36} ab & \frac{m}{18} b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{18}(a^2+b^2) \end{pmatrix} = I^{(G)}_{\alpha\beta}.$$

Si consideri una lamina omogenea quadrata ABCD di massa m (vedi figura) con un foro quadrato EFHI. Siano i lati EF = ℓ ed AB = L

calcolare:

1) la matrice di inerzia nel riferimento {O, x, y, z}
2) il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse z passante per AB e rispetto all'asse z' passante per AC.

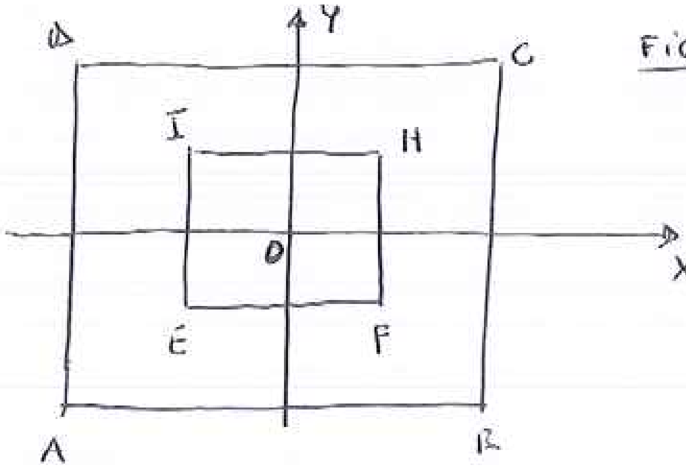


FIG. 1

Consideriamo il tensore di inerzia di una lamina piena

$$I^{(P)}_{d\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M_p b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M_p a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} M_p (a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

dove in questo caso $a = b = L$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M_p L^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M_p L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} M_p L^2 \end{pmatrix}$$

Analogamente il tensore di inerzia della lamina quadrata interna "vuota"

$$I^{(V)}_{d\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M_v \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M_v \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} M_v \ell^2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $\sigma = \frac{M}{L^2 - \ell^2} \Rightarrow \begin{cases} M_p = \sigma L^2 = M \frac{L^2}{L^2-\ell^2} \\ M_v = \sigma \ell^2 = -M \frac{\ell^2}{L^2-\ell^2} \end{cases}$

infatti $M_p + M_v = M$.

da cui:

$$I^{(Q)}_{\alpha\beta} = I^{(P)}_{\alpha\beta} + I^{(V)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(L^2+\ell^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(L^2+\ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}M(L^2+\ell^2) \end{pmatrix}$$

$$I_z = I_x + md^2 = I_{11} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}(L^2+\ell^2) + m\frac{L^2}{4} =$$

$$= \frac{M}{12}(4L^2+\ell^2)$$

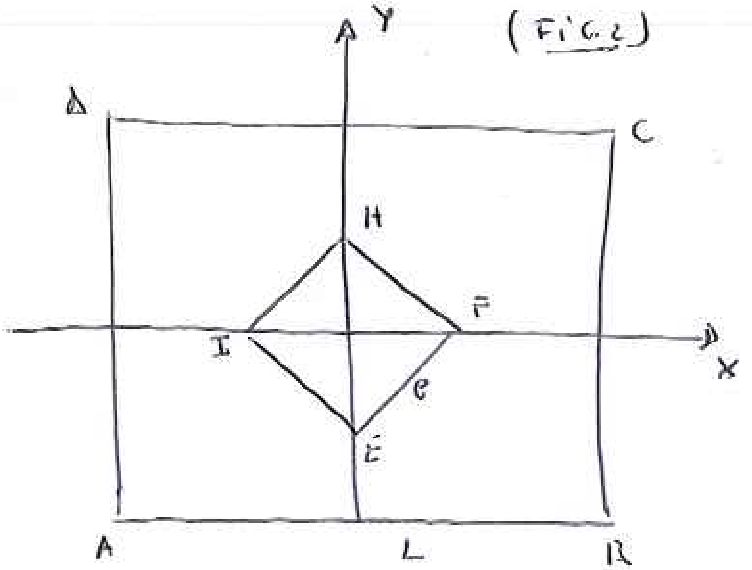
$$z' \equiv \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 0\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$$

da cui

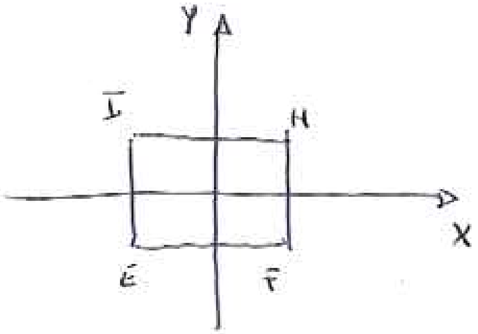
$$I_{z'} = I_{\alpha\beta}\, z'_\alpha\, z'_\beta = I_{11}\cdot\frac{1}{2} + I_{22}\cdot\frac{1}{2} = I_{11} = \frac{M}{12}(L^2+\ell^2)$$

NOTA: CONSIDERIAMO LA SEGUENTE FIGURA. CALCOLARE IL TENSORE DI INERZIA RISPETTO A $\{O, x, y, z\}$

(FIG.2)

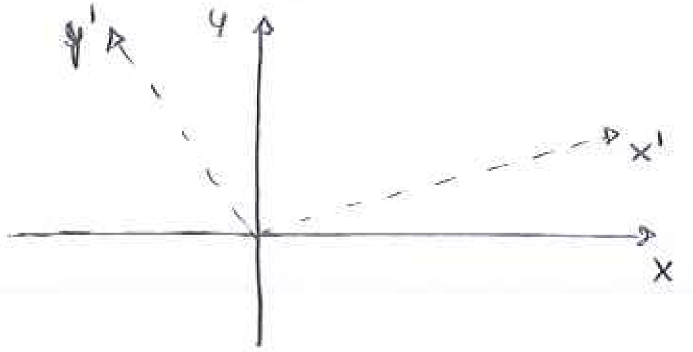


SE CONSIDERIAMO IL TENSORE DI INERZIA DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE RELATIVO AL QUADRATO VUOTO DI LATO ℓ AVREMO



$$I^{(V)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I^{(V)}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(V)}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(V)}_{33} \end{pmatrix}$$

FACCIAMO UNA QUALSIVOGLIA ROTAZIONE ATTORNO L'ASSE z E CALCOLIAMO $I^{(V)}_{\alpha'\beta'}$ NEL RIFERIMENTO RUOTATO



$$\begin{cases} \underline{e}_1' = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \\ \underline{e}_2' = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \\ \underline{e}_3' = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\, \underline{e}_\alpha \qquad A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DA CUI NEL NUOVO RIFERIMENTO RUOTATO AVREMO

$$I^{(v)}_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} A_{\beta'}{}^{\beta} I^{(v)}_{\alpha\beta} \Rightarrow I^{(v)'} = A\, I^{v} A^{T}.$$

COME È FACILE VERIFICARE $I^{(v)'} = I^{(v)}$

cioè

$$I^{(v)}_{\alpha'\beta'} = I^{(v)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I^{(v)}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(v)}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(v)}_{33} \end{pmatrix}$$

NOTA: D'ALTRA PARTE LA ROTAZIONE AGISCE SULLA SOTTOMATRICE

$$\begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{11} \end{pmatrix} = I_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CHE OVVIAMENTE LA LASCIA INALTERATA PERCHÉ $I_{11} = I_{22}$.

QUINDI: PER $\forall$ ROTAZIONE SI CONSIDERI IL TENSORE DI INERZIA DELLA LAMINA VUOTA RIMANE INALTERATO QUINDI IL TENSORE DI INERZIA DELLA LAMINA IN FIG. 2 SARÀ IDENTICO A QUELLO DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE.