CAPITOLO XII

DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI DI CORPI RIGIDI

§ 1. EQUAZIONI DI LAGRANGE E DI HAMILTON

1. REAZIONI VINCOLARI

In Meccanica si ammette il postulato

Assioma 1 – *Ogni vincolo cui e' soggetto un sistema materiale e' sostituibile, senza alterare lo stato di quiete o di moto, con un sistema di forze.*

L'assioma precedente trae origine dal fatto che, essendo solo le forze le cause capaci di determinare o modificare lo stato di quiete o di moto, i vincoli – dovendo modificare il moto del sistema ogni qualvolta questo tenti di violarli – sono meccanicamente equivalenti a delle forze. Cosi', ad esempio, in meccanica terrestre un punto soggetto solo al proprio peso $\mathbf{p}$, poggiato su un piano orizzontale, e' in equilibrio in una qualsiasi posizione. Immaginando di togliere il piano, se si vuole che il punto rimanga in equilibrio nella stessa posizione, occorrera' applicargli la forza $-\mathbf{p}$. Ciò mostra che l'azione del vincolo sul punto e' equivalente alla forza $-\mathbf{p}$ e che il vincolo puo' essere sostituito da essa.

Definizione 1 – *Diconsi reazioni vincolari esplicabili da un vincolo, le forze sostituibili ad esso. Tutte le altre forze, effettive o apparenti, diconsi* **attive**.

A differenza dalle forze attive, per le reazioni vincolari non e' possibile specificare la relativa legge di dipendenza. Cio' e' proprio insito nella natura dello schema che si adotta quando si ammette il postulato 1. Infatti, in tale schema, sostituendosi al vincolo le reazioni vincolari, si rinuncia a studiare il comportamento molecolare locale dei dispositivi che realizzano i vincoli ed a cui son dovute le reazioni vincolari.

2 PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI DI CORPI RIGIDI

L'assioma 1 - detto anche *postulato delle reazioni vincolari* - afferma, in sostanza, che *un sistema vincolato si comporta come se fosse libero ma soggetto, oltre che alle forze attive, anche alle reazioni vincolari.* Pertanto, se S e' un sistema olonomo di ν corpi rigidi in moto in uno spazio $\mathcal{E}_3$, imponendo a ciascuno dei corpi rigidi S_i costituenti S, le equazioni cardinali nella forma [(6), IX] e distinguendo le forze esterne in forze attive e reazioni vincolari, si hanno le 2ν equazioni vettoriali

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{R}_i^{(m)} + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = 0 \\ \mathbf{M}_i^{(m)} + \mathbf{M}_i^{(a)} + \mathbf{M}_i^{(v)} = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

con $\mathbf{R}_i^{(m)}$, $\mathbf{R}_i^{(a)}$, $\mathbf{R}_i^{(v)}$ ed $\mathbf{M}_i^{(m)}$, $\mathbf{M}_i^{(a)}$, $\mathbf{M}_i^{(v)}$ risultanti e momenti risultanti, rispetto ad un polo arbitrario O_i, rispettivamente della sollecitazione $\Sigma_i^{(m)}$ delle forze d'inerzia, della sollecitazione $\Sigma_i^{(a)}$ delle forze attive e della sollecitazione $\Sigma_i^{(v)}$ delle reazioni vincolari agenti su S_i. La sollecitazione $\Sigma_i^{(v)}$ e' costituita precisamente dalle azioni di contatto (sforzi) esplicati su S_i dai solidi di S e dagli ostacoli che nell'istante considerato sono in contatto con S_i.

Ci si deve ora chiedere se le 2ν equazioni vettoriali

(1) consentono di risolvere il *problema fondamentale* della dinamica dei sistemi olonomi di corpi rigidi cioe se esse assegnato il sistema delle forze attive consentono di determinare come variano nel tempo i parametri che individuano la posizione di S (coordinate lagrangiane) A tale riguardo va osservato che le (1) - contenendo il risultante ed il momento risultante delle reazioni vincolari agenti sui corpi costituenti S non rappresentano alcuna restrizione per il moto fino a che non si hanno delle limitazioni per le reazioni che i vincoli possono effettivamente esplicare In-fatti senza tali limitazioni, le (1) si possono sempre soddisfare assumendo le incognite reazioni vincolari in modo che sia $\mathbf{R}_i^{(v)} = -\mathbf{R}_i^{(m)} - \mathbf{R}_i^{(a)}$, $\mathbf{M}_i^{(v)} = -\mathbf{M}_i^{(m)} - \mathbf{M}_i^{(a)}$ $\forall i$ Per determinare le equazioni che reggono il moto di S in $\mathcal{E}_3$ occorre pertanto anzitutto determinare quali limitazioni esistono per le reazioni che ogni dato vincolo puo' effettivamente esplicare e ricavare poi tante equazioni scalari *pure* (cioe' prive delle incognite reazioni vincolari) nelle coordinate lagrangiane, quant e' il grado di liberta di S

3 *SISTEMI A VINCOLI PRIVI DI ATTRITO*

Le reazioni vincolari come gia' osservato, sono costituite dalle azioni di contatto che i corpi di S risentono da parte degli altri corpi di S stesso e da parte dei solidi (ostacoli) con cui si costituiscono i vincoli Pertanto per poter stabilire delle limitazioni per le reazioni vincolari esplicabili dai vincoli conviene cominciare col caratterizzare la reazione esplicabile da una superficie su un punto materiale poggiato su di essa. Rimandando al seguito il caso dei vincoli scabri qui e fino ad avviso contrario considereremo il caso dei vincoli privi d'attrito (o lisci)

L esperienza dimostra che quanto piu sono levigate le superfici a contatto tanto piu avviene che un punto P soggetto ad una forza attiva $\mathbf{F}$ e poggiato (velocita iniziale nulla) su una superficie Σ resta in equilibrio su Σ solo se $\mathbf{F}$ e normale a Σ e rivolta verso l interno di questa Indicata con Φ la reazione vincolare e dovendo – per le equazioni cardinali della statica {(7), IX} – essere $\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = 0$ si ha che quanto piu' levigate sono le superfici a contatto tanto piu avviene che le reazioni vincolari esplicabili da Σ son tutte e sole quelle normali a Σ e rivolte verso l'esterno. Partendo da tali risultati sperimentali, nello schema ideale di superfici perfettamente levigate, si pone

Definizione 2 – *Una superficie d'appoggio dicesi liscia o priva d'attrito se, sia in condizione di quiete che di moto relativo, e' capace d'esplicare tutte e sole le reazioni vincolari ad essa normali e rivolte verso l'esterno.*

Quando le superfici che limitano i corpi costituenti il sistema e gli ostacoli sono prive d'attrito, si dice che il sistema e' a vincoli privi d'attrito (o lisci). Tenendo conto che per ciascun solido sono ostacoli anche gli altri corpi del sistema ed applicando il principio d'azione e reazione agli elementi dei corpi di S che vengono a contatto, per la definizione 2, si pone :

Definizione 3 – *Un sistema* S *di solidi vincolati, dicesi a vincoli privi d'attrito se, sia in condizione di quiete che di moto relativo, nei punti di contatto tra un solido* S_i *di* S *con un ostacolo esterno, la reazione vincolare e' normale al contorno dell'ostacolo e rivolta verso l'interno di* S_i *e se nei punti di contatto tra due solidi di* S, *le mutue reazioni vincolari sono opposte, hanno la direzione della normale comune nel punto di contatto e sono rivolte verso l'interno del corpo su cui agiscono.*

Nei prossimi numeri, almeno per i sistemi a vincoli bilaterali, vedremo come, nel caso dei vincoli lisci, si possa pervenire a tante equazioni indipendenti pure quant'e' il grado di liberta'.

4. EQUAZIONE DI D'ALEMBERT E LAGRANGE

Indicato rispettivamente con $\delta L_i^{(m)}$, $\delta L_i^{(a)}$ e $\delta L_i^{(v)}$ il lavoro virtuale del sistema delle forze d'inerzia, delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su S_i, per la {(19), XI}, si ha

(2) $$\delta L_i^{(m)} + \delta L_i^{(a)} + \delta L_i^{(v)} = (\mathbf{R}_i^{(m)} + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)})\cdot\delta O_i + (\mathbf{M}_i^{(m)} + \mathbf{M}_i^{(a)} + \mathbf{M}_i^{(v)})\cdot\psi_i$$

– con $O_i \in S_i$ e δO_i e ψ_i vettori caratteristici di δS_i rispetto ad O_i – onde, per le (1), segue

(3) $$\delta L_i^{(m)} + \delta L_i^{(a)} + \delta L_i^{(v)} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,\nu).$$

Sommando membro a membro, si ha

(4) $$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = 0$$

ove $\delta L^{(m)}$, $\delta L^{(a)}$, $\delta L^{(v)}$ rappresentano i lavori virtuali compiuti nello spostamento δS rispettivamente dal sistema delle forze d'inerzia agenti su S e dal sistema delle forze attive e vincolari agenti su S ed esterne rispetto a ciascun solido di S.

La (4) e' l'*equazione di d'Alembert e Lagrange* associata agli spostamenti virtuali di S.

5. *UNA PROPRIETA' DEL LAVORO VIRTUALE DELLE REAZIONI VINCOLARI NEI SISTEMI PRIVI D'ATTRITO*

Proprieta' 1 – *Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari agenti su un sistema di solidi a vincoli olonomi e privi d'attrito verifica, per ogni spostamento virtuale, la diseguaglianza*

(5) $$\delta L^{(v)} \geq 0$$

e, in particolare, e' nullo per ogni spostamento reversibile.

Il lavoro virtuale totale, e' costituito dal lavoro delle reazioni vincolari dovute al contatto di S con ostacoli esterni e dal lavoro delle mutue reazioni vincolari esplicantesi nel contatto fra i corpi di S.

Nel primo caso, sia P un punto di contatto di un solido S_i di S con un ostacolo esterno $\bar{S}$ di contorno σ. Poiche' ai fini del calcolo del lavoro virtuale, per la definizione di spostamento virtuale, $\bar{S}$ va considerato fisso nella posizione occupata all'istante t, lo spostamento δP di P - affinche' S_i non penetri in $\bar{S}$ - deve formare un angolo non ottuso con la normale a σ in P rivolta verso S_i (fig. 31). Pertanto, essendo i vincoli privi d'attrito, anche l'angolo che la reazione vincolare ϕ esercitata da $\bar{S}$ forma con δP e' non ottuso, onde $\phi \cdot \delta P \geq 0$.

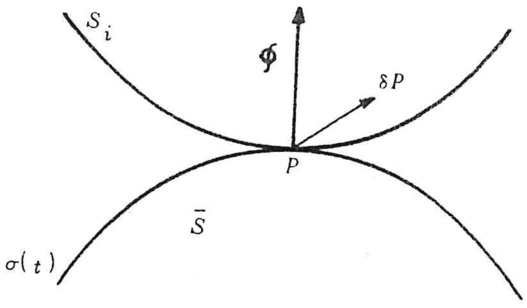

fig. 31

Nel caso del lavoro virtuale delle mutue reazioni vincolari esplicantesi nel contatto tra due corpi S_i ed S_j di S, osserviamo che tali reazioni, in assenza d'attrito, costituiscono un sistema equivalente a zero e pertanto compiono lavoro nullo in ogni spostamento virtuale rigido del sistema parziale $S_i \cup S_j$. Ora, dette C_i e C_j le posizioni occupate da S_i ed S_j all'istante t e C_i', C_j' quelle occupate per effetto di uno spostamento virtuale δS, lo spostamento di $S_i \cup S_j$ dalla posizione $C_i \cup C_j$ alla posizione $C_i' \cup C_j'$ si puo' sempre scomporre in uno spostamento rigido intermedio di $S_i \cup S_j$ che porti C_i in C_i' ed in uno spostamento del solo corpo S_j dalla posizione intermedia a C_j'. Pertanto il lavoro virtuale delle mutue reazioni vincolari esplicantisi tra S_i ed S_j essendo nullo nello spostamento intermedio e non negativo nel successivo (giacche' in questo S_i si comporta come un corpo fisso esterno) - e' non negativo. La (5) e' cosi' dimostrata. Se lo spostamento δS e' reversibile, applicando la (5) a δS ed a $-\delta S$, si ha $\delta L^{(v)} \geq 0$, $-\delta L^{(v)} \geq 0$ onde $\delta L^{(v)} = 0$ e la proprieta' e' completamente dimostrata.

La (5) e' caratteristica degli spostamenti virtuali. Si verifica subito, infatti, che, nel caso dei vincoli dipendenti dal tempo, *non e' verificata per ogni spostamento possibile*. Ad esempio, nel caso illustrato dalla figura 24 (VI, n. 4), se P e' vincolato a non attraversare σ ed a restare nella parte in cui si trova P'', il lavoro compiuto dalla reazione vincolare ϕ che σ esercita su P, in corrispondenza dello spostamento possibile PP'' e' negativo giacche' ϕ e' normale a σ in P ed e' rivolta verso la parte in cui P puo' muoversi.

6. RELAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA

Proprieta' 2 - *Durante il moto di un sistema di solidi a vincoli olonomi e privi d'attrito, al generico istante* t *e per ogni spostamento virtuale* δS *eseguito a partire dalla posizione di* S *in tale istante, deve essere soddisfatta la relazione*

$$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \leq 0 . \tag{6}$$

La (16), prende il nome di *relazione simbolica della Dinamica o di d'Alembert e Lagrange* ed e' un'immediata conseguenza delle (4)-(5). In particolare essa, per ogni spostamento reversibile δS, si riduce all'*equazione simbolica della Dinamica*

$$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} = 0 \tag{7}$$

giacche', applicando la (6) a δS ed a $-\delta S$, si ha simultaneamente $\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \leq 0$, $\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \geq 0$, onde l'asserto. Naturalmente *se i vincoli sono bilaterali la* (6) *si riduce alla* (7) *ad ogni istante e per ogni spostamento virtuale.*

La relazione simbolica della Dinamica trae la sua fondamentale importanza dal fatto che essa e' una relazione pura capace di fornire tante relazioni indipendenti pure quanti sono i gradi di liberta' di S. Infatti, per l'arbitrarieta di δS, essa equivale a tante relazioni scalari pure indipendenti quanti sono gli spostamenti indipendenti di S.

In particolare, se S e' a vincoli bilaterali, la (6) fornisce - come vedremo - le equazioni che reggono il moto di S.

7. *COMPONENTI LAGRANGIANE DEL SISTEMA DELLE FORZE D'INERZIA*

Per la [VI, (10)], si ha

$$\delta L^{(m)} = \sum_{i=1}^{\nu} \delta L_i^{(m)} = - \sum_{i=1}^{\nu} \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{a} \cdot \delta P \, dC_i = - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} \, dC_i \, .$$

con ρ_i e C_i rispettivamente densita' e campo occupato da S_i. Le componenti lagrangiane del sistema delle forze d inerzia sono pertanto date da

$$\tau_h = - \sum_{i=1}^{\nu} \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} \, dC_i \tag{8}$$

e come ora vedremo si possono esprimere tramite le derivate della *energia cinetica*. Infatti dalla (45) del capitolo precedente segue

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \, dC_i \ , \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} \, dC_i \ ,$$

onde

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{C_i} \rho_i \, \mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} \, dC_i + \frac{\partial T}{\partial q_h} \ ,$$

e pertanto

$$(9) \qquad \tau_h = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right)$$

8. EQUAZIONI DI LAGRANGE E LORO CARATTERE DETERMINISTA.

Come gia' accennato al n. 6, proveremo ora che la relazione simbolica della dinamica fornisce le equazioni del moto di un sistema di solidi a vincoli olonomi lisci e bilaterali.

Essendo i vincoli bilaterali, la (6) e' sostituibile con la (7) che si puo' scrivere

$$(10) \qquad \sum_{h=1}^{n} (\tau_h + Q_h) \, \delta q_h = 0 \ ,$$

con τ_h e Q_h componenti lagrangiane del sistema delle forze d'inerzia e delle forze attive esterne rispetto a ciascun solido. D'altra parte, proprio per la bilateralita' dei vincoli, mancano le limitazioni {(12), VI} per le δq_h e, pertanto, la (10) - dovendo sussistere per una scelta arbitraria delle quantita' infinitesime δq_h - e' *equivalente* alle n equazioni

$$(11) \qquad \tau_h + Q_h = 0 \qquad (h = 1, 2, .., n),$$

cioe', per le (9), alle

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h=1,2,\ldots,n). \tag{12}$$

Le (12) costituiscono le celebri *equazioni di Lagrange* (nella seconda forma) e, come ora mostreremo, hanno la effettiva capacita' di reggere il moto di un sistema di solidi a vincoli olonomi, lisci e bilaterali.

L'energia cinetica dipende dal tempo sia esplicitamente che attraverso le q e le $\dot{q}$, onde nelle (12) e'

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right),$$

e, pertanto, esse si possono scrivere

$$\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = Q_h + \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial q_h} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \qquad (h=1,\ldots,n), \tag{13}$$

ove le Q_h, e gli altri termini che compaiono a secondo membro, dipendono solo dalle q, $\dot{q}$ e t. Le equazioni di Lagrange costituiscono pertanto un sistema di n equazioni differenziali pure, del 2° ordine, nelle n funzioni incognite $q_h(t)$. Essendo poi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = a_{hk}, \quad \det\|a_{hk}\| \neq 0; \tag{14}$$

il sistema (13) e' risolubile rispetto alle derivate di ordine massimo $\ddot{q}_h$, cioe', e' riducibile ad un sistema di forma normale di n equazioni differenziali pure, del second ordine del tipo

$$\ddot{q}_h(t) = F_h(q/\dot{q}/t) \qquad (h=1,2,\ldots,n)$$

il quale, a sua volta, e' equivalente al sistema di 2n equazioni differenziali (del prim'ordine e di forma normale)

$$\begin{cases} \dot{q}_h(t) = \xi_h \\ \dot{\xi}_h(t) = F_h(q/\xi/t) \end{cases}$$

nelle 2n funzioni incognite $\xi_h(t)$, $q_h(t)$. Pertanto, sotto condizioni molto larghe, il teorema di esistenza ed unicita' per i sistemi di equazioni differenziali (del prim'ordine e di forma normale), prova che

Proprieta' 3 - *Le equazioni di Lagrange ammettono infiniti integrali, dipendenti complessivamente da 2n costanti arbitrarie, tra i quali ne esiste sempre uno ed uno solo che verifichi le condizioni iniziali*

$$q_h(t_o) = q_h^{(o)}, \quad \dot{q}_h(t_o) = \dot{q}_h^{(o)} \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

con $q_h^{(o)}$ *e* $\dot{q}_h^{(o)}$ *costanti arbitrarie.*

Alla proprieta' 3 corrisponde la seguente interpretazione dinamica

Proprieta' 4 - *Un sistema di solidi a vincoli olonomi bilaterali e privi d'attrito - sotto l'azione di un assegnato sistema di forze attive esterne rispetto a ciascun solido - puo' compiere* ∞^{2n} *moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la posizione e l'atto di moto iniziali.*

Risulta cosi' provata la effettiva capacita' delle equazioni di Lagrange di reggere il moto di un sistema di solidi a vincoli olonomi bilaterali e privi d'attrito. Naturalmente restano le difficolta' dell'integrazione di tali equazioni integrazione che, in generale, non si sa eseguire con sole operazioni in termini finiti e con quadrature. Una notevole semplificazione si ottiene ogni qualvolta sussistono *integrali primi* cioe funzioni f delle q, $\dot{q}$ e t che siano