"FORME DIFFERENZIALI"

IN R^2: Sia $F: A \to R^2$ (con A aperto di R^2) "CAMPO VETTORIALE"

$$\underline{F} = F^1(x^1, x^2)\, \underline{e}_1 + F^2(x^1, x^2)\, \underline{e}_2$$

Siano $F^\alpha(x^\beta)$ di classe $C^1(A)$

DEF.

Si definisce una "FORMA DIFFERENZIALE" di classe $C^1(A)$ in A

$$\boxed{\begin{aligned} \omega(x^1, x^2) &= F_1(x^1, x^2)\, dx^1 + F_2(x^1, x^2)\, dx^2 = \\ &= \underline{F} \cdot d\underline{P} = F^\alpha\, dx^\beta\, \delta_{\alpha\beta} = F_\beta\, dx^\beta \end{aligned}}$$

POSSIAMO GENERALIZZARE IN R^n

Sia $F: A \to R^n$ (A aperto di R^n)

$$\underline{F} = F^\alpha(x^\beta)\, \underline{e}_\beta$$

DEF. "FORMA DIFFERENZIALE" di classe $C^1(A)$ in R^n

$$\boxed{\begin{aligned} \omega(x^1, \dots x^n) &= F_\beta(x^\alpha)\, dx^\beta = \\ &= F_1(x^1, \dots x^n)\, dx^1 + \dots + F_n(x^1 \dots x^n)\, dx^n \\ &= \underline{F} \cdot d\underline{P} \end{aligned}}$$

CURVA REGOLARE IN R^n

Sia data l'applicazione vettoriale

$\gamma: [a, b] \to R^n$ con rappresentazione

parametrica di γ
$$\begin{cases} x^1 = x^1(s) \\ \vdots \\ x^n = x^n(s) \end{cases} \qquad s \in [a, b]$$

DEFINIAMO "INTEGRALE CURVILINEO" DI $\underline{F}$ LUNGO γ

$$\int_{\gamma_{a,b}} \underline{F}\cdot d\underline{P} = \int_{\gamma_{a,b}} F_\alpha(x^\mu)\, dx^\alpha = \int_{\gamma_{a,b}} \omega(x^\alpha)$$

ESEMPIO: SE $\underline{F}$ E' UN CAMPO DI FORZE, ALLORA L'INTEGRALE (*)

$$(*) \quad \int_{\gamma_{a,b}} dL = \int_{\gamma_{a,b}} \underline{F}\cdot d\underline{P}$$

E' IL LAVORO COMPIUTO DA $\underline{F}$ PER UNO SPOSTAMENTO DAL PUNTO a AL PUNTO b LUNGO γ.

DEF. ~~[illegible]~~ (GENERALIZZATO IN R^n) DI "INSIEME CONNESSO"

UN INSIEME $\Omega \subseteq R^n$ SI DICE CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI COPPIA DI PUNTI $P, Q \in \Omega$ $\exists$ UNA CURVA $\gamma : [a,b] \to R^n$ TALE CHE $\gamma(a) = P$ E $\gamma(b) = Q$.

DEF. DI INSIEME "SEMPLICEMENTE CONNESSO"

UN INSIEME APERTO E CONNESSO $\Omega \subseteq R^n$ SI DICE SEMPLICEMENTE CONNESSO SE:

SE UN $\forall$ ARCO SEMPLICE CHIUSO (CURVA CHIUSA REGOLARE) INTERAMENTE CONTENUTO IN Ω PUO' ESSERE DEFORMATA CON CONTINUITA', FINO A RIDURLA AD UN **PUNTO**, SENZA APRIRLA E RIMANENDO ALL'INTERNO DI Ω.

ESEMPI:

$\boxed{\text{IN } R^2}$ SONO INSIEMI "SEMPLICEMENTE CONNESSI"

- TUTTI GLI APERTI CONVESSI
- TUTTI GLI APERTI LIMITATI CON UNA FRONTIERA COSTITUITA DA UN'UNICA CURVA
- IL PIANO PRIVATO DA UNA SEMIRETTA

"NON SONO SEMPLICEMENTE CONNESSI":

- TUTTI GLI APERTI PRIVATI DI UN PUNTO (IN PARTICOLARE $R^2 \setminus \{0,0\}$.)
- LE CORONE CIRCOLARI
- IL PIANO PRIVATO DI UNA RETTA (PERCHÉ NON È CONNESSO)

$\boxed{\text{IN } R^3}$ SONO INSIEMI "SEMPLICEMENTE CONNESSI"

- TUTTI GLI APERTI CONVESSI
- LO SPAZIO PRIVATO DI UN PUNTO (IN PARTICOLARE $R^3 \setminus \{0,0\}$)
- LE CORONE SFERICHE $\left(E \equiv \{ \forall P \in R^3 : \delta^2 < x^2+y^2+z^2 < R^2 \right)$.

"NON SONO INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI"

- R^3 PRIVATO DI UNA RETTA (IN PARTICOLARE R^3 PRIVATO DI UNO DEI TRE ASSI COORDINATI).
- R^3 PRIVATO DI UN PIANO (PERCHÉ NON È CONNESSO).

DEF. "FORMA DIFFERENZIALE ESATTA".

UNA FORMA DIFFERENZIALE DI CLASSE $C^1(\Omega)$ CON $\Omega \subseteq R^n$ (APERTO DI R^n) SI DICE "ESATTA" SE $\exists$ UNA FUNZIONE SCALARE $U: \Omega \to R$ DIFFERENZIABILE (DETTA "FUNZIONE PRIMITIVA" o "FUNZIONE POTENZIALE") CON DERIVATE

CONTINUE TALE CHE

$$F_\alpha(x^\beta) = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \quad \text{E A}$$

$$\omega(x^\beta) = F_\alpha(x^\beta)\, dx^\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha$$

TEOREMA'

C.N.S. AFFINCHÉ $\omega(x^\beta)$ SIA ESATTA IN UN APERTO E CONNESSO $\Omega \subseteq R^n$ E' CHE SIA NULLO L'INTEGRALE DI ω LUNGO UNA QUALUNQUE CURVA CHIUSA REGOLARE DI Ω

$$\oint_\gamma \underbrace{\underline{F} \cdot d\underline{P}}_{\omega} = 0 \iff \omega = \underline{F} \cdot d\underline{P} \text{ E' ESATTA}$$

CIOÈ $\exists\, U(x^\beta) : \omega = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha$

ESEMPIO IN R^2 (QUESTO E' UN CRITERIO PER SOSTENERE CHE ω E' ESATTA)

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

DEFINITA IN $\Omega = R^2 \setminus \{0,0\}$ (NOTIAMO CHE IL DOMINIO E' CONNESSO MA NON SEMPLICEMENTE CONNESSO)

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi & R > 0 \\ y = R\sin\varphi & \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{R\sin\varphi}{R^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{R\cos\varphi}{R^2}\frac{dy}{d\varphi} \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$$

QUINDI $\underline{\omega \text{ NON E' ESATTA.}}$

DEFINIZIONE DI "FORMA CHIUSA"

SIA $\Omega \subseteq R^2$ APERTO DI R^2 CA

$$\omega(x,y) = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy \qquad F_1, F_2 \text{ CLASSE } C^1$$

DIREMO CHE "ω E' CHIUSA" QUANDO

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \forall p \in \Omega.$$

SIA $\Omega \subseteq R^3$ APERTO DI R^3 CA.

$$\omega(x,y,z) = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

ω E' CHIUSA SE: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \;;\quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 \;;\quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

PER GENERALIZZARE IN R^n

SE ω E' UNA FORMA DIFFERENZIALE DI CLASSE C^1 IN UN APERTO $\Omega \subseteq R^n$ DEF. COME SEGUE

$$\omega(x^\beta) = \omega_1(x^\beta)\,dx^1 + \dots \omega_n(x^\beta)\,dx^n$$

SE ACCADE CHE $\dfrac{\partial \omega_i(x^\beta)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \forall\, i,j = 1, n \quad \forall p \in \Omega \subseteq R^n.$

SE LA FORMA DIFFERENZIALE E' ESATTA

$$\omega = \omega_\alpha(x^\beta)\,dx^\alpha = dU = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha$$

ALLORA ESSA E' CHIUSA SE $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$

TEOREMA 1°: (CONDIZIONE NECESSARIA)

SIA ω UNA FORMA DIFFERENZIALE DI CLASSE $C^1(\Omega)$ IN UN APERTO E CONNESSO DI R^n ALLORA SE

$$\omega \text{ E' ESATTA} \Rightarrow \omega \text{ E' CHIUSA}$$

QUESTA E' SOLTANTO UNA COND. NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE CIOE' IL VICEVERSA IN GENERALE NON E' VERO

ESEMPIO IN R^2:

SIA DATA LA F. DIFF.

$$\omega(x,y) = \overbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}^{\omega_1} dx - \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{\omega_2} dy$$

DEF. IN $\Omega = R^2 \setminus \{0,0\}$ (QUINDI IL DOMINIO E' CONNESSO MA NON SEMPLICEMENTE CONNESSO)

OSSERVIAMO CHE QUESTA F. DIF. E' CHIUSA

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

MA

$$\oint_\gamma \omega(x,y) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R\,\text{sen}\,u}{R} \frac{dx}{du} - \frac{R\cos u}{R^2} \frac{dy}{du} \right\} du = -\int_0^{2\pi} du = 2\pi \neq 0$$

QUINDI ω NON E' ESATTA.

TEOREMA N°2: "CONDIZIONE SUFFICIENTE"

SIA ω UNA FORMA DIFFERENZIALE DI CLASSE $C^1(\Omega)$ DOVE Ω E' UN APERTO "SEMPLICEMENTE CONNESSO" DI R^n ALLORA

$$\text{SE } \omega \text{ E' CHIUSA} \Rightarrow \omega \text{ E' ESATTA}$$

NOTA: QUESTA È UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA

(CIOÈ ∃ CAMPI CONSERVATIVI ANCHE SU DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI)

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$: CONSIDERIAMO LA FORMA DIFF. DI CLASSE $C^1(\Omega)$, Ω APERTO CONNESSO MA NON SEMPLICEMENTE CONNESSO. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

QUESTA È ESATTA INFATTI $\exists\, U = \ln(x^2+y^2)$ TALE CHE:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

QUINDI $\omega = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy \Rightarrow$ È ESATTA

DAL TEOREMA PRECEDENTE LA FORMA È CHIUSA

$$\frac{\partial U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial U}{\partial y \partial x} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

COME ABBIAMO VISTO, SE LA TRASF. $(q^\alpha, p_\alpha) \Rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$ È CANONICA ALLORA SCEGLIENDO LE POSSIBILI FUNZIONI GENERATRICI

1) $F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$; 2) $F_2 = F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)$; 3) $F_3 = F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t)$

4) $F_4 = F_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$, 5) $F(\underbrace{q^i, p_s}_{n}, \underbrace{Q^e, P_m}_{n}, t)$

LE CORRISPONDENTI FORME DIFFERENZIALI ~~SONO~~ SONO ESATTE.

1) $p_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dq^\alpha - P_\alpha(q^\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha + [K-H]dt = dF_1(q^\beta, Q^\beta, t)$

2) $p_\alpha(q^\beta, P_\beta, t)\, dq^\alpha + Q^\alpha(q^\beta, P_\beta, t)\, dP_\alpha + [K-H]dt = dF_2(q^\beta, P_\beta, t)$

3) $-q^\alpha(p_\beta, Q^\beta, t)\, dp_\alpha - P_\alpha(p_\beta, Q^\beta, t)\, dQ^\alpha + [K-H]dt = dF_3(p_\beta, Q^\beta, t)$

4) $-q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t)\, dp_\alpha + Q^\alpha(p_\beta, P_\beta, t)\, dP_\alpha + [K-H]dt = dF_4(p_\beta, P_\beta, t)$

5)
$$c[p_i\, dq^i - q^s\, dp_s - H] - \bar{c}[P_e\, dQ^e - Q^m\, dP_m - K] = dF$$

ESSENDO TUTTE FORME DIFFERENZIALI ESATTE, PER UN TEOREMA DI ANALISI II, ESSENDO DEFINITE SU UN APERTO CONNESSO, SONO ANCHE "CHIUSE". (C.N.) QUINDI AVREMO:

1) CONSIDERANDO LA $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial p_\alpha}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q^\beta \partial q^\alpha}$$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^\alpha \partial Q^\beta}$$

(CHIUSA) $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial Q^\beta} = -\dfrac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha}}$

2) CONSIDERANDO LA $F_2(q^\alpha, P_\alpha, t)$

$$p_\alpha = \partial F_2 / \partial q^\alpha \Rightarrow \partial p_\alpha / \partial P_\beta = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_\beta \partial q^\alpha}$$

$$Q^\alpha = \partial F_2 / \partial P_\alpha \Rightarrow \partial Q^\beta / \partial q^\alpha = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}$$

("CHIUSA") $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial P_\beta} = \dfrac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha}}$

3) CONSIDERANDO LA $F_3(p_\alpha, Q^\alpha, t)$

$$q^\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial Q^\beta \partial p_\alpha}$$

"CHIUSA" $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha}}$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_\alpha \partial Q^\beta}$$

4) CONSIDERANDO LA $F_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$

$$q^\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial q^\alpha}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial^2 F_4}{\partial P_\beta \partial p_\alpha}$$

"CHIUSA" $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial q^\alpha}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\alpha}}$

$$Q^\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 F_4}{\partial p_\alpha \partial P_\beta}$$

AVREMO QUINDI LE "CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ"

$$(*) \quad \frac{\partial p_\alpha}{\partial Q^\beta} = -\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha} \quad ; \quad \frac{\partial p_\alpha}{\partial P_\beta} = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha} \quad ; \quad \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha} \quad ; \quad \frac{\partial q^\alpha}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\alpha}$$

IN REALTÀ GUARDANDO LE 4 FORME DIFFERENZIALI AVREMO ANCHE ALTRE "CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ", PER IL FATTO CHE SONO FORME DIFFERENZIALI CHIUSE.

AD ESEMPIO DALLA 1) AVREMO $\quad \frac{\partial (K-H)}{\partial Q^\beta} = -\frac{\partial P_\beta}{\partial t}$

$(**)$

DALLA 2) AVREMO $\quad \frac{\partial (K-H)}{\partial P_\beta} = +\frac{\partial Q^\beta}{\partial t}$

E COSÌ VIA.

— o —

TRASFORMAZIONI CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

DEFINIAMO LA PARENTESI DI POISSON

$$[f,g]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha}$$

[NOTA: STIAMO UTILIZZANDO LA DEF. OPPOSTA A QUELLA USATA QUANDO ABBIAMO DEF. $[f,g] = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\cdot\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}$]

CONSIDERIAMO LA TRASF. DI COORDINATE NELLO SPAZIO DELLE FASI (O IN UN DOMINIO DI LOCALE INVERTIBILITA CONTENUTO NELLO SPAZIO DELLE FASI)

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$$

IN QUESTO CASO POTREMO SCRIVERE

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \\ p_\alpha = p_\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \end{cases} \quad \text{E VICEVERSA} \quad \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$$

ABBIAMO GIÀ PROVATO CHE

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{Q,P} = 0 \; ; \; [P_\alpha, P_\beta]_{Q,P} = 0 \; ; \; [Q^\alpha, P_\beta]_{Q,P} = \delta^\alpha_\beta$$

POSSIAMO PERÒ PENSARE LE $\{Q^\alpha, P_\alpha\}$ COME FUNZIONI DELLE VARIABILI $\{q^\beta, p_\beta\}$, DA CUI

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\gamma}$$

$$[P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma}$$

$$[Q^\alpha, P_\beta]_{qp} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma}$$

TEOREMA:

C.N.S. AFFINCHÉ UNA TRASF. $(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$ SIA CANONICA È CHE VALGANO LE PROPRIETÀ (CIOÈ CHE LASCIANO INVARIATE LE PARENTESI DI POISSON):

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = 0 \quad ; \quad [Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \delta^\alpha_\beta \quad (1)$$

ANALOGAMENTE:

$$[q^\alpha, q^\beta]_{Q,P} = [p_\alpha, p_\beta]_{Q,P} = 0 \qquad [q^\alpha, p_\beta]_{Q,P} = \delta^\alpha_\beta$$

DIM: Hp LA TRASF. È CANONICA Ts VALGONO LE (1)

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\gamma}}_{-\frac{\partial q^\gamma}{\partial P_\beta}} - \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\gamma}}_{\frac{\partial p_\gamma}{\partial P_\beta}} = -\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial P_\beta} - \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\gamma}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial Q^\alpha}{\partial P_\beta} = 0$$

("CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ" PAG. 9)

$$[P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma}}_{\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta}} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma}\underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma}}_{-\frac{\partial p_\gamma}{\partial Q^\beta}} = \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\gamma}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q^\beta} = 0$$

("CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ" PAG. 9)

$$[Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma}}_{\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta}} - \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma}}_{-\frac{\partial p_\gamma}{\partial Q^\beta}} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta} + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\gamma}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial Q^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

(CONDIZ. DI COMPATIBILITÀ PAG. 9)

VICEVERSA:

Hp $[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = 0 \quad [Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \delta^\alpha_\beta$ Ts LA TRASF.

$(q^\alpha, p_\alpha) \leftrightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$ È CANONICA

DIM:
SUPPONIAMO CHE VALGANO LE EQUAZIONI DI HAMILTON

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad (1) \qquad \text{CALCOLIAMO} \qquad \begin{cases} \dot Q_k = \dfrac{\partial Q_k}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + \dfrac{\partial Q_k}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha + \dfrac{\partial Q_k}{\partial t} \\ \\ \dot P_k = \dfrac{\partial P_k}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha + \dfrac{\partial P_k}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

UTILIZZANDO LE EQUAZIONI (1) NELLE (2) AVREMO

$$\dot{Q}^k = \frac{\partial Q^k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial Q^k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial Q^k}{\partial t}$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial P_k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial P_k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P_k}{\partial t}$$

SE ADESSO ESPRIMIAMO LE DERIVATE DI H IN TERMINI DELLE NUOVE VARIABILI AVREMO:

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial H}{\partial Q^\rho}\frac{\partial Q^\rho}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial H}{P_\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial q^\alpha}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial Q^\rho}\frac{\partial Q^\rho}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial P_\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_\alpha}$$

DA CUI SOSTITUENDO AVREMO

$$\dot{Q}^k = \frac{\partial Q^k}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial Q^\rho}\frac{\partial Q^\rho}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial P_\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_\alpha}\right) -$$

$$- \frac{\partial Q^k}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial Q^\rho}\frac{\partial Q^\rho}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial P_\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial q^\alpha}\right) + \frac{\partial Q^k}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{\partial Q^k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial Q^\rho}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial Q^k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q^\rho}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\partial H}{\partial Q^\rho} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q^k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial Q^k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial P_\rho}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\partial H}{\partial P_\rho} + \frac{\partial Q^k}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\left[Q^k, Q^\rho\right]_{q,p}}_{0}\frac{\partial H}{\partial Q^\rho} + \underbrace{\left[Q^k, P_\rho\right]_{q,p}}_{\delta^k{}_\rho}\frac{\partial H}{\partial P_\rho} + \frac{\partial Q^k}{\partial t}$$

Da cui

$$\boxed{\dot{Q}^k = \frac{\partial H}{\partial P_k} + \frac{\partial Q^k}{\partial t}}$$

Analogamente avremo

$$\dot{P}_k = \underbrace{[P_k, Q^e]_{qp}}_{-\delta_k^{e}} \frac{\partial H}{\partial Q^e} + \underbrace{[P_k, P_e]_{qp}}_{0} \frac{\partial H}{\partial P_e} + \frac{\partial P_k}{\partial t}$$

$$\boxed{\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q^k} + \frac{\partial P_k}{\partial t}}$$

E' banale osservare che se non vi è una dipendenza esplicita dal tempo $\frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{\partial Q^k}{\partial t} = 0$ $\quad H = K$

Da cui
$$\begin{cases} \dot{Q}^k = \dfrac{\partial K}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^k} \end{cases}$$
quindi la trasf. è canonica

Se vi è una dipendenza esplicita dal tempo, e valgono le relazioni (**) di pag. 9

$$\frac{\partial K}{\partial P_k} = \frac{\partial H}{\partial P_k} + \frac{\partial Q^k}{\partial t} \qquad \frac{\partial K}{\partial Q^k} = \frac{\partial H}{\partial Q^k} - \frac{\partial P_k}{\partial t}$$

Da cui avremo che

$$\begin{cases} \dot{Q}^k = \dfrac{\partial K}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^k} \end{cases}$$

così la trasf. è canonica

~~[illegible]~~:

SIANO DATE LE TRASFORMAZIONI

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \\ p_\alpha = p_\alpha(Q^\beta, P_\beta, t) \end{cases} \quad \text{E VICEVERSA} \quad \begin{cases} Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q^\beta, p_\beta, t) \end{cases}$$

ALLORA CONSIDERATA UNA QUALSIASI COPPIA DI FUNZIONI $f(q^\alpha, p_\alpha)$ E $g(q^\alpha, p_\alpha)$ POTREMO SCRIVERE ANCHE

$f(Q^\alpha, P_\alpha)$ $\qquad g(Q^\alpha, P_\alpha)$

TEOREMA:

C.N.S AFFINCHÉ VALGA LA CONDIZIONE DI INVARIANZA CANONICA

$$\forall f, g \qquad [f, g]_{Q,P} = [f, g]_{q,p} \qquad (1)$$

È CHE VALGANO LE CONDIZIONI DI INVARIANZA CANONICA

$$(2) \quad [Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = 0 \qquad [Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \delta^\alpha_\beta$$

(CIOÈ SIANO INVARIANTI CANONICI).

DIM: Hp VALGA LA (1) Ts SEGUONO LE (2)

SE INFATTI VALGONO LE (1) ALLORA PER $f = Q^\alpha$ e $g = Q^\beta$

AVREMO $[Q^\alpha, Q^\beta]_{Q,P} = [Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = 0$

ANALOGAMENTE PER $f = P_\alpha$ ed $g = P_\beta$

AVREMO $[P_\alpha, P_\beta]_{Q,P} = [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = 0$

INFINE PONIAMO $f = Q^\alpha$ ed $g = P_\beta$

$$[Q^\alpha, P_\beta]_{Q,P} = [Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \delta^\alpha_\beta \qquad \text{C.V.D.}$$

RICORDIAMO

Hp $[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = 0 \quad [Q^\alpha, P_\beta]_{q,p} = \delta^\alpha_\beta$

Th $[f,g]_{Q,P} = [f,g]_{qp}$.

Dim:

$$[f,g]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial g}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial g}{\partial P_\gamma}\frac{\partial P_\gamma}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial g}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g}{\partial P_\gamma}\frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha}\right)$$

$$= [f, Q^\gamma]_{q,p}\frac{\partial g}{\partial Q^\gamma} + [f, P_\gamma]_{q,p}\frac{\partial g}{\partial P_\gamma} \quad (1)$$

ANALOGAMENTE SE CALCOLIAMO:

$$[f, Q^\gamma]_{qp} = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial Q^\beta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial f}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\partial Q^\gamma}{\partial p_\alpha} - \left(\frac{\partial f}{\partial Q^\beta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha}\right)\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\alpha}$$

$$= \underbrace{[Q^\beta, Q^\gamma]_{qp}}_{0}\frac{\partial f}{\partial Q^\beta} + \underbrace{[P_\beta, Q^\gamma]_{q,p}}_{-\delta_\beta^\gamma}\frac{\partial f}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial f}{\partial P_\gamma} \quad (2)$$

ANALOGAMENTE

$$[f, P_\gamma]_{q,p} = \underbrace{[Q^\beta, P_\gamma]_{q,p}}_{\delta^\beta_\gamma}\frac{\partial f}{\partial Q^\beta} + \underbrace{[P_\beta, P_\gamma]_{q,p}}_{0}\frac{\partial f}{\partial P_\beta}$$

$$[f, P_\gamma]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial Q^\gamma} \quad (3)$$

INSERENDO LE (2) E (3) NELLA (1) AVREMO

$$[f,g]_{qp} = \underbrace{[f,Q^\gamma]_{qp}}_{-\frac{\partial f}{\partial P_\gamma}} \frac{\partial g}{\partial Q^\gamma} + \underbrace{[f,P_\gamma]_{q,p}}_{\frac{\partial f}{\partial Q^\gamma}} \frac{\partial g}{\partial P_\gamma} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial g}{\partial P_\gamma} - \frac{\partial f}{\partial P_\gamma}\frac{\partial g}{\partial Q^\gamma} = [f,g]_{Q,P}.$$

C.V.D.

TEOREMA?

COND. AFFINCHÉ UNA TRASF. SIA CANONICA È CHE PER OGNI f, g : $f = f(q^\alpha, p_\alpha)$ $g = g(q^\alpha, p_\alpha)$ ACCADA CHE $[f,g]_{q,p} = [f,g]_{Q,P}$

DIMOSTRAZIONE BANALE

TRASF. DI GAUGE E TRASF. CANONICHE

ABBIAMO VISTO CHE ~~PER~~ **UNA** TRASF. DI GAUGE (PER VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONE) LASCIA INVARIATA LA VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE DI HAMILTON.

QUINDI CONSIDERANDO LE DUE LAGRANGIANE

$$\mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t) \quad \text{E} \quad \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t) + \frac{df(q^\alpha, t)}{dt} \qquad (1)$$

AVREMO CHE $\quad \delta S = \delta \tilde S \quad$ CON $\begin{cases} S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)\, dt \\ \tilde S = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)\, dt \end{cases}$

DA CUI ENTRAMBE LE LAGRANGIANE DOVRANNO SODDISFARE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad \text{E} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q^\alpha} = 0$$

LA (1) GENERA NELLO SPAZIO DELLE FASI **UNA** TRASF. DI COORDINATE, OSSERVIAMO CHE QUANDO PASSIAMO DALLA $\mathcal{L}$ ALLA $\tilde{\mathcal{L}}$, LE q^α **SONO FORMALMENTE UGUALI**

QUINDI NELLO SPAZIO DELLE FASI AVREMO LA SEGUENTE TRASF. DI COORDINATE

$$\Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha \\ P_\alpha = \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q^\alpha} = \overbrace{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha}}^{p_\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial \dot q^\alpha} \overbrace{\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial q^\beta} \dot q^\beta + \dfrac{\partial f}{\partial t} \right\}}^{df/dt} \end{cases}$$

$$= p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}$$

CIOÈ AVREMO:

$$\boxed{\begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha \\ P_\alpha = p_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} q^\alpha = Q^\alpha \\ p_\alpha = P_\alpha - \dfrac{\partial f(Q^\alpha, t)}{\partial Q^\alpha} \end{cases}} \quad (1\alpha)$$

AVREMO INOLTRE CHE

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - \tilde{\mathcal{L}} = \dot{q}^\alpha \left(p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \right) - \mathcal{L} - \frac{df}{dt}$$

$$= \underbrace{\left[\dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L} \right]}_{H} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta} - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\boxed{\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) - \frac{\partial f(q^\alpha, t)}{\partial t}} \quad (2*)$$

COMUNQUE ESSENDO $q^\alpha = Q^\alpha$ POTREMO ANCHE SCRIVERE

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(Q^\alpha, p_\alpha, t) - \frac{\partial f(Q^\alpha, t)}{\partial t} \quad (2* bis)$$

OSSERVIAMO CHE ~~CONSIDERANDO LA~~ TRASF. DI LEGENDRE

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = \dot{Q}^\alpha P_\alpha - \tilde{\mathcal{L}}$$

AVREMO LE NUOVE EQUAZIONI DI HAMILTON.

$$\boxed{\begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} \\[2ex] \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^\alpha} \end{cases}} \quad (3*)$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE SE CERCHIAMO DI PROVARE LE (3*) ~~GARANTENDO CORRISPONDENZE~~ DA UN CALCOLO DIRETTO

AVREMO PER LA (2*) E LA (1*)

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial P_\alpha} = \dot{q}^\beta \delta_{\beta\alpha} = \dot{q}^\alpha = \dot{Q}^\alpha \Rightarrow \boxed{\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha}} \quad (3*)_1$$

ANALOGAMENTE

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^\alpha} = \overbrace{\frac{\partial H}{\partial Q^\alpha}}^{-\dot{p}_\alpha = \partial H/\partial q^\alpha} + \overbrace{\frac{\partial H}{\partial p_\beta}}^{\dot{q}^\beta = \dot{Q}^\beta} \underbrace{\frac{\partial p_\beta}{\partial Q^\alpha}}_{-\frac{\partial^2 f(Q^\alpha,t)}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}} - \frac{\partial^2 f}{\partial Q^\alpha \partial t} =$$

$$= -\dot{p}_\alpha \underbrace{- \dot{Q}^\beta \frac{\partial^2 f(Q^\alpha,t)}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta} - \frac{\partial^2 f(Q^\alpha,t)}{\partial Q^\alpha \partial t}}_{-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f(Q^\alpha,t)}{\partial Q^\alpha}\right]} =$$

$$= -\dot{p}_\alpha - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f(Q^\alpha,t)}{\partial Q^\alpha}\right] = -\frac{d}{dt}\left\{p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial Q^\alpha}\right\} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\underbrace{\left\{p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\right\}}_{P_\alpha} = -\dot{P}_\alpha$$

DA CUI
$$\boxed{\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^\alpha}} \qquad (3*)_2$$

QUINDI LA TRASFORMAZIONE E' CERTAMENTE CANONICA.

"FUNZIONE GENERATRICE"

OSSERVIAMO CHE AVENDO ASSUNTO CHE $q^\alpha = Q^\alpha$ NON POSSIAMO CERTAMENTE CERCARE COME FUNZIONE GENERATRICE UNA FUNZIONE DI TIPO $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ (PERCHE' q^α ED Q^α SONO IN QUESTO CASO VARIABILI INDIPENDENTI, MENTRE NEL CASO DI INTERESSE $q^\alpha = Q^\alpha$, CIOE' NON POSSONO ESSERE INDIPENDENTI

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE GENERATRICE DI TIPO F_2

$$F_2(q^\alpha, P_\alpha, t) = q^\alpha P_\alpha - f(q^\alpha, t) \qquad (4*)$$

IN QUESTO **CASO** AVREMO LE RELAZIONI

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = P_\alpha - \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \\ Q^\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q^\alpha \qquad (5*) \\ K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = H - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

INOLTRE SE CALCOLIAMO LA

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^\alpha \partial P_\beta} = \frac{\partial q^\beta}{\partial q^\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \qquad (6*)$$

DA CUI $\det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) = \det \delta_{\beta\alpha} \neq 0$.

<u>NOTA!</u> CHE LA TRASF. DI GAUGE **INDUCA UNA** TRASF. CANONICA SI VEDE ANCHE DAL SEGUENTE CALCOLO.

VALUTIAMO LE PARENTESI DI POISSON

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} \; ; \quad [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} \; ; \quad [P_\alpha, Q^\beta]_{q,p}$$

$$[Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = \underbrace{\frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\gamma}}_{\delta^{\beta\gamma}} - \underbrace{\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma}}_{\delta^{\alpha\gamma}} \underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\gamma}}_{=0} = 0$$

INFATTI $\dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\gamma} = \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial p_\gamma} = 0$ IN QUANTO $\{q^\alpha, p_\gamma\}$ SONO VARIABILI INDIPENDENTI

$$[P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = \underbrace{\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma}}_{\delta_{\alpha\gamma}} \underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma}}_{\delta_{\beta\gamma}} = 0$$

INFATTI $\dfrac{\partial P_\beta}{\partial q^\gamma} = \dfrac{\partial P_\beta}{\partial Q^\gamma} = 0$ IN QUANTO Q^γ, P_β SONO VARIABILI INDIPENDENTI

$$[P_\alpha, Q^\beta]_{q,p} = \underbrace{\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma}}_{\delta} \underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\gamma}}_{\delta^{\gamma\beta}} - \underbrace{\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}}_{=} \underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial p_\gamma}}_{=} = \delta_\alpha{}^\beta$$

QUINDI ESSENDO

$$(7*)\begin{cases} [Q^\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [Q^\alpha, Q^\beta]_{Q,P} = 0 \\ [P_\alpha, P_\beta]_{q,p} = [P_\alpha, P_\beta]_{Q,P} = 0 \\ [P_\alpha, Q^\beta]_{q,p} = [P_\alpha, Q^\beta]_{Q,P} = \delta_\alpha^\beta \end{cases}$$

(DEGLI INVARIANTI CANONICI)

ALLORA LA TRASF. E' CANONICA

$\Longleftrightarrow$

APPLICAZIONE DELLA TRASF. DI GAUGE AD UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

ABBIAMO VISTO CHE

$$(8*)\begin{cases} \tilde{A}^*_\alpha = A_\alpha + \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha} \\ \tilde{\Phi} = \Phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \end{cases}$$

QUESTA TRASF. DI GAUGE $\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \dfrac{df}{dt}$

NEL CASO SPECIFICO ABBIAMO VISTO CHE $\quad q^\alpha = x^\alpha \quad \dot{q}^\alpha = v^\alpha$

$\tilde{f} = \dfrac{c}{q} \cancel{f}$ DA CUI $f = \dfrac{q}{c}\tilde{f}$

QUINDI DATA LA LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^\alpha \dot{q}_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha \dot{q}^\alpha - q\Phi \qquad (*)$$

FACENDO CORRISPONDERE PER LA GAUGE INVARIANZA DELLA $\delta S = \delta\tilde{S}$

$$\tilde{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \frac{q}{c}\frac{d\tilde{f}}{dt} \qquad (**)$$

RICORDIAMO CHE IN CORRISPONDENZA DELLA $\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\beta + \frac{q}{c} A_\alpha$$

DA CUI $\dot{q}^\alpha = \frac{1}{m}\left(p^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha\right)$ ED $\dot{q}_\alpha = \frac{1}{m}\left(p_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha\right)$

DA CUI PER LA TRASF. DI LEGENDRE

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) =$$

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \frac{1}{2m}\left(p^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha\right)\left(p_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha\right) + q\,\Phi$$

VEDIAMO QUINDI LA TRASF. CANONICA (NELLO SPAZIO DELLE FASI CORRISPONDENTE ALLA TRAF. DI GAUGE INTRODOTTA NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI).

ABBIAMO VISTO CHE AVREMO IL PASSAGGIO

$$(q^\alpha, p_\alpha) \longleftrightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)$$

DOVE:

$$\begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha \\ P_\alpha = p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} = p_\alpha + \frac{q}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} q^\alpha = Q^\alpha \\ p_\alpha = P_\alpha - \frac{q}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha} \end{cases} \qquad (9*)$$

OSSERVIAMO QUINDI CHE:

$$p_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha = P_\alpha - \frac{q}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha} - \frac{q}{c} A_\alpha = P_\alpha - \frac{q}{c}\overbrace{\left(A_\alpha + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha}\right)}^{\tilde{A}_\alpha}$$

$$= \left(P_\alpha - \frac{q}{c}\tilde{A}_\alpha\right)$$

ED ANALOGAMENTE

$$\left(p^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha\right) = \left(P^\alpha - \frac{q}{c}\tilde{A}^\alpha\right)$$

ABBIAMO VISTO CHE LA NUOVA HAMILTONIANA

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) - \frac{q}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$$

DA CUI

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = \overbrace{\frac{1}{2m}\left(P^\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}_\alpha\right) + q\Phi}^{H(q^\alpha, p_\alpha, t)} -$$

$$- \frac{q}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(P^\alpha - \frac{q}{c}A^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}_\alpha\right) + q\overbrace{\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right)}^{\tilde{\Phi}}$$

CIOÈ

$$\boxed{\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = \frac{1}{2m}\left(P^\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}_\alpha\right) + q\tilde{\Phi}} \quad (10*)$$

MENTRE LA FUNZIONE GENERATRICE CORRISPONDENTE SARÀ:

$$\boxed{F_2(q^\alpha, P_\alpha, t) = q^\alpha P_\alpha - \frac{q}{c}\tilde{f}(q^\alpha, t)} \quad (11*)$$

CHE DÀ PROPRIO LE 3 CONDIZIONI:

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q^\alpha} = P_\alpha - \dfrac{q}{c}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial q^\alpha} \\ Q^\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q^\alpha \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = H - \dfrac{q}{c}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \end{cases} \quad (12*)$$

NOTA FINALE:

SE CALCOLIAMO LA $\hat{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ CON UN CALCOLO DIRETTO

AVREMO

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \frac{q}{c}\frac{d\hat{f}}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2} m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{q}{c} A_\alpha \dot{q}^\alpha - q\Phi$$

$$+ \frac{q}{c}\left\{ \frac{\partial \hat{f}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{q}{c}\overbrace{\left(A_\alpha + \frac{\partial \hat{f}}{\partial q^\alpha}\right)}^{\hat{A}_\alpha}\dot{q}^\alpha - q\overbrace{\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right)}^{\tilde{\Phi}}$$

DA CUI PONENDO $q^\alpha = Q^\alpha$ POTREMO SCRIVERE

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{Q}^\alpha \dot{Q}^\beta + \frac{q}{c}\hat{A}_\alpha \dot{Q}^\alpha - q\tilde{\Phi}$$

DA CUI FACENDO LA TRASFORMATA DI LEGENDRE AVREMO LA

(10*)

$$\tilde{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = \frac{1}{2m}\left(P^\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{q}{c}\hat{A}_\alpha\right) + q\tilde{\Phi}$$

DOVE $P_\alpha = \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}^\alpha}$

CON LE NUOVE EQUAZIONI DI **HAMILTON**.

$$\begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q^\alpha} \end{cases} \qquad (12*)$$

SISTEMA DI N SOLIDI SOGGETTO AD UN POTENZIALE GENERALIZZATO E AD UN POTENZIALE CONSERVATIVO

IN QUESTO CASO AVREMO

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + A_\alpha \dot{q}^\alpha + A_0}_{T} + \underbrace{U^{(c)}}_{\text{POTENZ. CONSERVATIVO}} + \underbrace{U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha}_{\text{POT. GENERALIZZATO}}$$

RICORDANDO CHE $\quad p_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + A_\alpha + U_\alpha$

DA CUI $\quad \dot{q}^\alpha = (A^{\alpha\gamma})^{-1} (p_\gamma - A_\gamma - U_\gamma)$

DA CUI APPLICANDO LA TRASF. DI LEGENDRE

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

AVREMO L'HAMILTONIANA

$$\boxed{\begin{aligned} H(q^\alpha, p_\alpha, t) = (A^{-1})^{\alpha\beta} (p_\alpha - A_\alpha - U_\alpha)(p_\beta - A_\beta - U_\beta) - \\ - (A_0 + U_0 + U^{(c)}) \end{aligned}}$$

CONSIDERIAMO UNA TRASF. DI GAUGE DEFINENDO

$$\tilde{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \frac{d\, f(q^\alpha, t)}{dt}$$

QUESTA SARÀ ASSOCIATA ALL'INTRODUZIONE DEL NUOVO POTENZIALE GENERALIZZATO

$$\tilde{U} = U + \frac{df}{dt} \qquad \text{CON} \quad \begin{cases} U = U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha \\ \tilde{U} = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_\alpha \dot{q}^\alpha \end{cases}$$

TALE CHE

$$(*) \quad \begin{cases} \tilde{U}_0 = U_0 + \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \tilde{U}_\alpha = U_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{cases}$$

ABBIAMO VISTO CHE UNA TRASF. DI GAUGE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI, INDUCE NELLO SPAZIO DELLE FASI AD UNA CORRISPONDENTE TRASF. CANONICA

$$\begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha \\ P_\alpha = p_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \text{E VICEVERSA} \quad \begin{cases} q^\alpha = Q^\alpha \\ p_\alpha = P_\alpha - \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{cases}$$

CON L'INTRODUZIONE DELLA NUOVA HAMILTONIANA

$$\hat{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha, t) - \frac{\partial f(q^\mu, t)}{\partial t}$$

ESSENDO

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \text{ED ANALOGAMENTE} \quad \begin{cases} \dot{Q}^\alpha = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$$

SE CALCOLIAMO LA NUOVA HAMILTONIANA AVREMO.

$$\hat{H} = (A^{-1})^{\alpha\beta}\Big[P_\alpha \underbrace{- \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} - A_\alpha - \bar{U}_\alpha}_{\tilde{U}_\alpha}\Big]\Big[P_\beta \underbrace{- \frac{\partial f}{\partial q^\beta} - A_\beta - \bar{U}_\beta}_{\tilde{U}_\alpha}\Big]$$

$$-(A_0 + \underbrace{\bar{U}_0 + \bar{U}^{(c)}) - \frac{\partial f}{\partial t}}_{\tilde{U}_0}$$

RICORDANDO LE (*) AVREMO:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H}(Q^\alpha, P_\alpha, t) = (A^{-1})^{\alpha\beta}\big[P_\alpha - A_\alpha - \tilde{U}_\alpha\big]\big[P_\beta - A_\alpha - \tilde{U}_\beta\big] \\ -(A_0 + \bar{U}^{(c)} + \hat{U}_0.)\end{aligned}}$$

ESSENDO LE FUNZIONI

$$(A^{-1})^{\alpha\beta}(Q^\mu, t) \;;\quad A_\alpha = A_\alpha(Q^\mu, t) \;;\quad \tilde{U}_0 = \bar{U}_0(Q^\mu, t)$$

$$\tilde{U}_\alpha = \tilde{U}_\alpha(Q^\mu, t) \;;\quad \bar{U}^{(c)} = \bar{U}^c(Q^\mu, t).$$