

CALCOLO DELLA ENERGIA CINETICA

1

TEOREMA DI KÖNIG

"TEOREMA DI KÖNIG"

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DISCRETO DI PUNTI MATERIALI

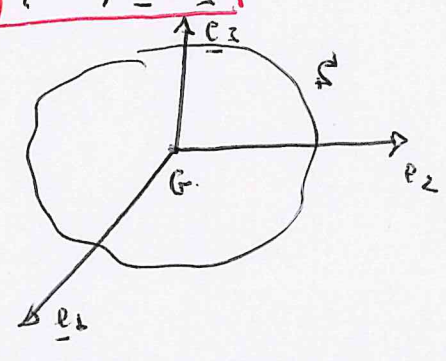
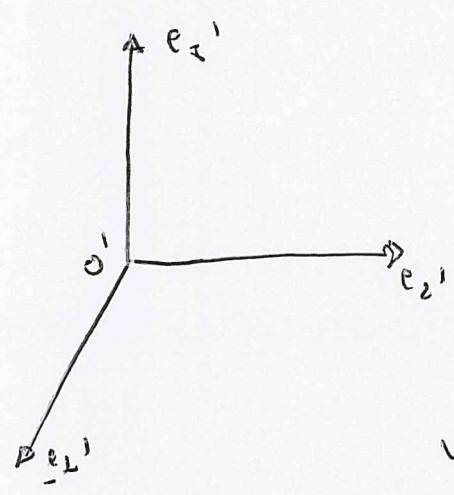
INTRODUCIAMO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO, UNO

CONSIDERATO IN MODI "CONVENZIONALI" "FISSE"

$\{O', \underline{e}_i'\}$ ED UNO DI ORIGINE IL BARICENTRO G

ED ASSI COSTANTEMENTE PARALLELI AGLI ASSI FISSI AGITO

"RIFERIMENTO BARICENTRALE" $\{G, \underline{e}_i\}$



VALUTIAMO L'ENERGIA CINETICA NEI

DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO E PROVIAMO CHE

$$T' = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + T$$

DOVE $T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{V}_i'^2$

ED $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{V}_i^2$

ESSENDO \underline{V}_i' LA VELOCITA' DELL'IMO PUNTO $P_i \in S'$
 VALUTATA NEL RIF. "FISSE" $\{O', \underline{e}_i'\}$ ED \underline{V}_i LA
 CORISPONDENTE VELOCITA' AI P_i NEL RIF. BARICENTRALE

$$\{G, \underline{e}_i\}$$

DATI: DAL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

$$\underline{V}_i' = \underline{V}_G + \underline{V}_i$$

DA CUI QUANDO AUREMO:

(2)

$$V_i^2 = \underline{V_G}^2 + \underline{V_i}^2 + 2 \underline{V_G} \cdot \underline{V_i}$$

DESI' COSTITUIAMO NELLA T' AUREMO:

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2$$

$$+ \underline{V_G} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \underline{V_i}$$

MA ALLA DEFINIZIONE DI BARICENTRO

$$G=O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \quad \text{MA SE CI PONIAMO NELLE}$$

RIFERIMENTO BARICENTRALE (CON O=G) AUREMO

$$M \underline{V_G} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{V_i} = 0$$

DA CUI

$$T' = \frac{1}{2} M \dot{G}^2 + T$$

QUINDI L'ENERGIA CINETICA TOTALE E' DATA DALLA
SOMMA "DELLA ENERGIA CINETICA VALUTATA NEL RIFERIMENTO
BARICENTRALE" PIU' "L'ENERGIA CINETICA AGIL BARICENTRO"
CON RIAPPRESA CONCENTRANDO TUTTA LA MASSA M AGIL
SISTEMA NEL SUO BARICENTRO



ENERGIA CINETICA AI UN CORPO RIGIDO CON UN
PUNTO FISSO.

CONSIAGRIAMO IL MOTO RIGIDO SFERICO ATTORNO AL PUNTO
OCC' (ESSENDO IL PUNTO FISSO)

SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SIA DISCRETO.

3

ESSENDO

$$\underline{V}_i = \underline{\omega} \wedge (P_i - O)$$

AVREMO CALCOLATO L'ENERGIA CINETICA CHE:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\underline{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot [\underline{\omega} \wedge (P_i - O)]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ [\underline{\omega} \wedge (P_i - O)] \wedge \underline{\omega} \} \cdot (P_i - O)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (P_i - O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (P_i - O)] \} \cdot \underline{\omega}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ [\underline{\omega} \wedge (P_i - O)] \wedge (P_i - O) \} \cdot \underline{\omega}$$

DA OUI UTILIZZANDO IL CALCOLO DEL PRODOTTO VETTORIALE

$$T = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ [\underline{\omega} \cdot (P_i - O)] (P_i - O) - (P_i - O)^2 \underline{\omega} \} \cdot \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (P_i - O)^2 \underline{\omega} - [\underline{\omega} \cdot (P_i - O)] (P_i - O) \} \cdot \underline{\omega}$$

POICHO $\underline{\omega} = \omega^\beta \underline{e}_\beta$ $(P_i - O) = x^{(\alpha)} \underline{e}_\alpha$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (x^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \omega^\beta \underline{e}_\beta - (\omega^\alpha x^{(\alpha)}) x^{(\beta)} \underline{e}_\beta \} \cdot \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (x^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \underbrace{\omega^\beta}_{\omega^\alpha \delta_{\alpha\beta}} - x^{(\alpha)} x^{(\beta)} \omega^\alpha \} \underbrace{\omega^\beta \underline{e}_\beta}_{\omega^\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (x^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \delta_{\alpha\beta} - x^{(\alpha)} x^{(\beta)} \} \omega_\alpha \omega_\beta$$

(DOVE OUVIAMENTE SIAMO ASSUMENDO CHE NON VI SIA ALCUNA DIFFERENZA TRA COMPONENTI COVARIANTI E CONTRAVARIANTI (OCC $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ (x_{\alpha}^{(i)} x_{\alpha}^{(i)}) \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha}^{(i)} x_{\beta}^{(i)} \} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}$$

$I_{\alpha\beta}$ "TENSORO DI INERZIA".

QUINDI PER UN CORPO RIGIDO SFERICO CON PUNTO FISSO O AUREOLO

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}$$

NOTA:

NEL CASO IN CUI SI CONSIDERA IL TEOREMA DI KÖNIG, RIGORANTE CHE NON È RIF. BARICENTRALE IL SISTEMA S' SI COMPORTA COME UN CORPO RIGIDO SFERICO CON G COME PUNTO FISSO PER CUI

$$\begin{cases} T' = \frac{1}{2} m \dot{c}^2 + T \\ \text{DOVE:} \\ T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \end{cases}$$

OUVIAMENTE IL PASSAGGIO DAL DISCRETO AL CONTINUO È BANALE

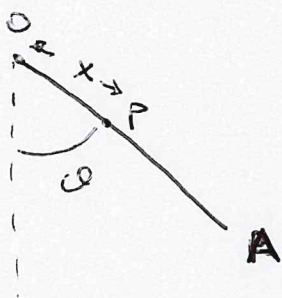
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{\Delta} d\sigma \rho(P) v^2$$

ESSENDO IN GENERALE "PER SISTEMI NON OMOGENEI" LA DENSITA' $\Rightarrow \rho = \rho(P)$ MENTRE NEL CASO OMOGENEO $\Rightarrow \rho = \text{costante}$

CONSIDERIAMO, COME ESEMPIO, IL CALCOLO DI T PER
UN PUNTO FISSO NEL PIANO E NELLO SPAZIO

(5)

NEL PIANO



(AURGO UN SOLO GRADO
DI LIBERTA', CON $\overline{OA} = L$)

APPLICANDO LA TEORIA (NEL CASO DI UN CORPO RIGIDO CHE
SI MUOVE IN UNO RIGIDO SFERICO)

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha P} \omega_{\alpha} \omega_{\alpha}$$

ESSENDO L'ASSE DI ROTAZIONE ORTOGONALE AL PIANO

$$\underline{\omega} = [0, 0, \dot{\theta}]$$

$$\text{CON } \underline{\omega} = \dot{\theta}$$

DA CUI

$$T = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}^2$$

$$I_{33} = I_{2,0}$$

"MOMENTO DI
INERZIA RISPETTO
ALL'ASSE \hat{z}
PASSANTE PER O"

$$I_{2,0} = \int_0^L dx \rho \cdot x^2 = \frac{1}{2} \rho \int_0^L x^2 dx$$

(SE L'ASTA E'
OMOGENA

$$\rho = \frac{m}{L} = \text{CONSTANTE})$$

$$I_{2,0} = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} m L^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2$$

OPPURE SI SAREBBE POTUTO CALCOLARE IL ROTAZIONE
L'INTEGRALE, NELL'ENERGIA T INDICANDO CON x LA DISTANZA DI PUNTO

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho dx v^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho dx (x \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 \int_0^L x^2 dx$$

$$= \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2$$

NELLO SPAZIO:

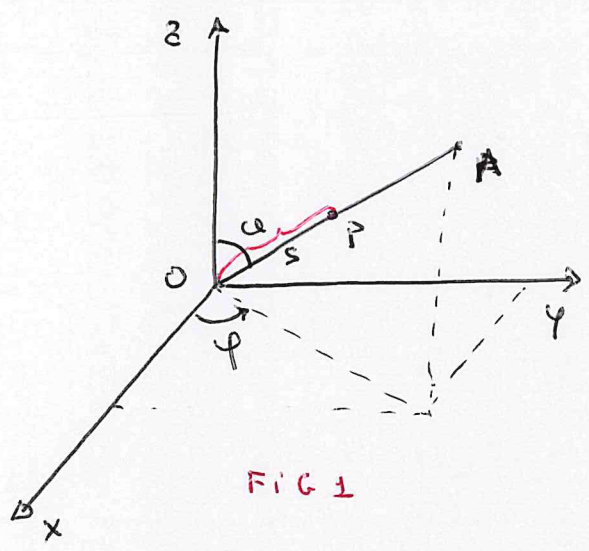


FIG 1

IN QUESTO CASO ABBIAMO
2 GRADI DI LIBERTA' (α, φ)
QUINDI IN COORDINATE SFERICHE
UN GENERICO PUNTO P E OA
AVRA' COORDINATE

$$\begin{cases} x = s \sin \alpha \cos \varphi \\ y = s \sin \alpha \sin \varphi \\ z = s \cos \alpha \end{cases}$$

PER IL CALCOLO DELLA ENERGIA CINETICA:

METODO PUNTUALE

(CON INTEGRAZIONE)

$$T = \frac{1}{2} \int dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

DOVE $\dot{\mathbf{r}} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = s [\cos \alpha \dot{\alpha} \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \dot{\varphi}] \\ \dot{y} = s [\cos \alpha \dot{\alpha} \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \dot{\varphi}] \\ \dot{z} = -s \sin \alpha \dot{\alpha} \end{cases}$$

~~Metodo~~ QUADRATI

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = s^2 [\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2]$$

DA CUI BASTA INTEGRARE

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L ds \rho s^2 =$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2] \frac{m}{2} \int_0^L s^2 ds = \frac{1}{6} mL^2 [\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2]$$

$\int_0^L s^2 ds = \frac{L^3}{3}$

$$T = \frac{1}{6} mL^2 [\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2]$$

"CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO

DALLA TEORIA SAPPIAMO CHE:

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha \beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}$$

OSSERVO CHE NON CONOSCO L'ASSE DI ROTAZIONE (CHE IN QUESTO CASO NON COINCIDE CON NESSUNO DEI GLI ASSI DEL RIFERIMENTO $\{0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$).

PER POTRIAMO CHE $\underline{\omega} = \underline{\omega}(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$

ESISTONO \bar{T} UNO SCALARE CALCOLIAMOLO NEL RIF.

"PRINCIPALE DI INERZIA", DOVE I VECTORE DI INERZIA

$$I_{\alpha\beta} = \int dm [(x_{\alpha} x_{\alpha})^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha} x_{\beta}]$$

E' DIAZIONALE.

CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO IN CUI L'ASTA COINCIDE CON L'ASSE x' , IN QUESTO CASO UN $\forall P \in \bar{OA}$

AVRA COORDINATE $P = [x, 0, 0]$

DA CUI DEDUCIAMO

$$\begin{aligned} I_{11} &= 0 & I_{22} &= I_{33} = \int dm x^2 = \\ & & &= \frac{m}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2 \end{aligned}$$

$$I_{12} = I_{23} = I_{13} = 0$$

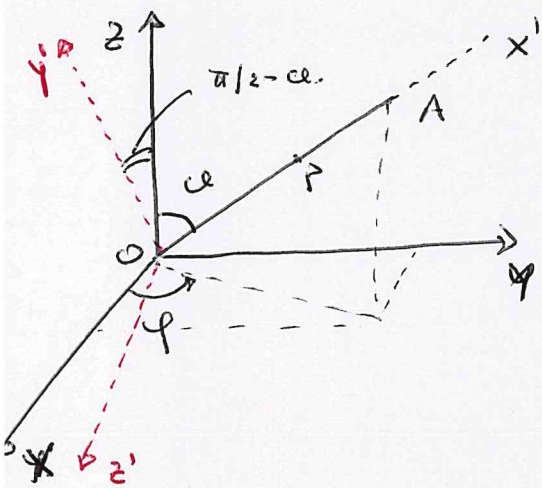
$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} ML^2 \end{pmatrix}$$

CHIARAMENTE AVREMO
DO SISTEMI PRINCIPALI

DI INERZIA CHE HANNO COME ASSE \underline{e}_1 L'ASSE x' SOGGETTO

E COME ASSI $\underline{e}_2, \underline{e}_3$ \forall COPPIA DI ASSI (RECIPROCAMENTE

ORTOGONALI) APPARTENENTI AL PIANO ORTOGONALE ALL'ASTA \bar{OA} E PASSANTI PER O.



NOTA: AVREMO A BIRIAMO UN SOLO "AUTODUTTORE" INVAIPIWAGATO ASSOCIATO AL TORSIONE AI INERZIA)

ALLORA TRA QUESTI DO RIFERIMENTI "PRINCIPALI AI INERZIA NE SELEZIONIAMO UNO IN CUI SIA FACILE CALCOLARE IL VETTORE $\underline{\omega}$.

CONSIDERIAMO COME:

1) ASSE y' L'ASSE ORTOGONALE AD x' APPARTENENTE AL PIANO PASSANTE PER L'ASSE e_3 E PER L'ASIA OA

2) ASSE z' ORTOGONALE AGLI ASSI x' E y' CUI PER COSTRUZIONE SI TROVA NEL PIANO (x, y) (VEDI FIGURA 2)

ALLORA IN QUESTO RIFERIMENTO $\{x', y', z'\}$

AUREMO CHE:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$$

DOVE $\underline{\omega}_1$ SI OTTIENE FISSANDO φ E FACENDO VARIARE ω . L'ASSE DI ROTAZIONE SARA' QUINDI z' DI VERSORE e_3'

DACI
$$\underline{\omega}_1 = \{0, 0, \dot{\varphi}\}$$
 (NEL RIF. PRINCIPALE AI INERZIA $\{0, x', y', z'\}$)

ANALOGAMENTE: $\underline{\omega}_2$ SI OTTIENE FISSANDO ω E FACENDO VARIARE φ . L'ASSE DI ROTAZIONE SARA' QUINDI L'ASSE e_3 DEL RIF. $\{0, e_1\}$

DOVEDO VALUTARE $\underline{\omega}_2$ NEL RIF. $\{0, x', y', z'\}$, e_3 HA SOLTANTO DUE COMPONENTI RISPETTIVAMENTE NEGLI ASSI x' E y' (COMPONENTE NULLA IN z')

$$\underline{p}_2 = \{ \omega_2 c, \omega_2 (\bar{u}/2 - c), 0 \} = \{ \omega_2 c, \sin c, 0 \}$$

Dal cui $\underline{\omega}_2 = \dot{\psi}$ $\underline{p}_3 = \{ \dot{\psi} \omega_2 c, \dot{\psi} \sin c, 0 \}$

SOMMANDO

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \{ \dot{\psi} \omega_2 c, \dot{\psi} \sin c, \dot{c} \}$$

(NOI RIFORIMENTO
PRINCIPALE AI
INCROCI (x', y', z'))

ALORA VALUTANDO L'ENERGIA CINETICA IN QUESTO

RIFERIMENTO AURICO:

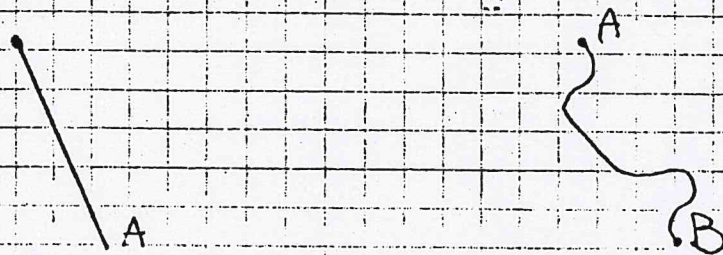
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} (I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} I_{22} (\omega_2^2 + \omega_3^2) = \frac{1}{6} m L^2 [\dot{c}^2 + \sin^2 c \dot{\psi}^2] \end{aligned}$$

CH E' LO STESSO RISULTATO OTTENUTO CON IL METODO PUNTOALE, E SUCCESSIVA INTEGRAZIONE.



~~Il vincolo trattato nel paragrafo precedente era un vincolo che impone delle restrizioni sulla posizione occupata nel tempo dal punto materiale.~~

I vincoli che impongono restrizioni alle posizioni di un corpo si chiamano "vincoli olonomi". Un esempio di vincolo olonomo è offerto da una sfera retta incernierata in un punto, oppure da due palline A e B connesse diante un filo (il fatto che la distanza tra le due palline deve essere minore od eguale della lunghezza del filo, impone delle restrizioni alle posizioni).



→ "SCLERONOMI"

"ANISCLERONOMI"

I vincoli olonomi possono classificarsi in due categorie molto generali. "Vincoli olonomi indipendenti dal tempo" e "vincoli olonomi dipendenti dal tempo". Un esempio di vincolo olonomo dipendente dal tempo è il seguente: un punto materiale si muove su di un piano mentre questo si muove nello spazio.

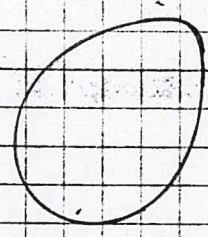
I vincoli olonomi possono distinguersi in: "vincoli bilateri" e "vincoli unilateri". I primi sono quelli che, dal punto di vista geometrico, si traducono nell'appartenenza del punto materiale o del sistema di punti a certe superfici. Così il punto materiale che si muove su di un tavolo è soggetto ad un vincolo bilatero. Il vincolo unilatero, invece, è quello che analiticamente viene tradotto in termini di disequazioni: il punto o sistema di punti materiali non può attraversare una certa superficie.

Per esprimere, dunque, il fatto che un sistema di punti P_1, P_2, \dots, P_n è soggetto a vincolo bilatero, si dice che i punti devono soddisfare la equazione:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$$

Per esprimere, invece, il fatto che un sistema di punti P_1, P_2, \dots, P_n è soggetto a vincolo unilatero, si dice che i punti devono soddisfare la disequazione:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) < 0$$



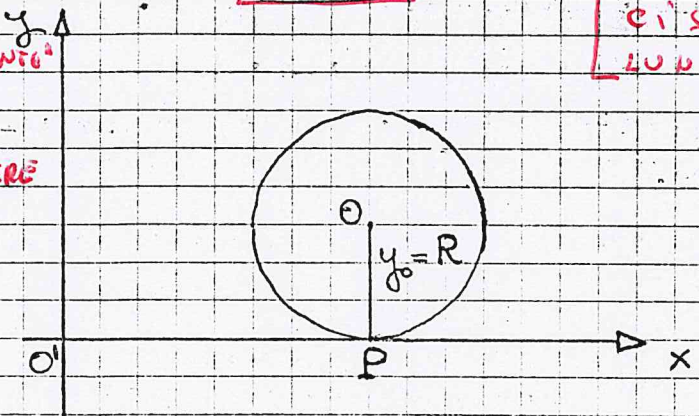
3. VINCOLI ANOLONOMI.

I "vincoli anolonomi" sono quelli che impongono delle limitazioni al to di moto, e in generale, non alle posizioni, (almeno non necessariamen
 Dal greco olofono significa "integrabile" e anolonomo significa "non tegrabile". Un primo esempio di vincolo anolonomo è costituito da una r a cui si impone di rotolare senza strisciare su un piano per esempio ori tale. Cosa vuol dire che la ruota deve rotolare senza strisciare? Vuol re che il punto di contatto tra la ruota ed il binario deve avere veloci nulla:

$$\underline{v}_P = \underline{0}$$

NOTA: FICCAMENTO E' NECESSARIO CHE CI SIA ATTRITO LUNGO IL BINARIO X

(QUESTO E' UN VINCOLO "APPARENTEMENTE" ANOLONOMO. IN REALTA' POTRA' ESSERE CONSIDERATO COME UN VINCOLO OLONOMO.)



Ora, siccome il moto della ruota è rigido (la ruota è da considerare corpo rigido) allora:

$$(I) \quad \underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P - O) = \underline{0} ,$$

e come si vede questa è una limitazione che riguarda la velocità dei pun della ruota e non già le posizioni che questi punti possono occupare, ed vincolo è pertanto anolonomo. Come può essere tradotto analiticamente q sto vincolo? Il vettore $\underline{\omega}$ ha componenti $(0, 0, \omega)$, mentre il punto ha coordinate $(x, y_0, 0)$. Allora l'equazione vettoriale (I) si scri

$$\dot{x} = -\omega R$$

essendo \dot{x} la velocità del punto O . Scriveremo meglio:

$$\dot{x} = -R \dot{\varphi}$$

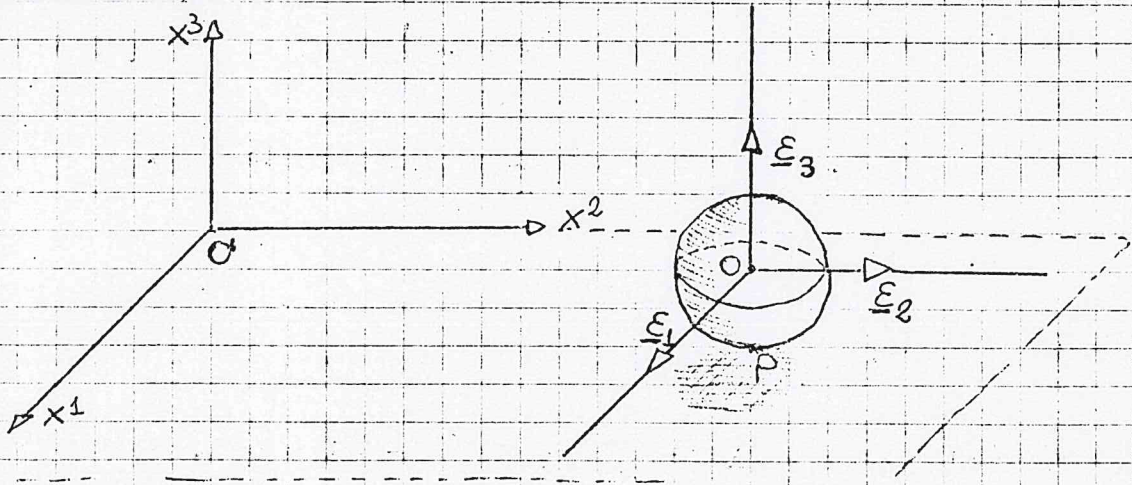
Ora se integriamo questa equazione, otteniamo:

$$x = -R \varphi + x_0$$

Ma questa equazione rappresenta una limitazione sulla posizione che deve occupare il punto O , e, dunque, il vincolo considerato non è un vincolo propriamente anolonomo.

Consideriamo una sfera che rotola su di un piano, e dimostriamo che in questo caso il vincolo è propriamente anolonomo.

Prendiamo un riferimento fisso $\{O', e_1, e_2, e_3\}$ ed il riferimento solidale $\{O, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ con la sfera. I versori ξ_1, ξ_2 ed ξ_3 sono dati in funzione del tempo.



Anche in questo caso, se la sfera deve rotolare senza strisciare, il punto di contatto deve avere velocità nulla.

Vediamo quanti parametri sono necessari per visualizzare il moto della pallina rispetto al riferimento fisso. Innanzitutto bisogna fornire in funzione del tempo le coordinate di O , ma poiché O deve rimanere sempre alla quota $x_3 = R$, in realtà basta dare le coordinate x_1 ed x_2 di O ; inoltre bisogna conoscere istante per istante l'orientazione del riferimento solidale rispetto a quello fisso, e questo è possibile mediante gli angoli

di Eulero θ, φ, ψ .

Dal momento che la pallina rotola sul piano, allora l'asse di istantanea rotazione è costantemente parallelo al piano e pertanto il vettore $\underline{\omega}$ ha componenti lungo l'asse x_3 del riferimento fisso: $\underline{\omega}(\omega_1, \omega_2, 0)$.

Il punto di contatto P avrà coordinate $(\xi, \eta, 0)$.

Se scriviamo l'equazione:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P - O),$$

da essa possiamo ricavare le seguenti due equazioni scalari:

$$\dot{x}_1 - R \omega_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 + R \omega_1 = 0$$

A questo punto si potrebbe pensare di integrare queste equazioni ed ottenere, come nell'esempio precedente, delle restrizioni sulle posizioni pate dal sistema. Ora teniamo presente che le componenti della velocità golare possono essere espresse in funzione degli angoli di Eulero:

$$\omega_1 = \cos \psi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \psi \dot{\varphi}$$

$$\omega_2 = \sin \psi \dot{\theta} - \sin \theta \cos \psi \dot{\varphi},$$

e pertanto scriveremo:

$$\dot{x}_1 - R \sin \psi \dot{\theta} + R \sin \theta \cos \psi \dot{\varphi} = 0$$

$$\dot{x}_2 + R \cos \psi \dot{\theta} + R \sin \theta \sin \psi \dot{\varphi} = 0,$$

e queste sono le equazioni che analiticamente traducono il vincolo per cui la sfera sul tavolo può solo rotolare senza strisciare.

Ora, ci si potrebbe chiedere se non sia possibile integrare questo sistema. Dimostreremo che ciò non è possibile.

Supponiamo per assurdo che esistano un integrale $f(x_1, x_2, \varphi, \psi, \theta) =$ della prima equazione ed un integrale $g(x_1, x_2, \varphi, \psi, \theta) = 0$ della secon

equazione. Se la funzione f è identicamente nulla, sarà anche $\frac{d f}{d t} = 0$, e pertanto:

$$\frac{d f}{d t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0$$

ma:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -R \sin \psi \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = R \sin \theta \cos \psi$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} = R \cos \theta \cos \psi$$

Ora, dovendo essere la funzione f almeno di classe C^2 , segue che per essa è valido il lemma di Schwartz, cioè deve scaturire l'uguaglianza tra le due derivate miste.

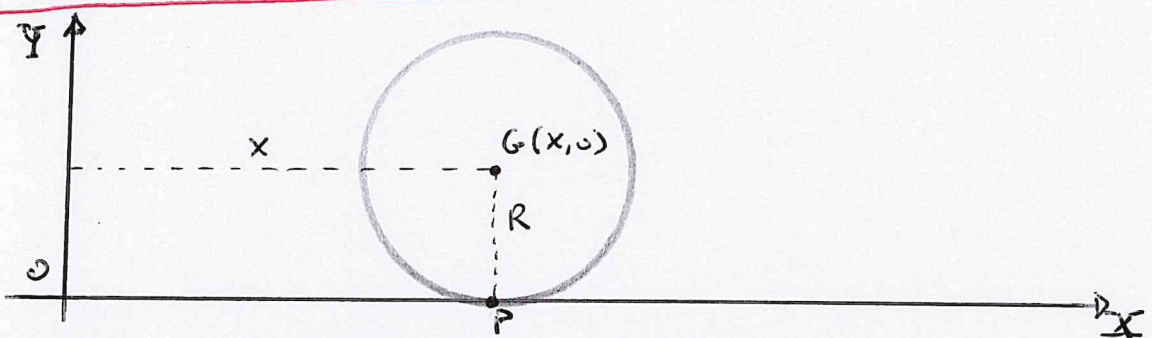
Quindi l'aver supposto l'esistenza di un integrale della prima equazione (e il ragionamento può ripetersi anche per la seconda) contrasta con la tesi del lemma citato.

NELLA PAGINA SEGUENTE VEDIAMO COME SIA POSSIBILE
CALCOLARE L'ENERGIA CINETICA A UNA DATA
ROTTA SENZA STRISCIARE IN UN BINARIO

4. GRADI DI LIBERTÀ PER UN SISTEMA A VINCOLI OLONOME BILATERI.

Sappiamo che in generale un sistema materiale ha $3n$ gradi di libertà, essendo n il numero di punti materiali del sistema (in particolare se il sistema è un corpo rigido abbiamo visto che il numero di gradi di libertà si riduce a 6). Vogliamo adesso vedere quanti gradi di libertà ha un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonome e bilateri. Vogliamo, in altri termini, sapere quale è il numero minimo di parametri atti ad individuare, istante per istante, la posizione di un sistema soggetto a vin-

CALCOLO DELLA ENERGIA CINETICA ASSOCIATA AD UN DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE SU UN BINARIO.



POSSIAMO UTILIZZARE DUE METODI:

1) TEOREMA DI KÖNIG.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{G}^2 + T_B$$

$$G = (x, 0, 0) \quad \text{DA CUI} \quad \dot{G} = (\dot{x}, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M \dot{G}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta$$

IN QUESTO CASO L'ASSE DI ROTAZIONE È ORTOGONALE AL PIANO CONTENENTE IL DISCO. QUINDI

$$\Omega_\alpha = (0, 0, \Omega)$$

$$T_B = \frac{1}{2} I_{z,G} \Omega^2$$

$I_{z,G}$ "MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE Z PASSANTE PER G."

$$I_{z,G} = \iint d\alpha \rho^2 \bar{G} =$$

$$\bar{G} = \frac{M}{\pi R^2} \quad \text{DENSITA' COSTANTE}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \iint \rho^2 \rho d\rho d\alpha = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M R^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \Omega^2$$

PER DETERMINARE Ω IMPONIAMO LA CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO.

$$V_P = V_G + \Omega \wedge (P-G) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v_G| = \Omega R \quad \text{Ma } v_G = \dot{x} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{\dot{x}}{R}}$$

(14B)

$$T_R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

DA CUI $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = M \dot{x}^2$

2) OSSERVIAMO CHE PER LA CONDIZIONE $v_P = 0$ IL PUNTO DI CONTATTO È UN PUNTO DELL'ASSE AI MOZZI.

AUREMO QUINDI UN ASSE AI INSTANANEA ROTAZIONE ORTOGONALE AL PIANO CONTINGENTE IL DISCO PASSANTE PER IL PUNTO P.

POTREMO QUINDI SCRIVERE DIRETTAMENTE

$$T = \frac{1}{2} I_{z,P} \Omega^2$$

DOVE $I_{z,P}$ È IL "MOMENTO DI INERZIA DEL DISCO RISPETTO ALL'ASSE Z PASSANTE PER P"

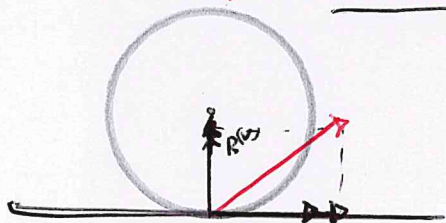
PER IL TEOREMA DI "HUYGHENS" AUREMO

$$\begin{cases} I_{z,P} = I_{z,O} + M R^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \\ \Omega = \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \end{cases}$$

DA CUI $T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M R^2\right) \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2$ C. U. L.

NOTA: OSSERVIAMO CHE ESSENDO PRESENTE LA FORZA DI ATTRITO, IL VINGOLO NON È LISCI, IN QUANTO LA RISULTANTE

NON SARÀ ORTOGONALE AL BINARIO
ESSENDO LA SOMMA VETTORIALE DELLA
REAZIONE VINGOLARE DEL BINARIO E
DELL'ATTRITO M .



colli olonomi e bilateri.

Se il sistema è soggetto ad m vincoli olonomi e bilateri ciò vorrà re che esistono m equazioni a cui devono soddisfare contemporaneamente coordinate dei punti P_1, P_2, \dots, P_n :

$$\begin{cases} f_1(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0 \\ f_2(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0 \end{cases}$$

Supporremo che le m funzioni introdotte siano differenziabili. Ino imponiamo la condizione che i vincoli siano indipendenti, e affinché ciò cada devono essere indipendenti le m equazioni sopra scritte. In altr termini si vuole evitare che uno stesso vincolo sia contato più di una v ta, come accadrebbe, per esempio, se imponessimo ai punti del sistema ma riale di soddisfare le due equazioni:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$3(ax + by + cz + d) = 0$$

Per un teorema di analisi II, le m funzioni introdotte sono indip denti se e solo se la matrice jacobiana: (RANGO MASSIMO)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1^I} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2^I} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3^I} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1^n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2^n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3^n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1^I} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2^I} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3^I} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1^n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2^n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1^I} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2^I} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3^I} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1^n} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2^n} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3^n} \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Teniamo presente che per gli elementi della matrice l'indice in alto indica la particella, mentre quello in basso si riferisce alla coordinata. La matrice jacobiana deve perciò avere rango massimo nell'insieme di definizione delle m funzioni.

Il numero dei gradi di libertà del sistema sarà allora $3n - m$, essendo $3n$ il numero di gradi di libertà del sistema non soggetto a vincoli ed m il numero di vincoli olonomi e bilateri.

5. SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI PER UN SISTEMA A VINCOLI OLONOMI BILATERI.

Consideriamo adesso lo spazio puntuale affine euclideo E_{3n} a $3n$ dimensioni, essendo n il numero di particelle che compongono il sistema, sistema soggetto a m vincoli olonomi:

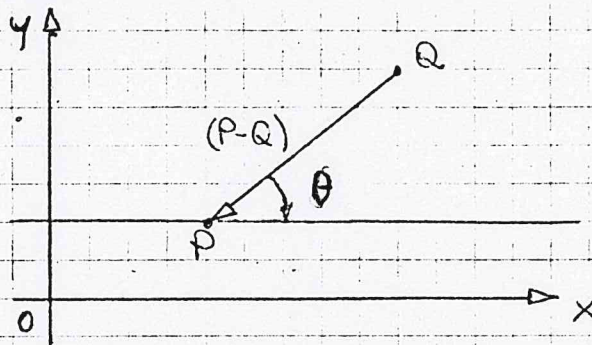
$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1^I, x_2^I, x_3^I, \dots, x_1^n, x_2^n, x_3^n) &= 0 \\ f_2(x_1^I, x_2^I, x_3^I, \dots, x_1^n, x_2^n, x_3^n) &= 0 \\ \dots & \\ f_m(x_1^I, x_2^I, x_3^I, \dots, x_1^n, x_2^n, x_3^n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

e le m funzioni sono tali da soddisfare la condizione che la matrice jacobiana abbia rango massimo. Ma allora il nostro sistema di equazioni individuerà in generale una superficie regolare nello spazio E_{3n} , superficie di dimensione $g = 3n - m$. Questa superficie si chiamerà "spazio delle configurazioni del sistema."

Esempio. Se consideriamo un punto libero di muoversi nello spazio, allora lo spazio delle configurazioni coinciderà proprio con lo spazio a tre dimensioni. Se il punto può muoversi solo su di un piano, allora esso avrà

solo 2 gradi di libertà e lo spazio delle configurazioni sarà tutto il piano.

Altro esempio. Consideriamo nel piano due punti materiali P e Q, quali è imposto di rimanere sempre alla stessa distanza l'uno dall'altro.



Questo sistema avrà tre gradi di libertà. Per individuare il sistema basta infatti dare le due coordinate nel piano del punto P e l'angolo il vettore (P-Q) forma con la retta parallela all'asse x^I e passante per P:

$$\begin{cases} q_1 = x_1(P) \\ q_2 = x_2(P) \\ q_3 = \theta \end{cases}$$

Possiamo anche seguire un altro ragionamento, più analitico, per determinare il numero di gradi di libertà del nostro sistema.

Se i punti fossero liberi da qualsiasi restrizione il sistema avrebbe complesso 6 gradi di libertà; esistono tuttavia tre equazioni indipendenti che descrivono le caratteristiche vincolari del sistema stesso:

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 : x_3(P) = 0 \\ f_2 : x_3(Q) = 0 \\ f_3 : [x_1(P) - x_1(Q)]^2 + [x_2(P) - x_2(Q)]^2 = K \end{cases}$$

La corrispondente matrice jacobiana avrà la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 2(x_1^1 - x_1^2) & 2(x_2^1 - x_2^2) & 0 & -2(x_1^1 - x_1^2) & -2(x_2^1 - x_2^2) & 0 \end{pmatrix} = J$$

e il rango di questa matrice è massimo (quindi effettivamente le tre equazioni di cui sopra sono funzionalmente indipendenti). Il numero di gradi di libertà del sistema sarà allora dato da:

$$g = 3n - m = 6 - 3 = 3$$

Lo spazio delle configurazioni sarà una superficie tridimensionale nello spazio E_{16} . Vediamo geometricamente come è costituito lo spazio V_3 delle configurazioni.

Le prime due equazioni, $f_1(P,Q)=0$ e $f_2(P,Q)=0$, rappresentano due iperpiani. L'intersezione di questi due iperpiani è uno spazio a 4 dimensioni. I punti di questo spazio puntuale a 4 dimensioni devono ancora soddisfare l'equazione:

$$(x_1^I - x_1^2)^2 + (x_2^I - x_2^2)^2 = k > 0$$

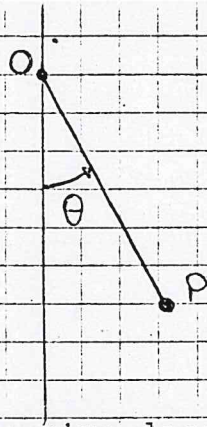
e questa è una quadrica nello spazio a 4 dimensioni.

Ciò è equivalente dal punto di vista delle "deformazioni continue" al prodotto cartesiano di R^2 per una circonferenza S^1 :

SPAZIO DELLE CONFIGUR. \Rightarrow $R^2 \times S^1$

Il discorso è questo: essendo nello spazio a 4 dimensioni la nostra superficie dipenderà da tre parametri; prendiamo in esame i parametri introdotti q_1, q_2 e q_3 . Allora intuitivamente i primi due parametri, essendo le coordinate di P che è libero di muoversi sul piano, apparterranno proprio ad R^2 , mentre $q_3 = \theta$ è indicato come appartenente ad S^1 .

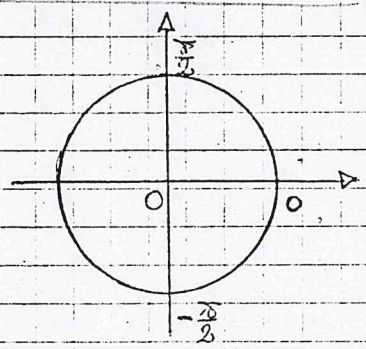
Prendiamo in considerazione il pendolo semplice piano. Esso consta di un punto sul piano che deve rimanere a distanza fissa da un altro punto. Fisicamente ciò si realizza considerando la sbarretta di lunghezza l costante incernierata ad un punto fisso O .



Lo spazio delle configurazioni è, in questo caso, la circonferenza S^1 nel piano. Come coordinate lagrangiane (così vengono chiamati i parametri che, istante per istante, servono ad individuare la posizione del corpo) assumeremo l'angolo che individua univocamente la posizione di P .

L'angolo varierà nell'intervallo $0, 2\pi$

Se volessimo descrivere la nostra circonferenza mediante sistemi di coordinate lagrangiane occorreranno due carte locali (le coordinate devono variare in intervalli aperti):



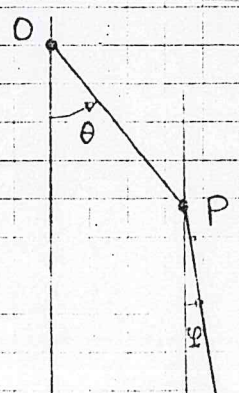
$$0 < \theta < 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Per quale ragione noi richiediamo che le coordinate lagrangiane varino in intervalli aperti?

Il motivo è che, quando dobbiamo eseguire il calcolo di derivate, dobbiamo sempre avere a che fare con intervalli aperti.

Pendolo doppio (o bipendolo). Si tratta di un sistema costituito da un punto P che deve rimanere a distanza costante da un punto O , e da un punto Q che, a sua volta, deve rimanere a distanza costante da P .



Dal momento che ci troviamo nel piano, il sistema avrà complessivamente 2 gradi di libertà.

Ragionando rigorosamente, se assumiamo a priori che i punti P e Q appartengono al piano (e di il sistema in assenza di altri vincoli avrà generale $2n$ gradi di libertà), allora se P



stare a distanza fissa da O , e Q deve stare a distanza fissa da P , questi due vincoli sono tradotti analiticamente dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} (x_1^I)^2 + (x_2^I)^2 = l_1^2 \\ (x_1^2 - x_1^I)^2 + (x_2^2 - x_2^I)^2 = l_2^2 \end{cases}$$

La matrice jacobiana avrà la seguente espressione:

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1^I & 2x_2^I & 0 & 0 \\ 2(x_1^2 - x_1^I) & 2(x_2^2 - x_2^I) & -2(x_1^I - x_1^2) & -2(x_2^I - x_2^2) \end{pmatrix}$$

Si può osservare che tutti gli elementi della seconda riga devono essere diversi da zero perché $l_2^2 \neq 0$, per cui il rango di J sarà proprio 2.

Da tutto questo discorso si ricava che:

$$g = 2n - m = 4 - 2 = 2$$

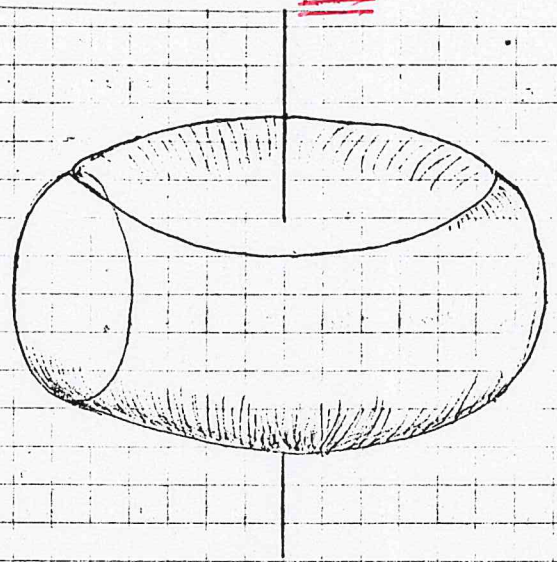
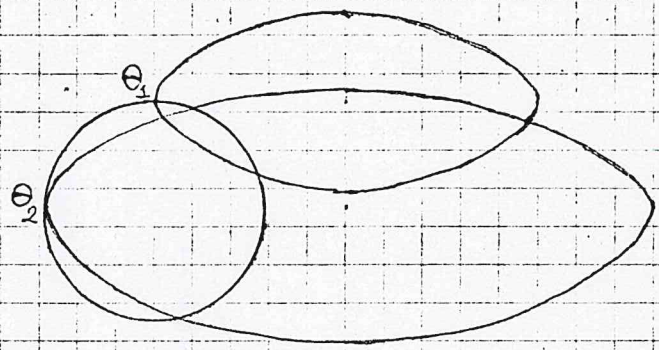
Vediamo come è fatto lo spazio delle configurazioni. Siamo in uno spazio a 4 dimensioni, ed in esso abbiamo due ipersuperfici. Cerchiamo di comprendere intuitivamente l'intersezione di queste due quadriche nello spazio a 4 dimensioni. Due saranno le coordinate lagrangiane necessarie e sufficienti per individuare il sistema: l'angolo θ e l'angolo φ . Per entrambi questi parametri vale la limitazione:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta < 2\pi \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

Allora, intuitivamente, lo spazio V_2 delle configurazioni sarà il prodotto cartesiano tra due circonferenze:

$$S^I \times S^I$$

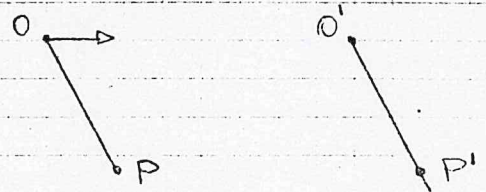
Possiamo visualizzare questo insieme pensando di fissare θ e fare φ sulla sua circonferenza; e viceversa, fissiamo φ e facciamo var θ sulla sua circonferenza. La figura che otteniamo è un toro.



6. SPOSTAMENTI POSSIBILI E SPOSTAMENTI VIRTUALI.

Finora abbiamo considerato vincoli olonomi bilateri fissi. Possiamo, tuttavia, prendere in considerazione vincoli olonomi bilateri non fissi.

Per esempio potremmo considerare un pendolo semplice tale che il punto O si muove lungo un certo asse x :



In questa situazione, lo spazio delle configurazioni sarà una circonferenza mobile con una certa velocità.

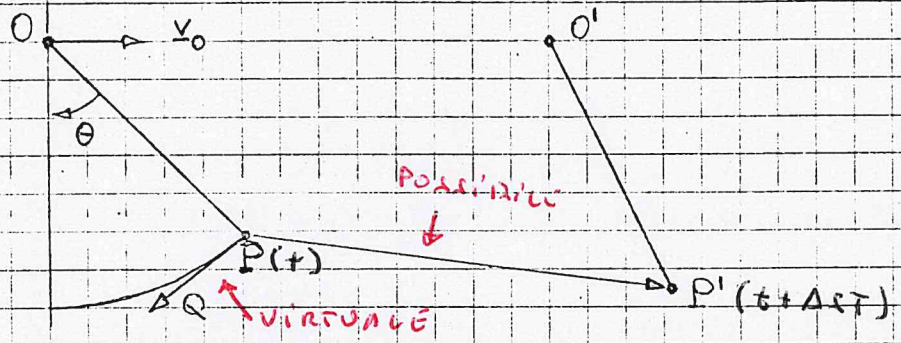
Come abbiamo visto, se i vincoli sono fissi, lo spazio delle configurazioni è una superficie fissa nello spazio rappresentativo E_{3n} ; nel caso in

cui i vincoli non sono fissi, lo spazio delle configurazioni sarà una superficie mobile di una certa dimensione nello spazio E_{3n} .

Introduciamo adesso il concetto di spostamento possibile e spostamento virtuale.

Per spostamento possibile si intende uno spostamento di uno qualsiasi dei punti del sistema compatibile con i vincoli all'istante considerato.

Ad esempio, se consideriamo un pendolo in cui O si muove con una certa velocità lungo l'asse x , allora quello che porta il punto P su P' è uno spostamento possibile.



Definizione di spostamento virtuale. Sia $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ un sistema di n punti materiali soggetto a vincoli olonomi e sia V_g il suo spazio delle configurazioni (g grado di libertà del sistema); allora se $\tilde{P} \in V_g$, dicesi spostamento virtuale a partire da \tilde{P} , ogni vettore tangente a V_g in \tilde{P} .

\rightarrow VARI RETRO

In altri termini, lo spostamento virtuale all'istante fissato è uno spostamento compatibile con i vincoli considerati per così dire "congelati" a l'istante fissato.

Così, nell'esempio del pendolo semplice, lo spostamento $\tilde{P}Q$ è uno spostamento virtuale, o meglio, fissato P nel sistema, a P corrisponderà biunivocamente il punto \tilde{P} appartenente allo spazio delle configurazioni che è una circonferenza nel piano; ebbene il vettore tangente a questa circonferenza in \tilde{P} è uno spostamento virtuale.

Finora abbiamo solo considerato vincoli olonomi e bilateri.

NOTA

CONSIDERIAMO UN PUNTO $P \in V_g$

$$P = P(q^d)$$

(221)

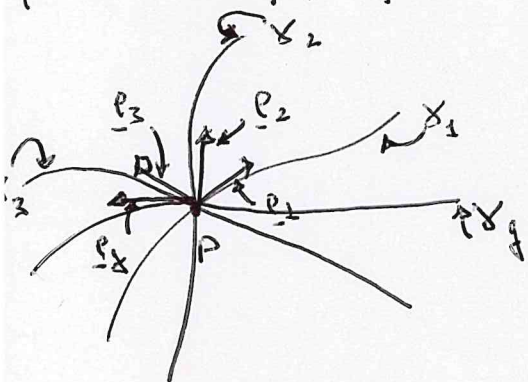
CONSIDERIAMO I VETTORI $\left\{ \frac{\Delta P}{\Delta q^d} \right\}_{d=1}$

1°)

VARIAMO q^1
FISSIAMO q^2, \dots, q^g .

OTTENIAMO UNA CURVA γ_1 PASSANTE PER P.

ALLORA $\underline{e}_1 = \frac{\Delta P}{\Delta q^1}$ " VETTORE TANGENTE IN P A γ_1 "



2°) VARIAMO q^2
FISSIAMO q^1, q^3, \dots, q^g
OTTENIAMO UNA CURVA γ_2 PASSANTE PER P. ALLORA

$\underline{e}_2 = \frac{\Delta P}{\Delta q^2}$ " VETTORE TANGENTE IN P A γ_2 "

3) VARIAMO q^3
FISSIAMO $q^1, q^2, q^4, \dots, q^g$

PROCCIAMO CON QUESTO METODO FINO A:

OTTENIAMO UNA CURVA γ_3 PASSANTE PER P. ALLORA

g) VARIAMO q^g
FISSIAMO q^1, \dots, q^{g-1}

OTTENIAMO LA CURVA γ_g PASSANTE PER P. ALLORA

$\underline{e}_3 = \frac{\Delta P}{\Delta q^3}$ " VETTORE TANGENTE IN P A γ_3 "

$\underline{e}_g = \frac{\Delta P}{\Delta q^g}$ " VETTORE TANGENTE IN P A γ_g "

ALLORA TUTTI I VETTORI $\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_g \}$ APPARTERRANNO

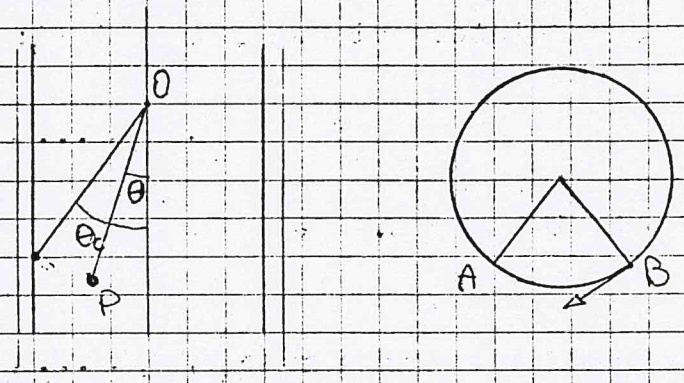
ALL'IPERPIANO TANGENTE IN P. INOLTRE I VETTORI

$\underline{e}_d = \frac{\Delta P}{\Delta q^d}$ SONO UNA BASE PER LO SPAZIO GERITO IN QUESTO IPERPIANO $T_P(V_g)$

ALLORA SE CONSIDERO UN Δ SPOSTAMENTO VIRTUALE

$\underline{\delta P} = \frac{\Delta P}{\Delta q^d} \delta q^d = \delta q^d \underline{e}_d \in T_P^{(TANGENTE)}(V_g)$ ← SPAZIO TANGENTE NEL PUNTO $P \in V_g$

Riportiamo un esempio in cui possono essere presenti vincoli unilateri oltre che bilateri. Consideriamo un pendolo semplice tra le pareti di un stanzino (come coordinata lagrangiana assumeremo sempre l'angolo θ). vincolo unilatero che si aggiunge è quello per cui il punto P non può trepassare le pareti, cioè $-\theta_c \leq \theta \leq \theta_c$.



Lo spazio delle configurazioni sarà allora un arco di circonferenza. Si chiameranno posizioni di confine i punti A e B, tutti gli altri punti sono chiamati "posizioni ordinarie".

7. SPOSTAMENTI VIRTUALI REVERSIBILI ED IRREVERSIBILI.

Lo spostamento virtuale \underline{v} dicesi reversibile se $-\underline{v}$ è ancora uno spostamento virtuale. Viceversa, lo spostamento virtuale \underline{v} dicesi irreversibile se $-\underline{v}$ non è uno spostamento virtuale. Si verifica subito che è reversibile ogni spostamento virtuale eseguito da una posizione ordinaria, mentre altrettanto non avviene se la posizione è di confine.

8. SPOSTAMENTO VIRTUALE INDOTTO.

Gli spostamenti virtuali \underline{v} sono quelli che appartengono allo spazio tangente $T_P(V_g)$, sono cioè vettori di uno spazio a $3n$ dimensioni tangenti in P ad una superficie di dimensione g .

Consideriamo un sistema di punti materiali:

$$S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

avente g gradi di libertà. Nello spazio E_{3n} il punto \tilde{P} avrà coordinate:

$$P \equiv (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \quad (i=1, 2, 3)$$

Introduciamo il punto $\tilde{P}_1 \in E_{3n}$, che ha come coordinate:

$$\tilde{P}_1 \equiv (x_1^1, 0, \dots, 0, 0)$$

il punto $\tilde{P}_2 \in E_{3n}$, che ha come coordinate:

$$\tilde{P}_2 \equiv (0, x_1^2, 0, \dots, 0)$$

ed infine, il punto $\tilde{P}_n \in E_{3n}$ di coordinate:

$$\tilde{P}_n \equiv (0, 0, \dots, 0, x_1^n)$$

allora fissata un'origine $0 \in E_{3n}$, possiamo scrivere:

$$(\tilde{P} - 0) = (\tilde{P}_1 - 0) + (\tilde{P}_2 - 0) + \dots + (\tilde{P}_n - 0)$$

Consideriamo uno spostamento virtuale a partire da \tilde{P} . Poiché il sistema ha g gradi di libertà allora nell'intorno del punto \tilde{P} possiamo sempre introdurre g coordinate lagrangiane (o carta locale) q_1, q_2, \dots, q_g .

Lo spostamento virtuale $\underline{v} \in T_P(V_g)$ può essere espresso come combinazione

lineare dei vettori di base di $T_P(V_g)$:

$$\underline{v} = \sum_{\alpha} v^{\alpha} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_{\alpha}} \quad (\alpha=1, 2, \dots, g)$$

e simbolicamente si scrive:

$$\delta \tilde{P} = \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial q_{\alpha}}$$

Definiamo spostamento virtuale di \tilde{P}_i indotto dallo spostamento virtuale \tilde{P} come:

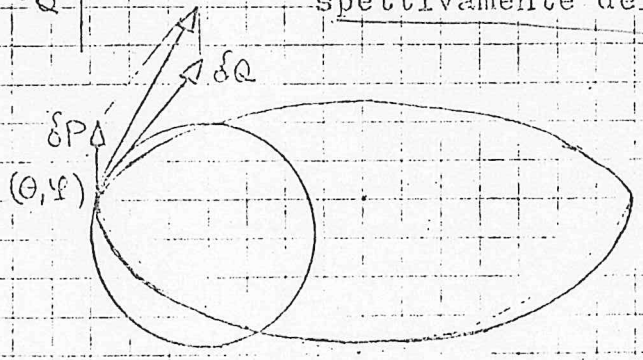
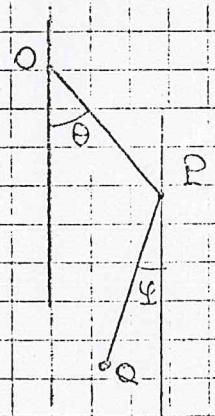
$$\delta \tilde{P}_i = \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial q_{\alpha}}$$

Avrà senso considerare le derivate parziali di \tilde{P}_i rispetto alle q_{α} , giacché, essendo P funzione delle q_{α} , anche \tilde{P}_i lo sarà.

Diamo subito un'applicazione di quanto detto.

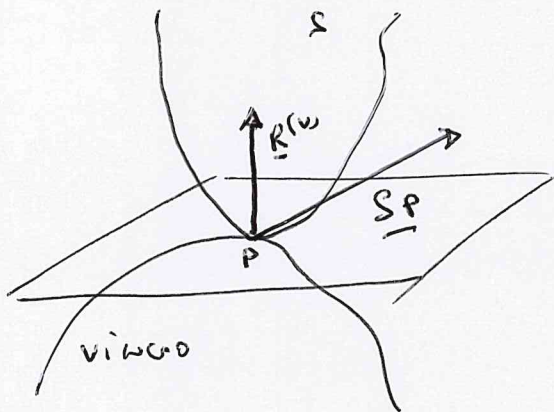
Si consideri il pendolo doppio, allora uno spostamento virtuale di questo sistema consiste nella coppia di spostamenti virtuali in P e in Q .

Consideriamo, cioè, il toro (lo spazio delle configurazioni) un vettore tangente in un punto al toro è spostamento virtuale del sistema, ed esso è ponibile nei due spostamenti virtuali indotti rispettivamente del punto P e del punto Q .



ES SI AGRAMO UN SISTEMA S' COSTITUITO DA N SOLI
 CONSIDERIAMO TALE SISTEMA SOGGETTO A VINCOLI
 "LISCI" O "OLONOMI"

DEF. "PER UN SISTEMA MECCANICO AIREO CHE ESSO E' SOGGETTO
 AD UN "VINCOLO LISCI" SE DATO UN PUNTO DI CONTATTO
 TRA IL SISTEMA E IL VINCOLO, ALLORA LA REAZIONE
 VINCOLARE RISULTA ESSERE ORTOGONALE AL PIANO
 TANGENTE NEL PUNTO DI CONTATTO"



SE ADDESSO CONSIDERIAMO
 UN QUALSIASI SPOSTAMENTO
 VIRTUALE S_P , ALLORA
 SE IL VINCOLO E' LISCI
 AVREMO CHE IL LAVORO
 ASSOCIATO ALLA REAZIONE VINCOLARE
 SARA DATO DA:

$$\delta L^{(v)} = \underline{R}^{(v)} \cdot \underline{S}_P \geq 0 \quad (1)$$

IN QUANTO L'ANGOLO FORMATO TRA LO SPOSTAMENTO \underline{S}_P E LA
 REAZIONE VINCOLARE SARA' $\leq \pi/2$.

NEL CASO DI VINCOLI "LISCI E BILATERI" OGNI SPOSTAMENTO
 VIRTUALE RISULTERA ESSERE REVERSIBILE, QUINDI SE
 \underline{S}_P E' UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE ALLORA ANCHE $-\underline{S}_P$

NOTA: NEL CASO DI SISTEMI NON MECCANICI (ES. APPL. VINCOLO
 GENERATO DA UN CAMPO MAGNETICO) LA RELAZIONE
 (1) VERRA' UTILIZZATA PER DEFINIRE UN VINCOLO "LISCI".

SARA' ANCORA UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE.

DOVRANNO QUINDI VALERE CONTEMPORANEAMENTE LE AUC CONDIZIONI

$$\begin{cases} \underline{R}^{(V)} \cdot \underline{\delta P} \geq 0 \\ -\underline{R}^{(M)} \cdot \underline{\delta P} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{R}^{(V)} \cdot \underline{\delta P} = 0}$$

PER QUALSIASI SPOSTAMENTO VIRTUALE $\underline{\delta P}$ PER VINCOLI "LISCI E BILATERI" DOVRA' APPARTENERE AL PIANO TANGENTE NEL PUNTO DI CONTATTO.



CONSIDERIAMO ADesso UN SISTEMA COSTITUITO DA N SOLIDI SOGGETTI A VINCOLI (IN GENERALE DIPENDENTI DAL TEMPO) OLONOMICI E LISCI.

IN QUESTO CASO DOVRANNO VALERE LE 2N EQUAZIONI VETTORIALI E SPRESSE NELLE EQUAZIONI CARAINALI

$$\begin{cases} \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} + \underline{R}_i^{(m)} = 0 \\ \underline{M}_{O_i}^{(a)} + \underline{M}_{O_i}^{(v)} + \underline{M}_{O_i}^{(m)} = 0 \end{cases}$$

$$\{ \underline{R}_i^{(v)}, \underline{M}_{O_i}^{(v)} \} \text{ PER } i=1 \dots N$$

$\{ \underline{R}_i^{(a)}, \underline{M}_{O_i}^{(a)} \}$ SONO LA "RISULTANTE" E IL "MOMENTO RISULTANTE" (RISPETTO AL POLO O) ASSOCIATI RISPETTIVAMENTE ALLE "FORZE ESTERNE ATTIVE".

SONO LA "RISULTANTE" E IL "MOMENTO RISULTANTE" ASSOCIATI ALLE REAZIONI VINCOLARI

$\{ \underline{R}_i^{(m)}, \underline{M}_{O_i}^{(m)} \}$ SONO LA "RISULTANTE" E IL "MOMENTO RISULTANTE" ASSOCIATI, RISPETTIVAMENTE, ALLE FORZE DI INERZIA

PER 1° SOLIDO.

SE ADesso CONSIDERIAMO IN GENERALE UN GENERICO SPOSTAMENTO VIRTUALE

$$\delta P_i = \delta O_i + \delta \psi_i \wedge (P_i - O_i)$$

Da cui se calcoliamo il lavoro in \mathbb{R}^0 avremo

(28)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_i^{(a)} + \delta \mathcal{L}_i^{(v)} + \delta \mathcal{L}_i^{(m)} &= (R_i^{(a)} + R_i^{(v)} + R_{0i}^{(m)}) \cdot \delta p_i = \\ &= (R_i^{(a)} + R_i^{(v)} + R_i^{(m)}) \cdot \delta p_i + \underbrace{[\delta \psi_i \wedge (p_i - 0_i)]}_{\substack{[R_i^{(a)} + R_i^{(v)} + R_i^{(m)}] \wedge \delta \psi_i}} \cdot (p_i - 0_i) = \\ &= \underbrace{\{ (p_i - 0_i) \wedge (R_i^{(a)} + R_i^{(v)} + R_i^{(m)}) \}}_{M_{0i}^{(a)} + M_{0i}^{(v)} + M_{0i}^{(m)}} \cdot \delta \psi_i \end{aligned}$$

Quindi:

$$\delta \mathcal{L}_i^{(a)} + \delta \mathcal{L}_i^{(v)} + \delta \mathcal{L}_i^{(m)} = \underbrace{(R_i^{(a)} + R_i^{(v)} + R_i^{(m)})}_{0} \cdot \delta p_i + \underbrace{(M_{0i}^{(a)} + M_{0i}^{(v)} + M_{0i}^{(m)})}_{0} \cdot \delta \psi_i$$

Da cui:

$$\delta \mathcal{L}_i^{(a)} + \delta \mathcal{L}_i^{(v)} + \delta \mathcal{L}_i^{(m)} = 0$$

Da cui sommando tutti i solidi del sistema

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} + \delta \mathcal{L}^{(v)} + \delta \mathcal{L}^{(m)} = \sum_{i=1}^N (\delta \mathcal{L}_i^{(a)} + \delta \mathcal{L}_i^{(v)} + \delta \mathcal{L}_i^{(m)}) = 0$$

EQUAZIONE di d'ALBERT-LAGRANGE ASSOCIATA AGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI di \mathcal{S}

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} + \delta \mathcal{L}^{(v)} + \delta \mathcal{L}^{(m)} = 0$$

Se alcuni vincoli sono "UNILATERI" e "LISCI" avremo

$$\begin{cases} \delta \mathcal{L}^{(v)} \geq 0 \\ \delta \mathcal{L}^{(a)} + \delta \mathcal{L}^{(m)} \leq 0 \end{cases} \quad \text{Da cui}$$

Se i vincoli sono "bilateri" e "lisci"

(29)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta L^{(w)} = 0 \\ \delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Calcoliamo separatamente le due contribuzioni:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^N \underline{R}_i^{(a)} \cdot \underline{S P}_i$$

Ma per spostamenti "virtuali" associati ad un sistema con g gradi di libertà avremo:

$$\underline{S P}_i = \frac{\sum P_i}{\sum g_d} \underline{S g}_d$$

Quindi:

$$\delta L^{(a)} = \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^N \underline{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\sum P_i}{\sum g_d}}_{Q_d} \right\} \underline{S g}_d$$

"SOLLECITAZIONE ASSOCIATA ALLE FORZE ESTERNE" AGENTI SUL SISTEMA.

Da cui e' sufficiente la sommatoria sull'indice ripetuto d

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta L^{(a)} = \sum_{d=1}^g Q_d \underline{S g}_d \\ Q_d = \sum_{i=1}^N \underline{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\sum P_i}{\sum g_d} \end{array} \right. \quad (2)$$

Analogamente calcoliamo il lavoro associato alle forze di inerzia

$$\delta L^{(m)} = - \sum_{i=1}^N \left(d q_i \underline{S}_i \underline{a}_i \cdot \underline{S P}_i \right)_{D_i}$$

Da cui e' sufficiente gli spostamenti virtuali avremo

$$\delta L^{(m)} = \underbrace{\left[- \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\mathbf{d}_i \mathbf{f}_i \cdot \underline{a}_i \cdot \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta q^{\alpha}} \right]} \delta q^{\alpha}$$

τ_{α} "SOLLECITAZIONI ASSOCIATE ALLE FORZE AI INDETERMINATE"

DA CUI ESPRIMIAMO LA SOMMATORIA SULL'INDICE RIPETUTO α .

$$\begin{cases} \delta L^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^g \tau_{\alpha} \delta q^{\alpha} \\ \tau_{\alpha} = - \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\mathbf{d}_i \mathbf{f}_i \cdot \underline{a}_i \cdot \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta q^{\alpha}} \end{cases} \quad (3)$$

SE QUINDI CONSIDERIAMO VINCOLI "LISCI", "BILATERI", "OLONOMICI" DALLE RELAZIONI (1), (2), (3) AVREMO

$$\sum_{\alpha=1}^g (\alpha_{\alpha} + \tau_{\alpha}) \delta q^{\alpha} = 0 \quad \forall \delta q^{\alpha}$$

DA CUI PER IL PRINCIPIO DI INDETERMINATE DEI POLINOMI AVREMO

$$(1*) \quad \boxed{\alpha_{\alpha} + \tau_{\alpha} = 0} \quad \alpha = 1, 2, \dots, g \quad \left[\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ FORMA DELLE} \\ \text{EQUAZIONI DI} \\ \text{BOLZRO-LAGRANGE} \end{array} \right]$$

$$\boxed{\underline{II}^{\circ} \text{ FORMA DELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE}}$$

PROVIAMO AD ESSO CHE LE SOLLECITAZIONI τ_{α} POSSONO ESSERE ESPRESSE NELLA FORMA

$$\tau_{\alpha} = - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\Delta T}{\Delta q^{\alpha}} \right\} \quad (2*)$$

DOVE $T =$ "ENERGIA CINETICA" DEL SISTEMA

CONSIDERANDO L'ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\Delta_i \rho_i v_i^2$$

DA CUI

$$\frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^d} = \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\Delta_i \rho_i \underline{v}_i \cdot \frac{\Delta v_i}{\Delta \dot{q}^d} \quad (*)$$

MA ESSENDO

$$\underline{v}_i = \frac{d p_i}{dt} = \frac{\Delta p_i}{\Delta q^d} \dot{q}^d + \frac{\Delta p_i}{\Delta t}$$

AVREMO

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta \dot{q}^d} = \frac{\Delta p_i}{\Delta q^d} \quad \text{CHE SOSTITUITA NELLA (*)}$$

CI CONSENTE DI SCRIVERE

$$\frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^d} = \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\Delta_i \rho_i \underline{v}_i \cdot \frac{\Delta p_i}{\Delta q^d}$$

DA CUI

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^d} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\Delta_i \rho_i \underline{a}_i \cdot \frac{\Delta p_i}{\Delta q^d}}_{-2*} +$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} d\Delta_i \rho_i \underline{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta p_i}{\Delta q^d} \right)$$

OSSERVIAMO CHE

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum P_i}{\sum q^d} \right) &= \frac{\sum^2 P_i}{\sum q^d \sum q^d} \dot{q}^d + \frac{\sum^2 P_i}{\sum \sum q^d} \\ \sum_{\sum q^d} V_i &= \sum_{\sum q^d} \left[\frac{\sum P_i}{\sum q^d} \dot{q}^d + \frac{\sum P_i}{\sum t} \right] = \frac{\sum^2 P_i}{\sum q^d \sum q^d} \dot{q}^d + \frac{\sum^2 P_i}{\sum q^d \sum t} \end{aligned} \right.$$

SUPPONIAMO CHE VALGA IL LEMMA DI SWHARTZ AU RENO

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\sum P_i}{\sum q^d} \right) = \sum V_i}$$

DA CUI

$$\frac{d}{dt} \frac{\sum T}{\sum \dot{q}^d} = - Q_d + \underbrace{\sum_{i=1}^N \left[d d_i \frac{P_i}{A_i} \frac{V_i}{\sum q^d} \right]}_{\sum T / \sum q^d}$$

DA CUI E' PROVATA LA RELAZIONE (2*)

$$Q_d = - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\sum T}{\sum \dot{q}^d} - \frac{\sum T}{\sum q^d} \right\} \quad (2*)$$

INFERENDO QUEST'ULTIMA RELAZIONE (2*) NELLA (1*)

OTTENIAMO LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE NELLA

FORMA II

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\sum T}{\sum \dot{q}^d} - \frac{\sum T}{\sum q^d} &= Q_d \\ Q_d &= \sum_{i=1}^N R_i^{(a)} \frac{\sum P_i}{\sum q^d} \end{aligned} \right. \quad (3*) \quad d = 1, \dots, g$$

DOVE IN GENERALE LE SOLLECITAZIONI

$$Q_d = Q_d(q^u, \dot{q}^u, t) \quad \forall d$$

DETERMINISMO DELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE (34)

CONSIDERIAMO L'ENERGIA CINETICA PER IL SISTEMA S
 COSTITUITO DA N SOLIDI, SOGGETTI A VINCOLI DIPENDENTI DAL TEMPO.

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(d d_i p_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \right) \quad \text{con} \quad \underline{v}_i = \frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial p_i}{\partial t}$$

DA CUI

$$\begin{aligned} \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2 \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \dot{q}^\alpha + \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

CHE INSERITA NELLA (1) CI CONSENTIRA' DI SCRIVERE T
 COME LA SOMMA DI TRE TERMINI.

$$(2) \quad T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$(3) \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \\ T_1 = A_\alpha \dot{q}^\alpha \\ T_0 = A_0 \end{cases} \quad \text{Dove} \quad (4) \quad \begin{cases} A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \left(d d_i p_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q^\beta} \right) \right) \\ A_\alpha = \sum_{i=1}^N \left(d d_i p_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \right) \\ A_0 = \sum_{i=1}^N \left(d d_i p_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \right) \end{cases}$$

T_2 E' QUADRATICO NELLE \dot{q}^α

T_1 E' LINEARE NELLE \dot{q}^α

T_0 E' DI ORDINE ZERO NELLE \dot{q}^α

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} (q^u, t) \quad ; \quad A_\alpha = A_\alpha (q^u, t) \quad ; \quad A_0 = A_0 (q^u, t)$$

SE ADDESSO CALCOLIAMO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE AUREMO

(35)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + A_\alpha$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\alpha + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial A_0}{\partial q^\alpha}$$

E SENDO LE SOLLECITAZIONI $Q_\alpha = Q_\alpha(q^\beta, \dot{q}^\beta, t)$

AUREMO (SPOSTANDO TUTTI I TERMINI, TRanne $A_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta$, AL II° MEMBR0)

$$A_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta = F_\alpha(q^\mu, \dot{q}^\mu, t)$$

SE ADDESSO ASSUMIAMO CHE LA MATRICE SIMMETRICA $A_{\alpha\beta}$ ABBIA $\det(A_{\alpha\beta}) \neq 0$, INTRODUCENDO LA MATRICE INVERSA

$$\underbrace{(A^{\alpha\beta})^{-1}}_{g^\alpha_\beta} A_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta = (A^{\alpha\beta})^{-1} F_\alpha = f^\alpha(q^\mu, \dot{q}^\mu, t)$$

POTREMO SCRIVERE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE IN "FORMA NORMALE"

$$\ddot{q}^\alpha = f^\alpha(q^\mu, \dot{q}^\mu, t) \quad \alpha = 1 \dots f.$$

SE ADDESSO PONIAMO $z^\alpha = \dot{q}^\alpha$ POTREMO RICHIEDERE LE m EQUAZ. DI LAGRANGE (SET DI m EQUAZ. DIFF. ORDINARIE DEL II° ORDINE) IN UN'EQUIVALENTE SET DI $2m$ EQUAZIONI DIFF. ORDINARIE DEL I° ORDINE

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = z^\alpha \\ \dot{z}^\alpha = f^\alpha(q^\mu, z^\mu, t) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 2m \text{ EQUAZ. DIFF. ORDINARIE} \\ \text{DEL I° ORDINE} \end{array} \right)$$

SE VOIAMO CONSIDERARE LE CONDIZIONI INIZIALI

(36)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}^x = z^x \\ \ddot{z}^x = f^x(q^u, z^u, t) \\ q^x(t_0) = q_{(0)}^x \\ z^x(t_0) = z_{(0)}^x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{"DETERMINISMO"} \\ \text{DELLE EQUAZIONI} \\ \text{DI LAGRANGE"} \end{array}$$

PER IL TEOREMA DI CHAUCHY SUI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI, DEL 1° ORDINE, LA TRAIETTORIA È "UNIVOCAMENTE DETERMINATA UNA VOLTA FISSATE LE CONDIZIONI INIZIALI."



NOTA: SE CONSIDERIAMO L'ENERGIA CINETICA, ADDESSO NEL CASO DI VINCOLI INDIPENDENTI DAL TEMPO (MA LA DIMOSTRAZIONE PUÒ ESSERE GENERALIZZATA ANCHE NEL CASO GENERALE DI VINCOLI CHE DIPENDONO ESPlicitAMENTE DAL TEMPO)

$$T = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \geq 0 \quad (\text{ZERO SE E SOLO SE } \dot{q}^\alpha = 0)$$

ESSENDO LA MATRICE $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ ESSA È DIAGONALIZZABILE CALCOLANDO LO "SCALARE" T , NEL RIF. IN CUI È DIAGONALE LA MATRICE $A_{\alpha\beta}$, AVREMO:

$$\lambda_1 (\dot{q}^1)^2 + \lambda_2 (\dot{q}^2)^2 + \dots + \lambda_n (\dot{q}^n)^2 \geq 0 \quad \forall \dot{q}^\alpha$$

(ZERO SE E SOLO SE $\dot{q}^\alpha = 0 \quad \forall \alpha$)

ESSENDO UNA FORMA QUADRATICA, SARÀ SEMIPRETTA, SE E SOLO SE TUTTI GLI AUTOVALORI λ_α SONO ABBINATI POSITIVI, QUINDI BANALMENTE

$$\det(A_{\alpha\beta}) > 0$$

SIA DATO UN SISTEMA DI N-SOLAI SOGGETTI A VINCOLI

OLONOMI, LISCI, BILATERI, ~~MINORATI~~ INDIPENDENTI DAL TEMPO.

AVREMO CHE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha (q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

E. N. S. AFFIANCO LA CONFIGURAZIONE $q^\alpha(t) = q_0^\alpha \forall t$ SIA
DI EQUILIBRIO, AVREMO CHE $Q_\alpha (q_0^\alpha, 0, t) = 0 \forall t.$

Dim:
 Hp: $q^\alpha(t) = q_0^\alpha \forall t$ SIA DI EQUILIBRIO

T $Q_\alpha (q_0^\alpha, 0, t) = 0 \forall t$

INFATTI

$$T = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \quad \text{DA CUI} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma$$

DA CUI ALL'EQUILIBRIO AVREMO $\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} \right|_{\dot{c}} = 0$

QUINDI LATERSI:

$\Rightarrow Q_\alpha (q_0^\alpha, 0, t) = 0 \forall t.$

VICEVERSA:

Hp SIA $Q_\alpha (q_0^\alpha, 0, t) = 0$

T LA CONFIGURAZIONE $q^\alpha(t) = q_0^\alpha \forall t$ E' DI EQUILIBRIO

ARRIVIAMO VISTO CHE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE (SISTEMA DI n EQUAZ. DIFF. ORDINARIE ACCOPPIATE DEL 2° ORDINE) SONO EQUIVALENTI AD UN SISTEMA DI $2n$ EQUAZ. DIFF. ORDINARIE DEL 1° ORDINE

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^\alpha} - \frac{\Delta T}{\Delta q^\alpha} = Q_\alpha(q^\mu, \dot{q}^\mu, t) \iff \begin{cases} \dot{q}^\alpha = z^\alpha \\ \dot{z}^\alpha = f^\alpha(q^\mu, z^\mu, t) \end{cases} \quad (2)$$

SE ABBIAMO CONSERVATO IL SISTEMA (2) UNITAMENTE ALLE CONDIZIONI INIZIALI, DERIVANTI DALLA CONFIGURAZIONE ~~iniziale~~ $q^\alpha(t_0) = q^\alpha_{(0)} \quad \forall t$ (MURINO $z^\alpha(t_0) = z^\alpha_{(0)} = 0$)

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = z^\alpha \\ \dot{z}^\alpha = f^\alpha(q^\mu, z^\mu, t) \\ q^\alpha(t_0) = q^\alpha_{(0)} \\ z^\alpha(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

ALLORA LA SOLUZIONE $q^\alpha(t) = q^\alpha_{(0)} \quad \forall t$ E' UNICA. INFATTI QUESTA SOLUZIONE SODDISFA LE CONDIZIONI INIZIALI (*), INOLTRE SODDISFA LE EQUAZIONI ACCIOTO (2) IN QUANTO CERTAMENTE SODDISFA LE EQUIVALENTI EQUAZIONI DI LAGRANGE (1), INFATTI CHE ARRIVIAMO VISTO LA SOLUZIONE SODDISFA $q^\alpha(t) = q^\alpha_{(0)} \quad \forall t$ SODDISFA IL 1° MEMBRO DELLE (2)

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\Delta T}{\Delta \dot{q}^\alpha} - \frac{\Delta T}{\Delta q^\alpha} \right|_{q^\alpha(t) = q^\alpha_{(0)} \quad \forall t} = 0 \quad \text{E SODDISFA PER I POTERI IL 2° MEMBRO } Q_\alpha(q^\mu_{(0)}, 0, t) = 0 \quad \forall t$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI E ALL' EQUILIBRIO.

NEL CASO DI VINCOLI OLONOMICI E LISCI (NON NECESSARIAMENTE BILATERI) ABBIAMO VISTO CHE

$$\begin{cases} \delta L^{(v)} \geq 0 \\ \delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} \leq 0 \end{cases} \quad (+)$$

E.N.S PERCHÉ $q^d_{(0)}$ SIA UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO PER UN SISTEMA A VINCOLI OLONOMICI, LISCI E FISSI È CHE IL LAVORO VIRTUALE $\delta L^{(v)}$ ~~DEVE~~ DEVE CALCOLATO PER ATTO DI MOTO NULLO, SIA "NON POSITIVO" PER OGNI "SPOSTAMENTO VIRTUALE" COMPIUTO A PARTIRE DA $q^d_{(0)}$.

HP SIA $q^d(t) = q^d_{(0)} \quad \forall t$ ALL' EQUILIBRIO

TL ~~mentre~~ $\delta L^{(a)} = Q_2(q^d_{(0)}, 0, t) \delta q^d \leq 0$

AP: SE SIAMO ALL' EQUILIBRIO, CON ATTO DI MOTO NULLO,

$$\delta L^{(m)} \Big|_{q^d_{(0)}} = 0 \quad \text{QUINDI DALLA (+)}$$

$$\delta L^{(a)} \Big|_{q^d_{(0)}} \leq Q_2(q^d_{(0)}, 0, t) \delta q^d \leq 0$$

(NOTA NEL CASO DI VINCOLI BILATERI $\delta L^{(a)} \Big|_{q^d_{(0)}} = 0$)

VICEVERSA: (LA CONDIZIONE SUFFICIENTE LA PROVIAMO SOLO PER VINCOLI BILATERI)

HP $\delta L^{(a)} \Big|_{q^d_{(0)}} \leq 0$

NEL CASO DI VINCOLI BILATERI

$$\delta L^{(a)} = Q_2(q^d_{(0)}, 0, t) \delta q^d = 0 \quad \forall \delta q^d$$

$\Rightarrow Q_2(q^d_{(0)}, 0, t) = 0 \Rightarrow$ ALL' EQUILIBRIO PRECEDENTE $q^d(t) = q^d_{(0)} \quad \forall t$ È ALL' EQUILIBRIO

STABILITÀ ALL'EQUILIBRIO

(40)

IN MODO INTUITIVO, UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO $q^d_{(0)}$ SI DICE STABILE SE, POSTO IL SISTEMA IN q^d_0 CON VELOCITÀ PICCOLA, ESSO PERTIENE NELLE VICINANZE DI $q^d_{(0)}$ CON VELOCITÀ PICCOLA.

DEF
CON LINGUAGGIO PIÙ RIGOROSO DIRITTO:

"LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO $q^d(t) = q^d_{(0)} \quad \forall t$ SI DICE
STABILE SE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : \exists \varepsilon_0, \delta_0 > 0 \quad |q^d(t_0) - q^d_0| < \delta_0 \quad |\dot{q}^d(t_0)| < \varepsilon_0$$

ALLORA AVREMO CHE

$$|q^d(t) - q^d_{(0)}| < \delta, \quad |\dot{q}^d(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

ABBIAHO I SEGUENTI DUE TEOREMI (AI CUI DAREMO L'ENUNCIATO)

TEOREMA DI DIRICLET GENERALIZZATO: (CONDIZIONI SUFFICIENTI)

"DATO UN SISTEMA SOGGETTO A VINCOLI: OLONOMI, BILATERI, LISCI E FISSI, SOGGETTO AD UNA SOLLECITAZIONE IN PARTE CONSERVATIVA DI POTENZIALE U , ED A EVENTUALI FORZE DI TIPO DISSIPATIVO, RISULTA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE OGNI POSIZIONE IN CUI U ASSUME UN MASSIMO LOCALE."

TEOREMA DI LYPONOV-CHEŤAEV: (CONDIZIONE NECESSARIA)

"PER UN SISTEMA SOGGETTO A VINCOLI: OLONOMI, BILATERI, LISCI E FISSI, SOGGETTO AD UNA SOLLECITAZIONE CONSERVATIVA DI POTENZIALE U , RISULTA INSTABILE OGNI POSIZIONE DI EQUILIBRIO IN CUI U NON ASSUME UN MASSIMO EFFETTIVO, POCHE' L'ASSENZA DEL MASSIMO SI ADESSUMIBILE DALL'ESAME DELLE PRIME DERIVATE NON NULLE DEL POTENZIALE."