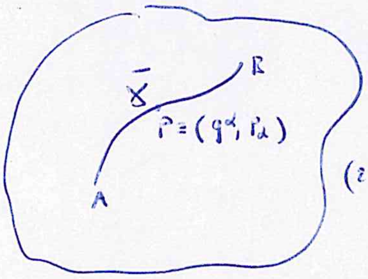
SIA DATO IL FUNZIONALE DI HAMILTON NELLO SPAZIO DELLE FASI

$$(1) \qquad S(\gamma, A, B) = \int_A^B \left[\dot{q}^\alpha p_\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha, t) \right] dt$$

CONSIDERANDO UNA SUA VARIAZIONE AVREMO IN GENERALE



$$(2) \qquad \delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right]_{\bar{\gamma}} \bar{u}_\alpha - \left[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right]_{\bar{\gamma}} \eta^\alpha \right\} dt$$

$$+ \left[p_\alpha \delta q^\alpha - H \delta t \right]_{t_0}^{t_1}$$

SE ADESSO SUPPONIAMO DI:

1) FISSARE LA CURVA $\bar{\gamma}$ NELLO SPAZIO DELLE FASI ~~della~~

2) FISSARE LA POSIZIONE INIZIALE $A \equiv \{ q^\alpha(t_0), p_\alpha(t_0) \}$ per $t = t_0$

ALLORA IN QUESTO CASO IL FUNZIONALE DI HAMILTON S DIPENDERÀ SOLTANTO DALL'ESTREMO FINALE CHE ASSUMEREMO COME ARBITRARIO SU $\bar{\gamma}$, ESSENDO $B \equiv \{ q^\alpha(t), p_\alpha(t) \}$.

IN QUESTO CASO SU $\bar{\gamma}$ VARRANNO LE EQUAZ. DI HAMILTON,

$$(3) \qquad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

CON LE CONDIZIONI INIZIALI $q^\alpha(t_0) = q^\alpha_{(0)}$ $\quad p_\alpha(t_0) = p_\alpha^{(0)}$

ALLORA PER IL TEOREMA DI UNICITA' (LOCALMENTE NEL TEMPO) DELLA SOLUZIONE SI AVRA' SOLO UNA SOLUZIONE UNIVOCAMENTE DETERMINATA

$$(4) \qquad \begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(t, q^\alpha_0, p_\alpha^0, t_0) \\ p_\alpha = p_\alpha(t, q^\alpha_0, p_\alpha^0, t_0) \end{cases}$$

IN QUESTO CASO LA VARIAZIONE (2) ASSUMERA' LA FORMA

$$\delta S = \left[p_\alpha(\tau)\, \delta q^\alpha(\tau) - H(\tau)\, \delta \tau \right]_{t_0}^{t} \qquad (5)$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE AVENDO "FISSATA LA CURVA $\bar{\gamma}$" E L'ESTREMO INIZIALE ALLORA IL FUNZIONALE DI HAMILTON DIPENDERA' SOLO DALL'ESTREMO FINALE (ARBITRARIO) SARA QUINDI (NON PIU' UN NUMERO $\in \mathbb{R}$) UNA FUNZIONE DELL'ESTREMO FINALE

$$(6) \qquad S = S(t, q^{\alpha}(t), p_{\alpha}(t), q^{\alpha}_{0}, p^{0}_{\alpha}, t_0)$$

INOLTRE LE VARIAZIONI δS, δq^{α}, δt SI RIFERISCONO ALLA STESSA CURVA $\bar{\gamma}$ (TRASFORMAZIONI DI PUNTO) QUINDI VERRANNO INTERPRETATE COME DEI DIFFERENZIALI SU $\bar{\gamma}$ DA CUI LA (5) SI SCRIVERA' COME

$$dS = \left[p_{\alpha}(t) \, dq^{\alpha}(t) - H \, dt \right]_{t_0}^{t} \qquad (7)$$

DA CUI ESSENDO L'ESTREMO A FISSATO $\Rightarrow dq^{\alpha}_{0} = dt_0 = 0$ E QUINDI

$$dS = p_{\alpha}(t) \, dq^{\alpha}(t) - H \, dt \qquad (8)$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE ESSENDO $S = S(t, q^{\alpha}, p_{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, p^{0}_{\alpha}, t_0)$ UTILIZZANDO LA $(4)_1$ POSSIAMO RISOLVERLA RISPETTO A p^{0}_{α}, OTTENENDO

$$p^{0}_{\alpha} = p^{0}_{\alpha}(t, q^{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, t_0) \qquad (9)$$

ANALOGAMENTE DALLA $(4)_2$ AVREMO (INSERENDO LA (9))

$$p_{\alpha} = p_{\alpha}\left[t, q^{0}_{\alpha}, p^{0}_{\alpha}(t, q^{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, t_0), t_0\right] =$$
$$= p_{\alpha}\left[t, q^{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, t_0\right]$$

QUINDI IL FUNZIONALE DI HAMILTON POTRA' ESSERE RAPPRESENTATO ~~[illegible]~~ NELLA FORMA (CHE AVRA' LO STESSO VALORE NUMERICO DI PRIMA MA DIPENDERA' DALLE SOLE VARIABILI $\{t, q^{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, t_0\}$, SEGUENTE

~~[illegible]~~ $\Rightarrow \quad S = \tilde{S}\left[t, q^{\alpha}, q^{\alpha}_{0}, t_0\right]$

da cui $\quad dS = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha}\, dq^\alpha + \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\, dt = P_\alpha\, dq^\alpha - H\, dt$

otterremo così le due relazioni

$$(10) \qquad \begin{cases} P_\alpha = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha} \\[2ex] H = - \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \end{cases}$$

essendo $\quad H = H(q^\alpha, P_\alpha, t) \quad$ ed essendo le $\quad P_\alpha = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha}$

avremo dalla variazione del funzionale di Hamilton (su una curva $\bar{\gamma}$ fissata, con estremo iniziale fissato) l'equaz. diff. alle derivate parziali del 1° ordine

$$(11) \qquad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left[q^\alpha, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha}, t \right] = 0$$

chiamata equazione di Hamilton-Jacobi.

Quindi il nostro sistema fisico, potrà essere descritto dalle equazioni di Lagrange (del II° ordine)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0$$

che possiamo trasformare nelle $2n$ equazioni diff. ordinarie del 1° ordine (equaz. di Hamilton) con il cambiamento di variabili $\quad (q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \to (q^\alpha, P_\alpha)$

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} \qquad \dot{P}_\alpha = - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

oppure equivalentemente dalla equazione alle derivate parziali del 1° ordine (equaz. di Hamilton-Jacobi)

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(q^\alpha, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha}, t \right) = 0 \qquad \text{con } \tilde{S} = \tilde{S}(q^\alpha, q^\alpha_0, t, t_0,$$

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE $\tilde{S}$ (CHIAMATA FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON) DIPENDE DA nH COSTANTI $\{q^\alpha_0, t_0\} = \{C_1, C_2 \ldots, C_{nH}\}$

D'ALTRA PARTE LA (11) E' UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 1° ORDINE A nH VARIABILI $\{q^\alpha_1, t\}$ DI CONSEGUENZA IL SUO INTEGRALE COMPLETO (SOLUZIONE) DOVRA' CONTENERE nH COSTANTI DI INTEGRAZIONE $C_1, C_2, \ldots C_{nH}$. NOTIAMO COMUNQUE CHE NELLA (11) NON COMPARE LA FUNZIONE $\tilde{S}$ MA SOLO LE SUE DERIVATE PARZIALI RISPETTO AD q^α e t, QUINDI SE S E' SOLUZIONE ANCHE $S + C$ (CON C COSTANTE ARBITRARIA) SARA ALLORA UNA SOLUZIONE. POSSIAMO QUINDI DIRE CHE DELLE nH COSTANTI DI INTEGRAZIONE UNA E' CERTAMENTE ADDITIVA PERCUI

$$\tilde{S} = \tilde{S}(q^\alpha, t, C_1 \ldots C_n) + C$$

POSSIAMO ALLORA SCEGLIERE OPPORTUNAMENTE LA $\tilde{S}$ IN MODO DA ASSUMERE $C = 0$ (IL CHE SIGNIFICA CHE ESSENDO IL PUNTO INIZIALE SU $\bar{X}$ FISSATO AD ARBITRIO ABBIAMO LA LIBERTA' DI METTERE UNA COSTANTE ADDITIVA CHE POSSIAMO SCEGLIERE NULLA IN BASE ALLE CONDIZIONI INIZIALI). L'INTEGRALE COMPLETO DELLA EQUAZIONE (11) ASSUMERA' ALLORA LA FORMA

$$\tilde{S} = \tilde{S}(q^\alpha, t, C_1, \ldots C_n) \tag{12}$$

OSSERVIAMO ADESSO COME LA $\tilde{S}$ POSSA ESSERE INTERPRETATA COME UNA ~~[illegible]~~ FUNZIONE GENERATRICE ASSOCIATA AD UNA TRASFORMAZIONE CANONICA

$$(q^\alpha, P_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha)$$

ESSENDO Q^α e P_α COSTANTI.

CONSIDERIAMO LE $\{C_1 \ldots C_n\} = \{C^\alpha\}$ COME SE FOSSERO LE NUOVE COORDINATE $Q^\alpha = C^\alpha$

E VEDIAMO SE LA $\tilde S(q^\alpha, G^\alpha, t)$ PUO' ESSERE LA FUNZIONE GENERATRICE DELLA TRASF. $(q^\alpha, p_\alpha) \Rightarrow (G^\alpha, P_\alpha)$ PERCHE' COSI' ACCADA $\tilde S$ E' DI TIPO $F_1 = F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ QUINDI DOVRANNO VALERE LE RELAZIONI (NOTA VEDI RETRO PAGINA) $\Rightarrow$ RETRO

$$(13)\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial \tilde S}{\partial q^\alpha}, \quad P_\alpha = -\dfrac{\partial \tilde S}{\partial Q^\alpha} = -\dfrac{\partial \tilde S}{\partial G^\alpha} \\ K = H + \dfrac{\partial \tilde S}{\partial t} \end{cases} ; \Rightarrow \begin{cases} \dot Q^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases} (14)$$

MA DALLA EQUAZ. DI HAMILTON-JACOBI (11) $\Rightarrow K = 0$

(PERCHE' DEVE ACCADERE CHE $H\left(q^\alpha, \frac{\partial \tilde S}{\partial q^\alpha}, t\right) + \frac{\partial \tilde S}{\partial t} = 0$)

QUINDI DALLE (14) $\Rightarrow \begin{cases} \dot Q^\alpha = 0 \Rightarrow Q^\alpha = G^\alpha = \text{COSTANTI} \\ \dot P_\alpha = 0 \Rightarrow P_\alpha = \beta_\alpha = \text{COSTANTI} \end{cases}$ (CHE SAPEVO VERA)

INOLTRE PERCHE' $\tilde S(q^\alpha, G^\alpha, t)$ SIA ORA FUNZIONE GENERATRICE DOVRA' ACCADERE CHE

$$\det\left(\frac{\partial^2 \tilde S}{\partial q^\alpha \partial G^\alpha}\right) \neq 0$$

(QUESTA CONDIZIONE CI DICE CHE TUTTE LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE G^α SONO INDIPENDENTI)

ALLORA ABBIAMO SCOPERTO CHE $\tilde S(q^\alpha, G^\alpha, t)$ POTRA' ESSERE INTESA COME LA FUNZIONE GENERATRICE ~~CERCATA~~ (DI TIPO $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$) DELLA TRASFORMAZIONE CANONICA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to \overbrace{(G^\alpha, B_\alpha)}^{Q^\alpha,\ P_\alpha}$$

OSSERVIAMO ADESSO COME LE COSTANTI G^α, B_α POSSANO ESSERE CORRELATE CON LE CONDIZIONI INIZIALI IMPOSTE ALLE SOLUZIONI GENERALI DELLE EQUAZIONI DI HAMILTON.

<u>TEOREMA DI JACOBI</u>:

CONSIDERIAMO ADESSO L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI (TRALASCIANDO IL FATTO DI AVER DETERMINATO LA FUNZIONE $\tilde S$

NOTA 1

AVREMMO POTUTO ASSUMERE CHE LE COSTANTI $(G_1, \dots G_n)$ FOSSERO I NUOVI IMPULSI $P_\alpha = G_\alpha$ IN QUESTO CASO

$\tilde{S} = \tilde{S}(q^\alpha, G_\alpha, t)$ SAREBBE STATA INTESA COME LA FUNZ. GENERATRICE DELLA TRASF. CANONICA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, G_\alpha)$$

ESSENDO TALE FUNZIONE DI TIPO $F_2 = F_2(q^\alpha, P_\alpha)$ SI AVREBBERO LE CONDIZIONI

$$p_\alpha = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^\alpha} \qquad Q^\alpha = +\frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_\alpha} = +\frac{\partial \tilde{S}}{\partial G_\alpha} \quad ; \quad K = H + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0.$$

DA CUI
$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0 \Rightarrow Q^\alpha = \text{COSTANTI} = \beta_\alpha$$

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha} = 0 \Rightarrow P_\alpha = G_\alpha = \text{costanti}$$ (COME GIÀ SI SAPEVA)

QUINDI $\tilde{S}(q^\alpha, G_\alpha, t)$ POTRÀ ESSERE INTESA COME LA FUNZ. GENERATRICE DELLA TRASF. CANONICA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (\overbrace{B_\alpha, G_\alpha}^{Q^\alpha,\ P_\alpha})$$

CON LA CONDIZIONE CHE $\det\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q^\alpha \partial G_\alpha}\right) \neq 0$ CHE

CORRISPONDE ALLA INDIPENDENZA DELLE COSTANTI G_α.

NOTA 2 OSSERVIAMO CHE SE LA RISOLUZIONE DELLA EQUAZ. DI HAMILTON-JACOBI CI CONSENTE DI TROVARE UN INTEGRALE COMPLETO CHE RISULTA ESSERE LA FUNZIONE GENERATRICE (TIPO F_1 O F_2) DI UNA TRASF. CANONICA, ALLORA FACENDO CIÒ STIAMO LAVORANDO IN UN SOTTOSPAZIO DELLO SPAZIO DELLE FASI, COSTITUITO DA TUTTE LE TRAIETTORIE CON ESTREMI INIZIALE E FINALI DETERMINATI COMPATIBILMENTE CON LA CONDIZIONE DI VINCOLO DESCRITTA DALLA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE INDOTTA DALLA TRASF. CANONICA, IN QUESTO SOTTOSPAZIO LA TRAIETTORIA FISICA È QUELLA PER CUI $\delta(\tilde{S} - S) = 0$. QUANDO INVECE RISOLVIAMO LE EQUAZIONI DI HAMILTON LAVORIAMO IN TUTTO LO SPAZIO DELLE FASI (AVENDO FISSATO LE CONDIZIONI INIZIALI), CON $\delta S = 0$.

ottenuta a partire dal principio variazionale di Hamilton.)

E supponiamo che $V(q^\alpha, \alpha_\alpha, t)$ sia una soluzione (cioè quello che viene chiamato "integrale completo") "integrale" della equazione di Hamilton-Jacobi. Allora proviamo come sia possibile costruire un integrale generale delle equaz. di Hamilton,

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}.$$

<u>Dimostrazione:</u>

<u>Nota:</u> se consideriamo le equaz. di Hamilton

$$(*) \begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \qquad \text{dove } H = H(q^\alpha, p_\alpha, t)$$

allora varrà il teorema di esistenza ed unicità della soluzione, in base al quale fissate certe condizioni iniziali q^α_0, p^α_0 per $t = t_0$.

Allora $\exists$ una sola soluzione che soddisfa le $(*)$ tale soluzione corrisponderà ad un "integrale particolare"

$$q^\alpha = q^\alpha(t, q^\alpha_0, p^0_\alpha)$$
$$p_\alpha = p_\alpha(t, q^\alpha_0, p^0_\alpha)$$

L'integrale generale del sistema $(*)$ è una soluzione del sistema che dipende da $2n$ costanti di integrazione

$$p_\alpha = p_\alpha(t, \alpha_i, \beta_i, t_0)$$
$$q^\alpha = q^\alpha(t, \alpha_i, \beta_i, t_0)$$

tale che "per ogni <u>fissata</u> $2n$-upla di valori costanti $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$

allora

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(t, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, t_0) \\ q_\alpha = q_\alpha(t, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, t_0) \end{cases}$$

è un integrale particolare del nostro sistema.

Inoltre comunque si assegnino le condizioni iniziali t_0, p^0_α, q^0 possiamo determinare in modo univoco le costanti α_i, β_i in modo tale che $p_\alpha(t, \alpha_i, \beta_i, t_0)$ verifichino le condiz. iniziali.

Allora supponiamo di avere un integrale completo della equaz. di Hamilton-Jacobi.

$$V = V(q^\alpha, C_\alpha, t) \qquad \text{con } C_\alpha = \text{costanti indipendenti}$$

(cioè tali che $\det\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial C_\beta}\right) \neq 0$)

Sia $H = H(q^\alpha, p_\alpha, t)$ considerato. La V come la funzione generatrice di una trasf. canonica

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha) \qquad \text{dove } Q^\alpha = C_\alpha$$

Allora se (q^α, p_α) soddisfano le equaz. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot p_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \text{con la nostra trasf. canonica} \Rightarrow \begin{cases} \dot Q^\alpha = \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial K}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$$

essendo $V(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ del 1° tipo avremo:

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial V}{\partial q^\alpha} \\ P_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial Q^\alpha} = -\dfrac{\partial V}{\partial C_\alpha} \\ K = H + \dfrac{\partial V}{\partial t} \end{cases}$$

dalla 3° equazione essendo V soluzione della equaz. di Hamilton Jacobi

$$H + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot Q^\alpha = 0 \\ \dot P_\alpha = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo che $Q^\alpha = C_\alpha =$ costante (cosa che sapevamo)

" " $P_\alpha = B_\alpha =$ costanti

$$B_\alpha = -\frac{\partial V(q^\beta, C_\beta, t)}{\partial C_\alpha} \qquad (**)$$

essendo una funz. generatrice $\det\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^\beta \partial C_\alpha}\right) \neq 0$

da cui le equazioni accoppiate (**) si potranno invertire ottenendo così che $q^\alpha = q^\alpha(C_\beta, B_\beta, t)$ analogamente:

dalla equazione $p_\alpha = \dfrac{\partial V}{\partial q^\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} V[q^\beta(C_\gamma, B_\gamma, t), C_\beta, t] \Rightarrow$ da cui

$$P_\alpha = P_\alpha [G_\beta , B_\beta , t]$$

QUINDI A PARTIRE "DALL'INTEGRALE COMPLETO" DELLA EQUAZ. DI HAMILTON-JACOBI

$V(q^\alpha, G_\alpha, t)$ HO OTTENUTO LE DUE FUNZIONI $\Rightarrow \begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(G_\beta, B_\beta, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(G_\beta, B_\beta, t) \end{cases}$

CHE SODDISFANO LE EQUAZIONI DI HAMILTON .. E CHE RAPPRESENTANO UN INTEGRALE GENERALE IN QUANTO DIPENDONO DALLE 2n-UPLE DI COSTANTI ARBITRARIE $\{ G_\alpha , B_\alpha \}$

CHE RAPPRESENTANO LE NUOVE VARIABILI CANONICHE DELLA TRASFORMAZIONE.

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to \overset{(Q^\alpha,\, P_\alpha)}{(G_\alpha , B_\alpha)}$$

CON FUNZIONE GENERATRICE $V(q^\alpha, G_\alpha, t)$.

OSSERVIAMO CHE UNA VOLTA FISSATE LE CONDIZIONI INIZIALI

$(q^\alpha_0, p_\alpha^0, t_0)$ LE G_α, B_α SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE ESSENDO

$$\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\alpha(q^\alpha_0, p_\alpha^0, t_0) \\ B_\alpha = B_\alpha(q^\alpha_0, p_\alpha^0, t_0) \end{cases}$$

IN QUESTO CASO SARA' QUINDI POSSIBILE PENSARE ALLA NOSTRA TRASF. CANONICA COME $(q^\alpha, p_\alpha) \to (G_\alpha, B_\alpha) \to (q^\alpha_0, p_\alpha^0)$ CIOE' SCEGLIERE COME 2n INTEGRALI PRIMI DEL MOTO DIRETTAMENTE LE $\{q^\alpha_0, p_\alpha^0\}$

NOTA: LA TRASFORMAZIONE

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha) \equiv (G_\alpha, B_\alpha)$$

È UNA TRASFORMAZIONE "CANONICA DI PUNTO" PERCHE' PORTA DA UN PUNTO FISSATO $A \in \bar{\gamma}$ AD UN PUNTO $B \in \bar{\gamma}$ ESSENDO $\bar{\gamma}$ UNA CURVA FISSATA IN CUI VALGONO LE EQUAZIONI DI MOTO (CIOE' LE EQUAZ. DI LAGRANGE O LE EQUAZIONI DI HAMILTON)

COME ABBIAMO GIA' DETTO SI E' STABILITA UNA CORRISPONDENZA TRA LE 2n EQUAZIONI CANONICHE (DI HAMILTON) DEL MOTO E LA EQUAZIONE DI H-J CHE E' UNA EQUAZ. DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 1° ORDINE. QUESTA CORRISPONDENZA DERIVA SOSTANZIALMENTE DAL FATTO CHE ENTRAMBE (LE EQUAZ. DI HAMILTON E LA EQUAZ. DIFF. ALLE DERIVATE PARZIALI DI H-J) DISCENDONO DALLO STESSO PRINCIPIO VARIAZIONALE, CHE IN QUESTO CASO E' IL "PRINCIPIO DI HAMILTON MODIFICATO".

NOTA: RICORDIAMO COMUNQUE CHE STIAMO LAVORANDO IN DUE SPAZI DIVERSI ALL'INTERNO DEI QUALI ABBIAMO LA NOSTRA TRAIETTORIA FISICA.

MOSTRIAMO ADESSO ALCUNI ESEMPI APPLICATIVI.

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ SIA ~~DATO~~ UN SISTEMA CONSERVATIVO $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

IN QUESTO CASO ABBIAMO UN INTEGRALE PRIMO $H(q^\alpha, p_\alpha) = E$

ALLORA CERCHIAMO SOLUZIONI DELLA EQ. DI H-J

$$V(q^\alpha, G_\alpha, t) = W(q^\alpha, G_\alpha) - Et \quad \Rightarrow \quad H\left(q^\alpha, \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

DA CUI $\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial t} = -E \Rightarrow$ $$H\left(q^\alpha, \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right) = E$$

ESSENDO V LA FUNZIONE GENERATRICE DI UNA TRASF. CANONICA

ANALOGAMENTE W E' LA FUNZ. GENERATRICE DELLA STESSA TRASF. CANONICA

ESSENDO

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^\alpha \partial G_\beta}\right) = 0$$

OSSERVIAMO CHE $G_1, G_2 \dots G_n$ SONO COSTANTI DEL MOTO, ED E E' UNA COSTANTE DEL MOTO DA CUI $E = E(G_1 \dots G_n)$

ASSUMIAMO ALLORA SENZA PERDITA DI GENERALITA CHE $E = G_n$

DA CUI $$V = W(q^\alpha, G_1, \dots G_{n-1}, E) - G_n t$$

LA TRASF. CANONICA $$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha) = (G_\alpha, P_\alpha)$$

ESSENDO $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0 \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha} = 0 \Rightarrow Q_\alpha = G_\alpha = \text{cost.}$

$P_\alpha = B_\alpha = \text{COSTANTE}$

ESSENDO W LA FUNZIONE GENERATRICE AVREMO:

$$P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \qquad \begin{cases} B_\alpha = P_\alpha = -\dfrac{\partial W}{\partial G_\alpha}(q^\beta, G_1, \dots G_{n-1}, E) & \alpha = 1, \dots n-1 \\ \\ B_n = P_n = -\dfrac{\partial W}{\partial E} + t \end{cases}$$

ALLORA SE CONSIDERO IL SISTEMA DI $n-1$ EQUAZIONI:

$$B_1 = -\frac{\partial W(q_1, \dots q_n, G_1, \dots G_{n-1}, E)}{\partial G_1}$$

$$\vdots$$

$$B_{n-1} = -\frac{\partial W(q_1, \dots q_n, G_1, \dots G_{n-1}, E)}{\partial G_{n-1}}$$

POSSO RISOLVERLO RISPETTO ALLE VARIABILI $(q_1, \dots q_{n-1})$

OTTENENDO

$$(*) \quad \begin{cases} q_1 = q_1(G_1, \dots G_{n-1}; B_1, \dots B_{n-1}; E, q_n) \\ \vdots \\ q_{n-1} = q_{n-1}(G_1, \dots G_{n-1}; B_1, \dots B_{n-1}; E, q_n) \end{cases}$$

DOVE FISSANDO LE CONDIZIONI INIZIALI q^α_0, p^α_0, POSSIAMO DETERMINARE LE COSTANTI G_α, B_α IN FUNZIONE DI q^α_0, p^α_0.
COSÌ LE $(*)$ RAPPRESENTERANNO LE EQUAZIONI DELLA TRAIETTORIA

ESSENDO

$$(**) \quad \begin{cases} q_1 = q_1(q^\alpha_0, p^\alpha_0, q_n) \\ q_2 = q_2(q^\alpha_0, p^\alpha_0, q_n) \\ \vdots \\ q_{n-1} = q_{n-1}(q^\alpha_0, p^\alpha_0, q_n) \\ q_n = q_n \end{cases}$$

(PARAMETRICHE IN q_n

DALLA RELAZIONE

$$(***) \quad B_n = -\frac{\partial W}{\partial E}(q_1, \dots q_n, G_1, \dots G_{n-1}, E) + t$$

ESPRIMENDO LE $q_1, \dots q_{n-1}$ TRAMITE LE $(**)$ IN W, RISOLVENDOLO

LA (***) RISPETTO A q_n OTTENENDO:

$$q_n = q_n(G_\alpha, B_\alpha, t) = q_n(q^0_\alpha, p^0_\alpha, t)$$

CHE CI DARÀ LA LEGGE ORARIA.

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ GENERALIZZIAMO QUESTA PROCEDURA SUPPONENDO DI AVERE UNA VARIABILE CICLICA NELLA HAMILTONIANA (OSSERVO CHE NEL CASO PRECEDENTE t POTEVA CONSIDERARSI COME UNA VARIABILE CICLICA IN QUANTO $H(q^\alpha, p_\alpha) = E =$ COSTANTE).

SIA ESSA q^n PER CUI $H(q^1, \ldots q^{n-1}, p_1, \ldots \gamma_n, t)$

ALLORA DALLE EQUAZ. DI HAMILTON

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_n = \gamma_n = \text{COSTANTE}$$

ALLORA CERCHEREMO COME FUNZIONE DI HAMILTON

$$V(q_1, \ldots q_n; G_1 \ldots G_n, t) = W(q_1, \ldots q_{n-1}, G_1, \ldots G_n, t) + \gamma_n q^n$$

NEL CASO IN CUI SI ABBIANO M VARIABILI CICLICHE IN H PER ESEMPIO LE PRIME M $\{q^1, \ldots q^M\}$

$$H = H(q^{M+1}, \ldots q^n, \gamma_1, \ldots \gamma_M, p_{M+1}, \ldots p_n, t)$$

DA CUI
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \gamma_i = \text{COSTANTE} \qquad i = 1, \ldots M$$

ALLORA CERCHEREMO LA V NELLA FORMA.

$$V(q^1, \ldots q^n, G_1, \ldots G_n, t) = W(q^{M+1}, \ldots q^n; G_1 \ldots G_n, t) + \sum_{\mu=1}^{M} \gamma_\mu q^\mu$$

SE NON AVESSIMO LA DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO IN H

$$H = H(q^{M+1}, \ldots q^n; \gamma_1, \ldots \gamma_M, p_{M+1}, \ldots p_n) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad H = E = \text{COSTANTE}$$

$$V(q^1, \ldots q^n; G_1 \ldots G_n, t) = W(q^{M+1}, \ldots q^n; G_1 \ldots G_n) + \sum_{\mu=0}^{M} \gamma_\mu q^\mu$$

DOVE $\gamma_0 = -E$ $\quad q^0 = t$.

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = \gamma_i \quad i=1..M \; ; \quad \frac{\partial V}{\partial q^s} = \frac{\partial W}{\partial q^s} \quad s=M+1,..n \; ; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -E$$

$$H\left(q^{M+1}, .. q^n ; \frac{\partial W}{\partial q^{M+1}}, .. \frac{\partial W}{\partial q^n}, \gamma_1 .. \gamma_M \right) = E$$

OSSERVIAMO CHE CI SONO n COSTANTI $C_1, .. C_n$, E A $\{E, \gamma_1, \gamma_M$

SONO COSTANTI DEL MOTO, QUINDI

$$\begin{cases} E = E(C_1, .. C_n) \\ \gamma_i = \gamma_i(C_1, .. C_n) & i=1,..M \end{cases}$$

CONSIDERIAMO ALLORA $C_n = E \qquad C_i = \gamma_i \quad i=1,..M$

DA CUI:

$$V = W(q^{M+1}, .. q^n ; \gamma_1, .. \gamma_M ; C_{M+1}, .. C_{n-1} ; E) - Et + \sum_{i=1}^{M}$$

CONSIDERIAMO LA TRASF. CANONICA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (Q^\alpha, P_\alpha) = (C_\alpha, P_\alpha)$$

ESSENDO $\dot{Q}^\alpha = \dot{P}_\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = C_\alpha \\ P_\alpha = B_\alpha \end{cases}$

DOVE:
$$\begin{cases} Q^i = \gamma_i & i=1..M \\ Q^s = C_s & s=M+1, .. n-1 \\ Q^n = C_n = E \end{cases}$$

~~RICORDIAMO INOLTRE CHE~~ $\cancel{B_\alpha = P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q^\alpha}(q^s, \gamma_i, C_k, E)}$

~~DA CUI:~~
$$\cancel{B_1 = -\frac{\partial W(\dots)}{\partial \gamma_1}}$$
$$\vdots$$
$$\cancel{B_M = -\frac{\partial W(\dots)}{\partial \gamma_M}}$$
$$\cancel{B_{M+1} = -\frac{\partial W}{\partial C_{M+1}}}$$
$$B_{n-1} = -\frac{\partial W}{}$$

RICORDIAMO CHE $\quad B_\alpha = P_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial q^\alpha}$

DA CUI:

$$
(*)\quad\begin{cases}
B_1 = -\dfrac{\partial W(q^{M+1},\dots q^n;\ \gamma_1,\dots\gamma_M;\ C_{M+1}\dots C_{n-1};\ E)}{\partial \gamma_1} + q^1\\
\vdots\\
B_M = -\dfrac{\partial W(q^{M+1},\dots q^n;\ \gamma_1\dots\gamma_M;\ C_{M+1}\dots C_{n-1},\ E)}{\partial \gamma_M} + q^M\\
B_{M+1} = -\dfrac{\partial W(\ ---\ )}{\partial C_{M+1}}\\
\vdots\\
B_{n-1} = -\dfrac{\partial W(\ ---\ )}{\partial C_{n-1}}
\end{cases}
$$

RICORDO CHE FISSANDO LE CONDIZIONI INIZIALI $q^\alpha_{(0)}, P_\alpha^{(0)}$ PER $t=t_0$ DETERMINEREMO IN MODO UNIVOCO TUTTE LE COSTANTI C_α, B_α IN FUNZIONE DI q^α_0, P_α^0. QUINDI, SE RISOLVIAMO LE (*) RISPETTO ALLE VARIABILI $\{q^1,\dots q^{n-1}\}$ OTTERREMO:

$$
(**)\quad\begin{cases}
q^1 = q^1(\gamma_1,\dots\gamma_M,\ C_{M+1},\dots C_{n-1};\ B_1,\dots B_{n-1};\ E,\ q^n)\\
\vdots\\
q^{n-1} = q^{n-1}(\ \text{''}\qquad \text{''}\qquad \text{''}\quad \dots)
\end{cases}
$$

E QUINDI ESSENDO C_α, B_α FUNZIONI DI q^α_0, P_α^0 LE (**) RAPPRESENTERANNO LE EQUAZIONI DELLA TRAIETTORIA, ESSENDO

$$
(***)\quad\begin{cases}
q^1 = q^1(q^\alpha_0,\ P_\alpha^0,\ q^n)\\
\vdots\\
q^{n-1} = q^{n-1}(q^\alpha_0,\ P_\alpha^0,\ q^n)\\
q^n = q^n
\end{cases}
$$

DALLA ULTIMA RELAZIONE

$$(****)\quad B_n = -\frac{\partial W}{\partial E}(\ \dots\ ) + t$$

ESPRIMENDO LE $q^1 \dots q^{n-1}$ TRAMITE LE (***) IN W POTREMO

RISOLVERE LA (148) RISPETTO A q^n OTTENENDO

$$q^n = q^n(G_\alpha, B_\alpha, t) = q^n(q_0^\alpha, p_\alpha^0, t)$$

LA LEGGE ORARIA DEL MOTO.

$\longleftrightarrow$

$\boxed{\text{CASO I}}$ METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI L'HAMILTONIANA È UNA COSTANTE DEL MOTO. DIREMO CHE LE VARIABILI q_i CHE FIGURANO NELLA EQUAZIONE DI H-J. SONO SEPARABILI SE ESSENDO

$$V(q^\alpha, G_\alpha, t) = W(q^\alpha, G_\alpha) - Et$$

ACCADRÀ CHE UNA SOLUZIONE DELLA FORMA

$$W = \sum_i W_i(q_i, G_1, \dots G_n)$$

RIESCE A ~~FARE~~ DETERMINARE A PARTIRE DALLA L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI UN SET DI n EQUAZIONI DIFFERENZIALI ~~ORDINARIE~~ SCRITTE NELLA FORMA

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, G_1, \dots G_n\right) = G_i \qquad (14)$$

DOVE IN OGNI EQUAZIONE (14) FIGURERÀ UNA SOLA COORDINATA q_i E LA CORRISPONDENTE DERIVATA DI W RISPETTO A QUESTA q_i.

QUESTE EQUAZIONI COSTITUIRANNO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE PARTICOLARMENTE SEMPLICI (BASTA RISOLVERLE RISPETTO A $\partial W_i/\partial q_i$ E POI INTEGRARE RISPETTO A q_i).

OSSERVIAMO CHE IN GENERALE NON È POSSIBILE DARE UN CRITERIO SEMPLICE PER STABILIRE QUANDO LA EQ H-J È A VARIABILI SEPARABILI. INOLTRE IL PROBLEMA DELLA SEPARABILITÀ DIPENDE DAL SISTEMA DI COORDINATE UTILIZZATO (RICORDIAMO INOLTRE CHE NON TUTTI I SISTEMI HAMILTONIANI SONO INTEGRABILI)

ALLORA SUPPONENDO DI DI ESPLICITARE LE DERIVATE $\partial W_i/\partial q_i$ DALLE EQ. (14)

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} = f_1(q_1, G_1, \dots G_n), \quad \dots \quad \frac{\partial W_n}{\partial q_n} = f_n(q_n, G_1, \dots G_n)$$

AVREMO LA $W(q^\alpha, G_\alpha)$ DALLA RELAZIONE

$$W = \int_{q_{10}}^{q_1} f_1(\xi_1, G_\alpha)\, d\xi_1 + \int_{q_{20}}^{q_2} f_2(\xi_2, G_\alpha)\, d\xi_2 + \dots + \int_{q_{n0}}^{q_n} f_n(\xi_n, G_\alpha)\, d\xi_n.$$

ESEMPIO N°1 "OSCILLATORE ARMONICO 1D"

Sia $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (QUINDI t POTRÀ ESSERE INTERPRETATA COME UNA VARIABILE CICLICA)

$$H = E = \text{COSTANTE}.$$

DA CUI L'EQUAZ. DI H-J $\quad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

CERCHIAMO SOLUZIONI $\quad V(q, E, t) = W(q, E) - Et \quad$ E $\quad p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}$

DA CUI

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}$$

$$W = \pm m\omega \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}\, dq$$

$$V = \pm m\omega \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}\, dq - Et$$

RICORDIAMO CHE

$$\beta = -\frac{\partial W}{\partial E} + t = \mp \cancel{m\omega}\, \frac{1}{2}\, \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\,\cancel{m}\omega^2} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}} + t$$

$$\Rightarrow \omega(t - \beta) = \pm \int_{q_0}^{q} \frac{1}{\sqrt{A - q^2}}\, dq \qquad \text{CON } A = \frac{2E}{m\omega^2}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - q^2/A}}\, dq = \qquad \frac{q}{\sqrt{A}} = z \quad \Rightarrow dq = \sqrt{A}\, dz$$

$$= \pm \int \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz = \pm \operatorname{arcsen}(z) = \pm \operatorname{arcsen}(q/\sqrt{A})$$

Da cui $\pm\,\omega(t-\beta) = \operatorname{arcosen}\left(\frac{q}{\sqrt{A}}\right)$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{A}\ \operatorname{sen}\left[\pm\,\omega(t-\beta)\right] = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ \operatorname{sen}\left[\omega(t-\beta)\right]$$

Inoltre ricordando che $p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = \pm\, m\omega\sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2} - q^2} =$

$$= \pm\, m\omega\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - \frac{2E}{m\omega^2}\operatorname{sen}^2\left[\omega(t-\beta)\right]} =$$

$$= \pm\sqrt{2mE}\ \cos\left[\omega(t-\beta)\right]$$

Da cui

$$\cancel{q = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega}}\ \operatorname{sen}\left[\omega(t-\beta)\right]} \qquad \tilde{\beta} = -\omega\beta.$$

$$\begin{cases} q = \pm\sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}}\ \operatorname{sen}(\omega t + \tilde{\beta}) \\[2ex] p = \pm\sqrt{2mE}\ \cos(\omega t + \tilde{\beta}) \end{cases}$$

Quindi se per $t_0 = 0$ $\quad p_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\tilde{\beta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pi/2$

$$q_0 = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ \operatorname{sen}(\tilde{\beta}) = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$\begin{cases} q = q_0\ \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) \\[2ex] p = q_0\, m\omega\ \cos(\omega t + \pi/2) \end{cases}$$

MOTO DI UN PUNTO MATERIALE IN UN CAMPO CENTRALE.

Sia $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + U(r)$

IL MOTO AVVIENE IN UN PIANO E IL PUNTO MATERIALE E' SOGGETTO A FORZE CONSERVATIVE CON POTENZIALE $U(r)$.

PASSANDO IN COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

DA CUI: $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{m r^2} p_\varphi \end{cases} \qquad H = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}$$

QUINDI AVREMO:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) + U(r)$$

E ANALOGAMENTE CONSIDERANDO LA TRASF. DI LEGENDRE.

$$\cancel{H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = m p_r^2 + \frac{m^2}{r^2} p_\varphi^2 - \frac{1}{2}\left(m p_r^2 + \frac{m}{r^2} p_\varphi^2\right)} - U(r)$$

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{1}{m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) + U(r)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - U(r)$$

OSSERVIAMO CHE $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ QUINDI t e φ SONO CICLICHE

$$H = E \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad p_\varphi = \text{costante} = \gamma_\varphi$$

ALLORA CERCHEREMO COME "FUNZIONE DI HAMILTON" LA FUNZIONE

$$V(r,\varphi,a_1,a_2,t) = W(r,a_1,a_2) + \gamma_\varphi \varphi - Et$$

IN PARTICOLARE AVREMO: $G_1 = \gamma_\varphi \quad G_2 = E$

DA CUI

$$V(r, \varphi, \gamma_\varphi, E, t) = W(r, \gamma_\varphi, E) + \gamma_\varphi \varphi - Et$$

QUESTA DOVRÀ SODDISFARE L'EQUAZ. DI H-J.

$$H\left(r, \frac{\partial W}{\partial r}, \gamma_\varphi\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H\left(r, \frac{\partial W}{\partial r}, \gamma_\varphi\right) = E$$

(QUESTO PERCHÉ $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r}$; $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \gamma_\varphi$)

LA TRASF. CANONICA

$$(q^\alpha, p_\alpha) \rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha) = (G_\alpha, P_\alpha)$$

DOVE $\dot{Q}^\alpha = \dot{P}_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q^\alpha = G_\alpha \\ P_\alpha = B_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial Q^\alpha} \end{cases}$

DOVE $Q^1 = \gamma_\varphi \quad Q^2 = G_2 = E$

RICORDANDO CHE $p_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} \quad p_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \gamma_\varphi$

DA CUI

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\gamma_\varphi^2}{r^2}\right\} - U(r) = E$$

DA CUI, $\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2m[E + U(r)] - \frac{\gamma_\varphi^2}{r^2}}$

$$W = \int \sqrt{2m[E + U(r)] - \frac{\gamma_\varphi^2}{r^2}}\, dr + K$$ (MA LA COSTANTE K È INESSENZIALE)

$$V = \int \sqrt{2m[E + U(r)] - \frac{\gamma_\varphi^2}{r^2}}\, dr + \gamma_\varphi \varphi - Et.$$

Da cui

$$B_1 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_\theta} = -\int \frac{1}{2}\,\frac{-2\alpha_\theta/r^2}{\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}\,dr + \theta$$

$$= \int \frac{\alpha_\theta}{r^2\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}\,dr + \theta$$

$$B_2 = -\frac{\partial V}{\partial E} = -\int \frac{1}{2}\,\frac{2m}{\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} + t$$

$$= -\int \frac{m}{\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}\,dr + t$$

Da cui avremo le due relazioni che descrivono il moto.

$$\begin{cases} 1^a & B_1 = \displaystyle\int \frac{\alpha_\theta}{r^2\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}\,dr + \theta \\ 2^a & t - B_2 = \displaystyle\int \frac{m}{\sqrt{2m(E+U(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}\,dr \end{cases}$$

Dalla 1^a ricavo $\begin{cases} \theta = F(r, \alpha_\theta, E, B_1) = \hat{F}(r, r_{(0)}, \theta_{(0)}, p_\theta^{(0)}, p_r^{(0)}) \\ r = r \end{cases}$

Dalla 2^a

ottengo

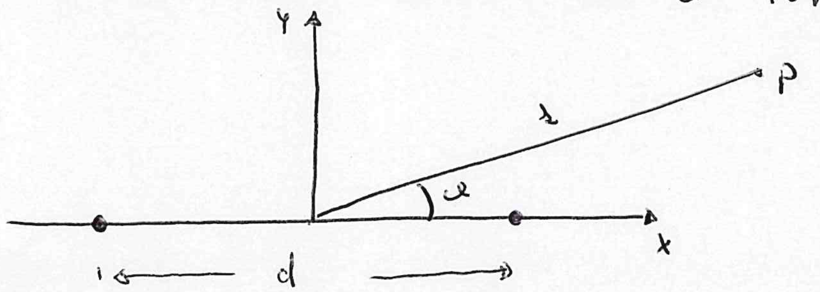
la legge oraria $\rightarrow$ $r = r(t, r_{(0)}, \theta_{(0)}, p_\theta^{(0)}, p_r^{(0)})$

"PARTICELLA IN R^2 SOGGETTA AD UN CAMPO DI DIPOLO"

CONSIDERIAMO UN PUNTO MATERIALE P DI MASSA m CHE SI MUOVE NEL **PIANO** xy SOTTO L'AZIONE DI UNA FORZA CONSERVATIVA DI POTENZIALE $U(r)$ DI DIPOLO.

$$U(\underline{r}) = \frac{\vec{M}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

DOVE $\underline{M}$ E' UN VETTORE FISSATO CHE AD ESEMPIO SUPPONIAMO NELLA DIREZIONE DELL'ASSE $\vec{x}$. (**ESEMPI** FISICI: A) PARTICELLA ATTRATTA DA DUE CENTRI DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALI POSTI A GRANDE DISTANZA B) PARTICELLA CARICA POSTA NEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE GENERATO DAL "DIPOLO MAGNETICO" TERRESTRE POLOSUD-POLONORD)



$r >> d$

IN QUESTO CASO OSSERVANDO IL MOTO PIANO AVREMO:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - \frac{M\cos\varphi}{r^2}$$

DA CUI CONVERRA' PASSARE IN COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ y = r\sin\varphi & \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

DA CUI:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \right) - \frac{M\cos\varphi}{r^2}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m r^2} \end{cases}$$

QUINDI

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{M\cos\varphi}{r^2}$$

E QUINDI

$$H(r,\alpha,P_r,P_\alpha) = \dot q^\alpha P_\alpha - L = \frac{1}{m}\left(P_r^2 + \frac{P_\alpha^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\alpha^2}{r^2}\right) + \frac{\mu\cos\alpha}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\alpha^2}{r^2}\right) + \mu\frac{\cos\alpha}{r^2} = E = \text{COSTANTE}$$

CALCOLIAMO LE EQUAZ. DI HAMILTON:

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial P_\alpha} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot r = \dfrac{\partial H}{\partial P_r} = \dfrac{P_r}{m} \qquad \dot\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \dfrac{P_\alpha}{m r^2} \\ \dot P_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{1}{2m}\left\{-\dfrac{2}{r^3}P_\alpha^2\right\} + \dfrac{2}{r^3}\mu\cos\alpha = \\ \qquad = \dfrac{P_\alpha^2}{m r^3} + \dfrac{\mu\cos\alpha}{r^3} \\ \dot P_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha} = \dfrac{\mu\sin\alpha}{r^2} \end{cases}$$

CHE SONO 4 EQUAZ. DIFF. ORDINARIE DI DIFFICILE RISOLUZIONE

UTILIZZIAMO IL METODO DI HAMILTON-JACOBI.

DAL MOMENTO CHE L'ENERGIA SI CONSERVA CERCHIAMO UNA FUNZIONE GENERATRICE DEL TIPO

$$V(r,\alpha,G_1,G_2,t) = W(r,\alpha,G_1,E) - Et$$

ESSENDO V SOLUZIONE DELLA $\dfrac{\partial V}{\partial t} + H\left(r,\alpha,\dfrac{\partial V}{\partial r},\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}\right) = 0$

DA CUI: $H\left(r,\alpha,\dfrac{\partial W}{\partial r},\dfrac{\partial W}{\partial \alpha}\right) = E$ CON $\det\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial q^\alpha \partial G_\beta}\right) \neq 0$

LA V E' LA FUNZ. GENERATRICE DELLA TRASF. CANONICA

$$(q^\alpha, P_\alpha) \Rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha) = (G_\alpha, P_\alpha)$$

$$\dot Q_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0 \qquad \dot P_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} Q^\alpha = G_\alpha = \text{COSTANTI} \\ P_\alpha = B_\alpha = \text{COSTANTI} \end{cases}$$

L'equazione $H\left(r, \theta, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = E$ si scriverà così:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2m}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{M\cos\theta}{r^2} = E$$

Vediamo se è possibile applicare il metodo della separazione delle variabili, cerchiamo soluzioni del tipo

$$W(r, \theta, C_1, E) = W_1(r, C_1, E) + W_2(\theta, C_1, E)$$

per cui $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}$ e $\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial W_2}{\partial \theta}$ quindi sostituendo:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 r^2 - 2mr^2E = -\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 - 2mM\cos\theta = \alpha$$

Questa identità è lecita (essendo al 1° membro solo una funzione di r, e a 2° membro solo una funzione di θ) se e solo se 1° e 2° membro sono uguali ad una stessa costante α.

Quindi assumeremo che $C_1 = \alpha$ e scriveremo, senza perdita di generalità

$$\frac{dW_1(r, \alpha, E)}{dr} = \sqrt{\frac{\alpha}{r^2} + 2mE} \Rightarrow W_1 = \int \left(\frac{\alpha}{r^2} + 2mE\right)^{1/2} dr + K_1$$

$$\frac{dW_2(\theta, \alpha, E)}{d\theta} = \sqrt{(-\alpha - 2mM\cos\theta)} = W_2 = \int (-\alpha - 2mM\cos\theta)^{1/2} d\theta + K$$

(ma le costanti additive sono inessenziali ai fini del calcolo finale)

da cui:

$$W = \int \left(\frac{\alpha}{r^2} + 2mE\right)^{1/2} dr + \int (-\alpha - 2mM\cos\theta)^{1/2} d\theta$$

Se adesso sfruttiamo le relazioni:

$$P_1 = B_1 = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \leftarrow \text{traiettoria}$$

$$P_2 = B_2 = -\frac{\partial W}{[illegible]} + t \leftarrow \text{legge oraria}$$

DA CUI:

$$B_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial W_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\alpha}{\xi^2} + 2mE\right)^{-1/2} d\xi + \frac{1}{2}\int \left(-\alpha - 2m\mu\cos\theta\right)^{-1/2} d\theta$$

DA CUI RICAVIAMO L'EQUAZIONE DELL'ORBITA

$$\begin{cases} q_1 = q_1(q_2, \alpha, E\, B_1) \\ q_2 = q_2 \end{cases}$$

MENTRE LA LEGGE ORARIA SARÀ DETERMINATA DA:

$$t - B_2 = \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + 2mE\right)^{-1/2} 2m\, d\xi = m\int \left(\frac{\alpha}{\xi^2} + 2mE\right)^{-1/2} d\xi$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (APPLICAZ. EQUAZ. HAMILTON-JACOBI)

PARTICELLA IN R^3 SOGGETTA AD UN CAMPO CENTRALE (SENZA LA SEMPLIFICAZIONE INIZIALE DI RIDURCI ALLO STUDIO DI UN MOTO PIANO

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + U(|\underline{r}|)$$

COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \sin\theta \cos\varphi + \rho \cos\theta\, \dot{\theta} \cos\varphi - \rho \sin\theta \sin\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin\theta \sin\varphi + \rho \cos\theta\, \dot{\theta} \sin\varphi + \rho \sin\theta \cos\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \cos\theta - \rho \sin\theta\, \dot{\theta}$$

DA CUI:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta$$

DA CUI $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \right] + U(\rho)$

$$P_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m}$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m \rho^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m \rho^2}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m \rho^2 \sin^2\theta}$$

$(P_\varphi = M_z)$

(COMPONENTE Z DEL MOMENTO ANGOLARE)

DA CUI:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left[P_\rho^2 + \frac{P_\theta^2}{\rho^2} + \frac{P_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2\theta} \right] + U(\rho)$$

DA CUI

$$H = \dot{\rho} P_\rho + \dot{\theta} P_\theta + \dot{\varphi} P_\varphi - \mathcal{L} =$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[P_\rho^2 + \frac{P_\theta^2}{\rho^2} + \frac{P_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2\theta} \right] - U(\rho)$$

ALLORA AVREMO COME VARIABILI CICLICHE φ, e t.

DA CUI SONO COSTANTI DEL MOTO

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow P_\varphi = \gamma_\varphi \qquad \text{E A} \quad H = E$$

ALLORA CONSIDERANDO L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

$$H\left(q^\alpha, \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

CERCHEREMO SOLUZIONI DEL TIPO:

$$V(\rho, \theta, \varphi, G_\alpha) = W(\rho, \theta, G_1, \gamma_\varphi, E) + \gamma_\varphi \varphi - E t.$$

CERCHIAMO COME SOLUZIONE, UNA SOLUZIONE OTTENUTA CON IL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

$$W(\rho, \theta, G_1, \gamma_\varphi, E) = W_1(\rho, G_1, \gamma_\varphi, E) + W_2(\theta, G_1, \gamma_\varphi, E)$$

CONSIDERANDO LA SOLUZIONE $V(\rho, \theta, \varphi, G_\alpha)$ DELLA EQUAZ. DI H-JACOBI COME FUNZIONE GENERATRICE DI UNA TRASF. CANONICA $(q^\alpha, p_\alpha) \to (G_\alpha, B_\alpha)$ DI TIPO $F_1(q^\alpha, Q^\alpha, t)$ CON $Q^\alpha = G_\alpha$ AVREMO

$$p_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \Rightarrow \quad (1) \begin{cases} P_\rho = \dfrac{\partial W_1}{\partial \rho} \\ P_\theta = \dfrac{\partial W_2}{\partial \theta} \\ P_\varphi = \gamma_\varphi \end{cases}$$

ANALOGAMENTE AVREMO $\quad B_\alpha = P_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial Q_\alpha} \qquad \alpha = 1 \dots 2.$

SOSTITUIAMO LE (1) NELLA HAMILTONIANA:

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\gamma_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2\theta}\right] - U(\rho) = E$$

DA CUI MOLTIPLICANDO PER $2m\rho^2$

$$\rho^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\gamma_\varphi^2}{\sin^2\theta} - 2m\rho^2 U(\rho) = 2m\rho^2 E$$

DA CUI RIORDINANDO I TERMINI:

$$\rho^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 - 2m\rho^2\left[E + U(\rho)\right] = -\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\gamma_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 0$$

IL 1° MEMBRO E' FUNZIONE SOLO DI ρ

IL 2° " " " " " θ $\quad \forall\, \rho, \theta$

QUESTO SARA' LECITO SE E' SOLO SE ENTRAMBI I DUE MEMBRI SONO UGUALI AD UNA MEDESIMA COSTANTE DEL MOTO α. DA CUI AVREMO OTTENUTO DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE INDIPENDENTI.

$$(2)\quad \begin{cases} \rho^2\left\{\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 - 2m\left[E + U(\rho)\right]\right\} = \alpha \\[2ex] \left(\dfrac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 + \dfrac{\gamma_\varphi^2}{\sin^2\theta} = -\alpha = A^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ RETRO

CHE POSSIAMO RISOLVERE SEPARATAMENTE IN QUANTO SONO DISACCOPPIATE.

INOLTRE ASSUMEREMO CHE LA COSTANTE DEL MOTO α SIA SCELTA AL POSTO DELLA COSTANTE C_1

DA CUI:

$$V(\rho, \theta, \varphi, C_\alpha) = W_1(\rho, \alpha, \gamma_\varphi, E) + W_2(\theta, \alpha, \gamma_\varphi, E)$$
$$+ \gamma_\varphi \varphi - E t .$$

UTILIZZIAMO ADESSO LE RELAZIONI $B_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial C_\alpha}$

DA CUI:

$$\begin{cases} B_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial \alpha} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial W_2}{\partial \alpha} \\[2ex] B_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial \gamma_\varphi} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial \gamma_\varphi} - \dfrac{\partial W_2}{\partial \gamma_\varphi} - \varphi \\[2ex] B_3 = -\dfrac{\partial V}{\partial E} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial E} - \dfrac{\partial W_2}{\partial E} + t . \end{cases}$$

RISOLVIAMO LE EQUAZ. DIFF. ORDINARIE (2)

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho^2} + 2m\left[E + U(\rho)\right]}$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right) = \sqrt{-\alpha - \frac{\gamma_\varphi^2}{\sin^2\theta}}$$

DA CUI INTEGRANDO AVREMO

$$W_1 = \int \sqrt{\frac{\alpha}{\rho^2} + 2m[E + U(\rho)]}\, d\rho + K_1$$

$$W_2 = \int \sqrt{-\alpha - \frac{\gamma_\varphi^2}{4 n^2 \theta}}\, d\theta + K_2$$

(NOTA: LE COSTANTI K_1 E K_2 SONO IRRILEVANTI AI FINI DEL CALCOLO)

DA CUI:

$$(*) \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\rho^2 \sqrt{2m[E+U(\rho)] + \frac{\alpha}{\rho^2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-\alpha - \frac{\gamma_\varphi^2}{4n^2\theta}}}\, d\theta \\ B_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial \gamma_\varphi} - \varphi = \int \frac{\gamma_\varphi / 4n^2\theta}{\sqrt{-\alpha - \frac{\gamma_\varphi^2}{4n^2\theta}}}\, d\theta - \varphi \end{cases}$$

$$B_3 = -\frac{\partial W_1}{\partial E} + t \Rightarrow (t - B_3) = \frac{\partial W_1}{\partial E}$$

DA CUI:

$$(t - B_3) = \int \frac{m}{\sqrt{2m[E + U(\rho)] + \frac{\alpha}{\rho^2}}}\, d\rho \qquad (64)$$

DALLE PRIME DUE EQUAZIONI (*) OTTERREMO (RISOLVENDO GLI INTEGRALI:

$$\begin{cases} \theta = \theta(\alpha, E, \gamma_\varphi, B_1, B_2, \rho) \\ \varphi = \varphi(\alpha, E, \gamma_\varphi, B_1, B_2, \rho) \\ \rho = \rho \end{cases}$$

TRAIETTORIA DEL MOTO.

DALL'ULTIMA EQUAZIONE (**) RISOLVENDO RISPETTO A ρ AVREMO

$$\rho = \rho(\lambda, E, \gamma_\varphi, B_3, t) \qquad \text{"LEGGE ORARIA"}$$

OVVIAMENTE PER RISOLVERE ESPLICITAMENTE IL PROBLEMA AVREMO CONSIDERARE UNO SPECIFICO POTENZIALE $U(\rho)$.

— o —