"EQUAZIONI DI LAGRANGE E SOLLECITAZIONI"

SE RISCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE AVREMO IN GENERALE

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \\ Q_\alpha = Q_\alpha^{(C)} + Q_\alpha^{(G)} + Q_\alpha^{(N.C)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ TRE TIPI DI SOLLECITAZIONI

$$\begin{cases} Q_\alpha^{(C)} & \text{"DA FORZE CONSERVATIVE"} \\ Q_\alpha^{(G)} & \text{"DA POTENZIALI GENERALIZZATI"} \\ Q_\alpha^{(N.C)} & \text{"DA FORZE NON CONSERVATIVE"} \end{cases}$$

IN GENERALE "TUTTE" LE SOLLECITAZIONI POSSONO ESSERE DETERMINATE DALLA RELAZIONE

$$\boxed{Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha}}$$

$\underline{R}_i^{(a)}$ = "RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE ATTIVE"

P_i "PUNTO DI APPLICAZIONE"

1) SOLLECITAZIONI CONSERVATIVE

$\exists\, U^{(c)}(q^\alpha)$ "POTENZIALE POSIZIONALE" TALE CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE ATTIVE POSSA ESSERE ESPRESSA COME GRADIENTE DEL POTENZIALE $U^{(c)}$

$$\boxed{Q_\alpha^{(c)}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{(c)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U^{(c)}}{\partial x^{(i)k}}\, \underline{e}_k \cdot \frac{\partial x^{(i)z}}{\partial q^\alpha}\, \underline{e}_z =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U^{(c)}}{\partial x^{(i)k}} \frac{\partial x^{(i)z}}{\partial q^\alpha} \underbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_z}_{\delta_{kz}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U^{(c)}}{\partial x^{(i)k}} \frac{\partial x^{(i)k}}{\partial q^\alpha} =$$

$$= \boxed{\frac{\partial U^{(c)}}{\partial q^\alpha}}$$

DA CUI

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \boxed{Q_\alpha^{(c)} = \frac{\partial U^{(c)}}{\partial q^\alpha}}$$

DEFINENDO $\mathcal{L} = T + U^{(a)}$ AVREMO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE IN "FORMA CHIUSA"

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0$$

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE:

A) $\boxed{\text{SIA } \underline{F} = \text{COSTANTE}}$ ALLORA $\boxed{U = \underline{F}\cdot(P-O)}$ DOVE

P E' IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA.

INFATTI

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = \underline{F}\cdot\frac{\partial (P-O)}{\partial x^\alpha} = \underline{F}\cdot\underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}}_{\delta^\beta_\alpha}\underline{e}_\beta = \underline{F}\cdot\underline{e}_\alpha = F_\alpha$$

QUINDI

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\underline{e}_\alpha = F_\alpha \underline{e}_\alpha = \underline{F}.$$

ESEMPIO:

LA FORZA PESO AGENTE SUL BARICENTRO DI UN SISTEMA FISICO E' IL TIPICO ESEMPIO, PER CUI SE G E' IL BARICENTRO

$$\boxed{U = M\underline{g}\cdot(G-O)} \qquad \boxed{\underline{F} = m\underline{g}}$$

B) FORZA ELASTICA : $\boxed{\underline{F} = -k(P-O)}$ CHE AMMETTERA'

COME POTENZIALE $\boxed{U = -\frac{1}{2}k(P-O)^2}$ INFATTI

CALCOLIAMO:

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\cancel{2}}k\,\cancel{2}(P-O)\cdot\frac{\partial (P-O)}{\partial x^\alpha} =$$

$$= -k(P-O)\cdot\overbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}}^{\delta^\beta_\alpha}\underline{e}_\beta = -k(P-O)\cdot\underline{e}_\alpha = -kx^\alpha$$

QUINDI $\boxed{\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\underline{e}_\alpha} = -k\,x^\alpha\underline{e}_\alpha = \boxed{-k(P-O) = \underline{F}}$

C) FORZA CENTRIFUGA (SU UNA PARTICELLA DI MASSA m)

$$\boxed{\underline{F} = m\omega^2 (P - \bar{P})} \iff \boxed{U = \frac{1}{2} m\omega^2 (P - \bar{P})^2}$$

(DOVE $\bar{P}$ E' LA PROIEZIONE DI P SULL'ASSE DI ROTAZIONE)

CALCOLIAMO

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\cancel{2}} m\omega^2 \cancel{2} \cdot (P - \bar{P}) \cdot \frac{\partial (P - \bar{P})}{\partial x^\alpha} = m\omega^2 (P - \bar{P}) \cdot \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}}_{\delta^\beta_\alpha} \underline{e}_\beta =$$

$$= m\omega^2 (P - \bar{P}) \cdot \underline{e}_\alpha = m\omega^2 x^\alpha$$

DA CUI

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \underline{e}_\alpha} = m\omega^2 x^\alpha \underline{e}_\alpha = \boxed{m\omega^2 (P - \bar{P}) = \underline{F}}$$

D) FORZA DI TIPO CENTRALE:

$$\boxed{\underline{F} = f(\rho) \frac{(P - O)}{\rho}} \qquad \text{DOVE } \rho = |P - O| = \sqrt{x^\mu x^\mu}$$

$$\boxed{U = \int_0^\rho f(\rho)\, d\rho}$$

INFATTI CALCOLIAMO $\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} = f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^\mu x^\mu}} \cdot \cancel{2} x^\alpha = \frac{x^\alpha}{\rho} \qquad \text{DA CUI } \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = f(\rho) \frac{x^\alpha}{\rho}$$

QUINDI:
$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \underline{e}_\alpha = f(\rho) \frac{x^\alpha \underline{e}_\alpha}{\rho} = f(\rho) \frac{(P - O)}{\rho} = \underline{F}$$

NOTA: RICORDIAMO CHE IL POTENZIALE CONSERVATIVO È SEMPRE DEFINITO A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA QUINDI IN GENERALE

$$\boxed{U = \int f(\xi)\,d\xi + c}$$

2) SOLLECITAZIONI DERIVANTI DA UN "POTENZIALE GENERALIZZATO".

DEF. "DIREMO CHE UNA SOLLECITAZIONE $Q_\alpha^{(G)}$ DERIVA DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO SE E SOLO SE $\exists$ UNA FUNZ. SCALARE $U^{(G)} = U^{(G)}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ TALE CHE

$$\boxed{Q_\alpha^{(G)} = -\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial U^{(G)}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial U^{(G)}}{\partial q^\alpha} \right\}}$$

TEOREMA: C.N.S AFFINCHÉ UNA SOLLECITAZIONE Q_α DERIVI DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO È CHE:

1) U e Q_α SIANO AL PIÙ LINEARI NELLE $\dot{q}^\alpha$

A) $U = U_0(q^\alpha, t) + U_\alpha(q^\alpha, t)\,\dot{q}^\alpha$

B) $Q_\alpha = Q_{\alpha 0}(q^\alpha, t) + Q_{\alpha\beta}(q^\alpha, t)\,\dot{q}^\beta$

DOVE

2) $Q_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial U_\beta}{\partial q^\alpha} - \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial q^\beta} = -Q_{\beta\alpha}$

3) $Q_{\alpha 0} = \dfrac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} - \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial t}$

DOVRANNO INOLTRE VALERE LE DUE RELAZIONI

4) $$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial Q_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma.$$

5) $$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial Q_{\alpha 0}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial Q_{\beta 0}}{\partial q^\alpha}$$

NOI PROVEREMO SOLO UNA PARTE DEL TEOREMA!

QUINDI:

HP: Q_α DERIVA DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO

$$\exists\, U(q^\alpha, \dot q^\alpha, t) \ : \quad Q_\alpha = -\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \right\} \qquad (*)$$

TS: VALGONO LE RELAZIONI $1)_A$, $1)_B$, 2), 3), 4), 5)

DIM: SE VALE LA $(*)$ CON $Q_\alpha = Q_\alpha(q^k, \dot q^k, t)$

PONENDO $F_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha}$ $\Rightarrow$ $$\frac{d}{dt} F_\alpha(q^\beta, \dot q^\beta, t) = \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^\beta}\dot q^\beta + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot q^\beta}\ddot q^\beta + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}$$

DA CUI ESSENDO $F_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha}$ AVREMO:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\beta}\dot q^\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\ddot q^\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial t}$$

AVREMO QUINDI CHE:

$$-\left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\beta}\,\dot q^\beta + \underline{\underline{\frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}}}\,\ddot q^\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \right\} = Q_\alpha(q^u, \dot q^u,$$

QUESTA RELAZIONE È LECITA $\forall q^\beta$ (QUINDI $\forall \dot q^\beta$, e $\forall \ddot q^\beta$)

SE E SOLO SE IL SECONDO TERMINE

$$(**) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\,\ddot q^\beta = 0 \qquad \forall\, \ddot q^\beta.$$

IN QUANTO QUESTO È L'UNICO TERMINE CHE DIPENDERÀ DA $\ddot q^\beta$.

IL TERMINE (**) È IDENTICAMENTE NULLO SE E SOLO SE:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta} = 0}$$

QUINDI **NECESSARIAMENTE** IL POTENZIALE U DOVRÀ ESSERE LINEARE NELLE $\dot q^\alpha$, CIOÈ

$$\boxed{U = U_0(q^u, t) + U_\alpha(q^u, t)\,\dot q^\alpha} \qquad (1)_A$$

SE ADESSO **SFRUTTIAMO** QUESTO RISULTATO E RICALCOLIAMO LA (*) AVREMO:

i) $\dfrac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha} = U_\alpha(q^u, t)$

ii) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot q^\alpha} = \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial q^\beta}\,\dot q^\beta + \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial t}$

DA CUI CALCOLANDO LA RELAZIONE (*) AVREMO

iii) $\dfrac{\partial U}{\partial q^\alpha} = \dfrac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} + \dfrac{\partial U_\beta}{\partial q^\alpha}\,\dot q^\beta$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta - \frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \bar{U}_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{U}_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial q^\beta}\right)}_{Q_{\alpha\beta}}\dot{q}^\beta + \underbrace{\left(\frac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial t}\right)}_{Q_{\alpha 0}}$$

DA CUI:

$$\boxed{\begin{cases} Q_\alpha = Q_{\alpha 0}(q^\mu, t) + Q_{\alpha\beta}(q^\mu, t)\,\dot{q}^\beta & (1)_B \\[2ex] Q_{\alpha 0} = \dfrac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} - \dfrac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial t} & (3) \\[2ex] Q_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \bar{U}_\beta}{\partial q^\alpha} - \dfrac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial q^\beta} = -Q_{\beta\alpha} & (2) \end{cases}}$$

VERIFICHIAMO INFINE CHE VALGONO LE RELAZIONI 4) e 5)

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial^2 \bar{U}_\beta}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 \bar{U}_\alpha}{\partial q^\gamma \partial q^\beta}$$

$$\frac{\partial Q_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial^2 \bar{U}_\alpha}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} - \frac{\partial^2 \bar{U}_\gamma}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}$$

$$\frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \bar{U}_\gamma}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 \bar{U}_\beta}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma}$$

DA CUI BANALMENTE, UTILIZZANDO IL LEMMA DI SCHWARZ. AVREMO

$$\boxed{\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial Q_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad (4)}$$

ANALOGAMENTE CALCOLANDO LE QUANTITA'

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{U}_\beta}{\partial t\, \partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 \bar{U}_\alpha}{\partial t\, \partial q^\beta}$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha 0}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial q^\beta\, \partial q^\alpha} - \frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial q^\beta\, \partial t}$$

$$\frac{\partial Q_{\beta 0}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial q^\alpha\, \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 \bar{U}_\beta}{\partial q^\alpha\, \partial t}$$

DA CUI BANALMENTE AVREMO CHE' (VALENDO IL LEMMA DI SCHWARZ)

$$\boxed{\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial Q_{\alpha 0}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial Q_{\beta 0}}{\partial q^\alpha} \qquad (5)}$$

NOTA: VALE ANCHE IL VICEVERSA (CHE NOI NON DIMOSTREREMO)

E' POSSIBILE PROVARE IL VICEVERSA, CIOE' CHE SE ABBIAMO UN POTENZIALE ED UNA SOLLECITAZIONE DEFINITE DALLE (1) E VALGONO LE PROPRIETA' (2)-(5) ALLORA Q_α ED $\bar{U}$ SONO CONNESSE DALLA RELAZIONE (*)

$$Q_\alpha = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial q^\alpha}\right]$$

CIOE' LA SOLLECITAZIONE Q_α NASCE DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO.

GAUGE INVARIANZA DELLE SOLLECITAZIONI ASSOCIATE AD UN POTENZIALE GENERALIZZATO

CONSIDERIAMO UN POTENZIALE GENERALIZZATO $\bar{U}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ E LA SOLLECITAZIONE $Q_\alpha(q^k, \dot{q}^k, t)$ AD ESSO ASSOCIATA.

INTRODUCIAMO QUINDI UN NUOVO POTENZIALE $U^*(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ TALE CHE:

$$\boxed{U^* = \bar{U} + \frac{d}{dt} f(q^k, t)} \qquad (1)$$

E' PROVIAMO CHE $\Rightarrow$ $\boxed{Q^*_\alpha = Q_\alpha}$ "LE SOLLECITAZIONI SONO GAUGE INVARIANTI"

OSSERVIAMO CHE LA (1) POTRA' ESSERE DECOMPOSTA IN DUE **RELAZIONI** ESSENDO

$$\boxed{U^* = U^*_0 + U^*_\alpha \dot{q}^\alpha} \quad \text{ED} \quad \boxed{U = U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha}$$

AVREMO

$$U^*_0 + U^*_\alpha \dot{q}^\alpha = U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial t}$$

DA CUI

$$\left[U^*_0 - U_0 - \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \left[U^*_\alpha - U_\alpha - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\right] \dot{q}^\alpha = 0 \quad \forall \dot{q}^\alpha$$

DA CUI PER IL PRINCIPIO DI IDENTITA DEI POLINOMI

$$U^* = U_0 + \frac{d}{dt} f(q^k, t) \Rightarrow \begin{cases} U^*_0 = U_0 + \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ U^*_\alpha = U_\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{cases} \qquad (1\ \text{bis})$$

PROVIAMO ADESSO LA GAUGE INVARIANZA:

SE U^* ED U SONO POTENZIALI GENERALIZZATI AVREMO

$$Q^*_{\alpha 0} = \frac{\partial U^*_0}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial U^*_\alpha}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial U_0}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial t}\right)}_{Q_{\alpha 0}} + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^\alpha}\right)}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

(LEMMA DI SCHWARZ.)

$$\Rightarrow \boxed{Q^*_{\alpha 0} = Q_{\alpha 0}}$$

ANALOGAMENTE

$$Q^*_{\alpha\beta} = \frac{\partial U^*_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial U^*_\alpha}{\partial q^\beta} = \underbrace{\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial q^\beta}\right)}_{Q_{\alpha\beta}} + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\right)}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

(LEMMA DI SCHWARZ)

$$\Rightarrow \boxed{Q^*_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}}$$

QUINDI ESSENDO

$$Q^*_\alpha = Q^*_{\alpha 0} + Q^*_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta = Q_{\alpha 0} + Q_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta = Q_\alpha$$

CIOE' $\boxed{Q^*_\alpha = Q_\alpha}$

LE SOLLECITAZIONI SONO GAUGE INVARIANTI

— o —

"APPLICAZIONI SUI POTENZIALI GENERALIZZATI"

"<u>CAMPI ELETTROMAGNETICI</u>"

UN CAMPO ELETTROMAGNETICO PUO' ESSERE DESCRITTO IN MODO

ESAUSTIVO SE SI CONOSCONO I DUE POTENZIALI

$$\{\Phi, \vec{A}\}$$

Φ "POTENZIALE SCALARE" ; $\vec{A}$ "POTENZIALE VETTORE"

SE ADESSO, OSSERVIAMO CHE UN QUALSIASI POTENZIALE GENERALIZZATO PUO' ESSERE DESCRITTO INTRODUCENDO UN POTENZIALE SCALARE U_0 ED UN POTENZIALE VETTORE U_α, SOTTOLINEAMO CHE LA PROCEDURA DI CUI FAREMO USO E' DEL TUTTO GENERALE E POTRA' ESSERE ADOTTATA PER QUALSIVOGLIA POTENZIALE GENERALIZZATO.

INTRODUCENDO I DUE POTENZIALI Φ ED A_α DEFINIAMO

$$\boxed{U_0 = -q\Phi} \qquad \text{ED} \qquad \boxed{U_\alpha = \frac{q}{c} A_\alpha}$$

DOVE NEL CASO DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO ASSUMIAMO CHE

$$\begin{cases} q & \text{SIA LA CARICA ELEMENTARE} \\ c & \text{SIA LA VELOCITA DELLA LUCE.} \end{cases}$$

AVREMO COSI' (ESSENDO $q^\alpha = x^\alpha$ ED $\dot{q}^\alpha = v^\alpha$):

$$U = -q\Phi + \frac{q}{c} A_\alpha v^\alpha$$

SE QUINDI CALCOLIAMO LA SOLLECITAZIONE $Q_\alpha = Q_{\alpha 0} + Q_{\alpha\beta} v^\beta$

AVREMO:

$$Q_{\alpha 0} = \frac{\partial U_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} = -q \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} = q\left\{-\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\right\}$$

DA CUI DEFINENDO IL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ED IL CAMPO MAGNETICO:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

DA CUI $\boxed{Q_{\alpha 0} = q E_\alpha}$ ⇐ (FORZA DOVUTA AL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$)

ANALOGAMENTE

$$\boxed{Q_{\alpha\beta}} = \frac{\partial U_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right)$$

$$= \boxed{\frac{q}{c}\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \text{CON } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

DA CUI $\boxed{Q_{\alpha\beta} V^\beta = \frac{q}{c}(V \wedge B)_\alpha}$ ⇐ ("FORZA DI LORENTZ" DOVUTA AL CAMPO MAGNETICO)

LA SOLLECITAZIONE SARA' QUINDI DATA DA

$$\boxed{Q_\alpha = q\left\{E_\alpha + \frac{1}{c}(V \wedge B)_\alpha\right\}}$$

SE QUINDI CALCOLIAMO L'EQUAZIONE DI LAGRANGE PER UNA PARTICELLA CARICA SOGGETTA A UN CAMPO ELETTROMAGNETICO, AVREMO:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial V^\alpha} = \underbrace{m V_\alpha}_{P_\alpha} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial V^\alpha} = \frac{d}{dt} P_\alpha$$

P_α ⇐ IMPULSO

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = 0$$

DA CUI

$$\boxed{\frac{d}{dt} P_\alpha = q\left\{E_\alpha + \frac{1}{c}(V \wedge B)_\alpha\right\}}$$

⇐ [EQUAZIONE DEL MOTO PER UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO]

SE ADESSO VALUTIAMO LA $\boxed{\text{GAUGE INVARIANZA DEL CAMPO E. M.}}$

AVREMO

$$U_0^* = U_0 + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow -q\,\Phi^* = -q\,\Phi + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \Phi^* = \Phi - \frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$U_\alpha^* = U_\alpha + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \Rightarrow \frac{q}{c} A_\alpha^* = \frac{q}{c} A_\alpha + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \Rightarrow A_\alpha^* = A_\alpha + \frac{c}{q}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

DEFINENDO $\hat{f} = \frac{c}{q} f$ AVREMO LE USUALI RELAZIONI

$$\begin{cases} \Phi^* = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \\ A_\alpha^* = A_\alpha + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\alpha} \end{cases} \quad \forall \tilde{f}(q^k, t)$$

INOLTRE ESSENDO

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\alpha 0}^* = \mathcal{Q}_{\alpha 0} &\Rightarrow \\ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^* = \mathcal{Q}_{\alpha\beta} &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} \vec{E}^* = \vec{E} \\ \vec{B}^* = \vec{B} \end{cases}$$

INFINE SE VALUTIAMO LE DUE RELAZIONI 4) E 5)

AVREMO "LA 1ª COPPIA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL"

$$(4) \quad \frac{\partial \mathcal{Q}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \mathcal{Q}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{Q}_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathcal{Q}_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{Q}_{23}}{\partial x^1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_3}{\partial x^3} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (4)$$

$$(5) \quad \frac{\partial \mathcal{Q}_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Q}_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \mathcal{Q}_{\beta 0}}{\partial x^\alpha}$$

PER $\alpha = 1$ E $\beta = 2$ AVREMO

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_{12}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Q}_{10}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_{20}}{\partial x^1} \Rightarrow \frac{\cancel{q}}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} = \cancel{q}\left\{\frac{\partial E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^1}\right\}$$

$$\Rightarrow (\nabla \wedge E)_3 = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t}$$

ANALOGAMENTE CALCOLANDO LA (5) PER $(\alpha = 1 \quad \beta = 3)$ $(\alpha = 2, \beta = 3)$

AVREMO L'EQUAZIONE VETTORIALE

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (5)$$

DA CUI LA 1ª COPPIA DI EQUAZIONI DI MAXWELL.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

"POTENZIALE GENERALIZZATO ASSOCIATO ALLE FORZE APPARENTI"

NEL CASO DELLE "FORZE APPARENTI" SAPPIAMO CHE PER UNA PARTICELLA DI MASSA m

$$Q_\alpha^{(APP)} = \left[-m \underline{a}_\tau - m \underline{a}_c \right] \cdot \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} =$$

$$-m \left[\underline{a}_\tau + \underline{a}_c \right] \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \underline{e}_\beta = -m \left[\underline{a}_\tau + \underline{a}_c \right] \cdot \underline{e}_\alpha$$

$$= -m \left[\underline{a}_\tau + \underline{a}_c \right]_\alpha$$

⇐ SOLLECITAZIONE ASSOCIATA ALLE "FORZE APPARENTI", DI TRASCINAMENTO E DI CORIOLIS

RICORDIAMO DALLA TEORIA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI CHE

$$\underline{V}_\tau(P) = \underline{V}_\tau(O) + \underline{\omega} \wedge (P - O) \qquad \text{DA CUI DERIVANDO}$$

$$\boxed{\underline{a}_\tau(P) = \underline{a}_\tau(O) + \dot{\underline{\omega}} \wedge (P - O) + \underline{\omega} \wedge \left[\underline{\omega} \wedge (P - O) \right]}$$

(ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO)

ANALOGAMENTE

$$\boxed{\underline{a}_c(P) = 2\, \underline{\omega} \wedge \underline{V}_\tau}$$

⇐ (ACCELERAZIONE DI CORIOLIS)

DA CUI CI ASPETTIAMO CHE

$$\boxed{\begin{cases} Q_\alpha^{(APP)} = -m(\underline{a}_\tau + \underline{a}_c)\cdot \underline{e}_\alpha \\ \underline{a}_\tau = \underline{a}_O + \dot{\underline{\omega}}\wedge(P-O) + \underline{\omega}\wedge[\underline{\omega}\wedge(P-O)] \\ \underline{a}_c = 2\underline{\omega}\wedge\underline{V}_\tau \end{cases}} \quad (*)$$

SE ADESSO INTRODUCIAMO IL POTENZIALE:

$$\boxed{U = \underline{K}_O\cdot\underline{\omega} - m\,\underline{a}_O\cdot(P-O) + \frac{1}{2}m[\underline{\omega}\wedge(P-O)]^2} \quad (**)$$

CON $\underline{K_O = (P-O)\wedge m\underline{V}_\tau}$ "MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO"

PROVIAMO CHE QUESTO E' IL POTENZIALE GENERALIZZATO

ASSOCIATO ALLE FORZE APPARENTI

CIOE' PROVIAMO CHE:

$$Q_\alpha^{(APP)} = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\right]$$

SE ADESSO CONSIDERIAMO IL TERMINE $\underline{K}_O\cdot\underline{\omega}$ DA UNA PERMUTAZIONE CICLICA AVREMO

$$\boxed{\underline{K}_O\cdot\underline{\omega}} = [(P-O)\wedge m\underline{V}_\tau]\cdot\underline{\omega} =$$

$$= [\underline{\omega}\wedge(P-O)]\cdot m\underline{V}_\tau = [m\underline{V}_\tau\wedge\underline{\omega}]\cdot(P-O) =$$

$$\boxed{= -m[\underline{\omega}\wedge\underline{V}_\tau]\cdot(P-O)}$$

QUINDI LA (**) POTRA' RISCRIVERSI NELLA FORMA

$$U = -m[\underline{\omega}\wedge\underline{V}_\tau]\cdot(P-O) - m\,\underline{a}_O\cdot(P-O) + \frac{1}{2}m[\underline{\omega}\wedge(P-O)]^2$$

CALCOLIAMO QUINDI LA QUANTITA'

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m\left[\underline{\omega}\wedge\frac{\partial \dot{x}^\beta \underline{e}_\beta}{\partial \dot{x}^\alpha}\right]\cdot(P-O) = -m[\underline{\omega}\wedge\underline{e}_\alpha]\cdot(P-O) =$$

DA CUI PERMUTANDO CICLICAMENTE

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m\left[(P-O)\wedge \underline{\omega}\right]\cdot \underline{e}_\alpha = m\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]\cdot \underline{e}_\alpha$$

SE ADESSO CALCOLIAMO LA DERIVATA TEMPORALE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} = m\left[\dot{\underline{\omega}}\wedge(P-O)\right]\cdot \underline{e}_\alpha + \left[m\,\underline{\omega}\wedge \underline{v}_r\right]\cdot \underline{e}_\alpha \qquad (***)$$

CALCOLIAMO ADESSO LA QUANTITA'

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = -m\left[\underline{\omega}\wedge \underline{v}_r\right]\cdot \frac{\partial(P-O)}{\partial x^\alpha} - m\,\underline{a}_0\cdot\frac{\partial(P-O)}{\partial x^\alpha}$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}\,m\,\cancel{2}\left[\omega\wedge(P-O)\right]\cdot\left[\omega\wedge\frac{\partial(P-O)}{\partial x^\alpha}\right]$$

MA $\dfrac{\partial(P-O)}{\partial x^\alpha} = \overbrace{\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}}^{\delta^\beta_\alpha}\,\underline{e}_\beta = \underline{e}_\alpha$ DA CUI:

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = -m\left[\underline{\omega}\wedge \underline{v}_r\right]\cdot \underline{e}_\alpha - m\,\underline{a}_0\cdot \underline{e}_\alpha +$$

$$+\,m\,\underbrace{\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]\cdot\left[\underline{\omega}\wedge \underline{e}_\alpha\right]}_{(1*)}$$

SCRIVIAMO IL TERMINE (1*) IN ALTRO MODO

$$m\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]\cdot\left[\underline{\omega}\wedge \underline{e}_\alpha\right] = m\left[\underset{a}{\underline{\omega}}\wedge \underset{b}{\underline{e}_\alpha}\right]\cdot\underbrace{\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]}_{c}$$

$$= m\left\{\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]\wedge\underline{\omega}\right\}\cdot \underline{e}_\alpha$$

$$= -m\left\{\underline{\omega}\wedge\left[\omega\wedge(P-O)\right]\right\}\cdot \underline{e}_\alpha$$

Da cui riscriviamo la quantità $\partial U/\partial x^\alpha$ nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = -m\left\{\underline{\omega}\wedge \underline{v}_r + \underline{a}_0 + \underline{\omega}\wedge[\omega\wedge(P-O)]\right\}\cdot \underline{e}_\alpha \qquad (***)$$

Utilizzando quindi le relazioni (**) e (***)

Avremo

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = -m\left\{\underline{\dot\omega}\wedge(P-O) + \underline{\omega}\wedge\underline{v}_r + \right.$$

$$\left. + \underline{\omega}\wedge \underline{v}_r + \underline{a}_0 + \underline{\omega}\wedge[\omega\wedge(P-O)]\right\}\cdot\underline{e}_\alpha$$

$$= -m\left\{\underline{\dot\omega}\wedge(P-O) + 2(\underline{\omega}\wedge v_r) + \underline{a}_0 + \omega\wedge[\underline{\omega}\wedge(P-O)]\right\}\cdot\underline{e}_\alpha$$

$$= -m\left\{\underbrace{\underline{a}_0 + \underline{\dot\omega}\wedge(P-O) + \underline{\omega}\wedge[\underline{\omega}\wedge(P-O)]}_{\underline{a}_\tau} + \underbrace{2\underline{\omega}\wedge\underline{v}_r}_{\underline{a}_c}\right\}\cdot\underline{e}_\alpha$$

$$= -m[\underline{a}_\tau + \underline{a}_c]\cdot\underline{e}_\alpha = Q_\alpha^{(APP)}$$

Da cui:

$$\boxed{Q_\alpha^{(APP)} = -\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\right\}}$$

Cioè la (**) è proprio l'espressione del potenziale generalizzato associato alle forze apparenti c.v.d.

NOTA: osserviamo che il termine $\vec{K}_0\cdot\underline{\omega}$ è il termine di potenziale che da una parte ci dà la forza di Coriolis $\underline{F}_c = m[2\underline{\omega}\wedge\underline{v}_r]$ ma in generale ci fornisce anche il termine "non uniforme" $-m\underline{\dot\omega}\wedge(P-O)$ presente nella accelerazione di trascinamento $\underline{a}_\tau$.

Nel caso in cui $\underline{\dot\omega}=0$ (caso uniforme) allora $\underline{K}_0\cdot\underline{\omega}$ è il potenziale associato esclusivamente alla forza di Coriolis

OSSERVIAMO INOLTRE CHE GLI ALTRI DUE TERMINI DEL POTENZIALE

1) $-m\,\underline{a}_0\cdot(P-O)$ $\Rightarrow$ È ASSOCIATO AL TERMINE DELLA FORZA DI TRASCINAMENTO CHE DIPENDE DA $\underline{a}_0=\ddot{O}$ CHE È L'ACCELERAZIONE DEL RIFERIMENTO NON INERZIALE (VEDI TEOREMA DI CORIOLIS)

2) $\frac{1}{2}m\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]^2$ $\Rightarrow$ È UN ALTRO MODO DI SCRIVERE IL POTENZIALE ASSOCIATO ALLA FORZA CENTRIFUGA

INFATTI SE CONSIDERIAMO IL PUNTO $\bar{P}$ COME LA PROIEZIONE DI P SULL'ASSE DI ROTAZIONE ESSENDO $\underline{\omega}$ DIRETTO LUNGO TALE ASSE DI ROTAZIONE AVREMO

$$\frac{1}{2}m\left[\omega\wedge(P-O)\right]^2=\frac{1}{2}m\Big[\underline{\omega}\wedge(P-\bar{P})+\underbrace{\omega\wedge(\bar{P}-O)}_{=0 \;\; \underline{\omega}\uparrow\uparrow(\bar{P}-O)}\Big]^2=$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\underline{\omega}\wedge(P-\bar{P})\right]^2=\frac{1}{2}m\left[\underline{\omega}\wedge(P-\bar{P})\right]\cdot\left[\underline{\omega}\wedge(P-\bar{P})\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\Big\{\underbrace{\left[\underline{\omega}\wedge(P-\bar{P})\right]\wedge\underline{\omega}}_{(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega})(P-\bar{P})-\cancel{\left[\underbrace{(P-\bar{P})\cdot\omega}_{=0 \;\; (P-\bar{P})\perp\underline{\omega}}\right]\underline{\omega}}}\Big\}\cdot(P-\bar{P})=\frac{1}{2}m(\omega)^2(P-\bar{P})\cdot(P-\bar{P})$$

QUINDI AVREMO L'USUALE ESPRESSIONE DEL POTENZIALE CENTRIFUGO

$$\frac{1}{2}m\left[\underline{\omega}\wedge(P-O)\right]^2=\frac{1}{2}m\,\omega^2(P-\bar{P})^2$$

FINE NOTA.

INFINE OSSERVIAMO CHE IL POTENZIALE DELLE FORZE APPARENTI POTRA' ESSERE ESPRESSO NELLA FORMA

$$V^{(APP)} = T_a - T_R + \frac{d f(q^k, t)}{dt}$$

DOVE

$T_a \Rightarrow$ "ENERGIA CINETICA NEL RIFERIMENTO ASSOLUTO"

$T_R \Rightarrow$ "ENERGIA CINETICA NEL RIFERIMENTO RELATIVO".

RICORDANDO CHE $\underline{v}_a = \underline{v}_\tau + \underline{v}_R$ CALCOLIAMO LA QUANTITA'

$$T_a - T_R = \frac{1}{2} m (v_a)^2 + \frac{1}{2} m (v_R)^2 = \frac{1}{2} m (\underline{v}_\tau + \underline{v}_R)^2 - \frac{1}{2} m (v_R)^2$$

$$= \frac{1}{2} m\, \underline{v}_\tau \cdot \underline{v}_\tau + m\, \underline{v}_\tau \cdot \underline{v}_R$$

DOVE $\underline{v}_\tau = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (P-O)$

QUINDI

$$\underline{v}_\tau \cdot \underline{v}_\tau = [\underline{v}_O + \omega \wedge (P-O)] \cdot [\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (P-O)] =$$

$$= v_O^2 + 2\, \underline{v}_O \cdot [\underline{\omega} \wedge (P-O)] + [\omega \wedge (P-O)]^2$$

$$\underline{v}_\tau \cdot \underline{v}_R = [\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (P-O)] \cdot \underline{v}_R = \underline{v}_O \cdot \underline{v}_R + [\underline{v}_R \wedge \underline{\omega}] \cdot (P-O)$$

$$= \underline{v}_O \cdot \underline{v}_R - [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_R] \cdot (P-O)$$

DA CUI:

$$T_a - T_R = -m [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_R] \cdot (P-O) + \frac{1}{2} m [\omega \wedge (P-O)]^2$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} m v_O^2 + m\, \underline{v}_O \cdot [\underline{\omega} \wedge (P-O)] + m\, \underline{v}_O \cdot \underline{v}_R \right\}$$

SOMMIAMO E SOTTRAIAMO IL TERMINE $-m\, \underline{a}_O \cdot (P-O)$ ED OTTENIAMO:

$$T_a - T_R = -m [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_R] \cdot (P-O) - m\, \underline{a}_O \cdot (P-O) + \frac{1}{2} m [\underline{\omega} \wedge (P-O)]^2$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} m v_O^2 + m\, \underline{a}_O \cdot (P-O) + m\, \underline{v}_O \cdot \underline{v}_R + m\, \underline{v}_O \cdot [\underline{\omega} \wedge (P-O)] \right\}$$

LA SOMMA DEI PRIMI TRE TERMINI CI FORNISCE IL POTENZIALE (20)

$U^{(APP)}$ DA CUI:

$$T_a - T_2 = U^{(APP)} + \left\{ \frac{1}{2} m v_0^2 + m \underline{a}_0 \cdot (P-O) + m \underline{V}_0 \cdot \underline{V}_R + \right.$$

$$\left. + m \underline{V}_0 \cdot [\omega \wedge (P-O)] \right\}$$

PER LA GAUGE INVARIANZA DEL POTENZIALE $U^{(APP)}$

POSSIAMO SCRIVERE

$$U^{(APP)} = \frac{d_R f(q^h, t)}{dt} + T_a - T_2 - \left\{ \frac{1}{2} m v_0^2 + m \underline{a}_0 \cdot (P-O) + \right.$$

$$\left. + m \underline{V}_0 \cdot \underline{V}_R + m \underline{V}_0 \cdot [\underline{\omega} \wedge (P-O)] \right\}$$

(*)

PROVIAMO ADESSO CHE LA QUANTITA ENTRO PARENTESI (*)

PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA

$\dfrac{d_R \hat{f}}{dt}$. CON UNA OPPORTUNA SCELTA DELLA $\hat{f}$

DEFINIAMO QUINDI:

$$\hat{f} = -\frac{1}{2} m \int v_0^2 \, dt - m \underline{V}_0 \cdot (P-O)$$

DA CUI DERIVANDO

$$\frac{d_R \hat{f}}{dt} = -\frac{1}{2} m v_0^2 - m \frac{d_R \underline{v}_0}{dt} \cdot (P-O) - m \underline{V}_0 \cdot \underline{V}_R$$

OSSERVIAMO CHE:

1) $\underline{V}_0 \Rightarrow$ VELOCITA' DELL'ORIGINE DEL RIF. RELATIVO RISPETTO AD UN OSSERVATORE NEL RIF. ASSOLUTO INERZIALE

2) $\dfrac{d_R \underline{v}_0}{dt} \Rightarrow$ DERIVATA TEMPORALE NEL RIFERIMENTO RELATIVO DI UN VETTORE VO VALUTATO RISPETTO AL RIFERIMENTO ASSOLUTO.

SAPPIAMO CHE IN GENERALE

$$\frac{d_a \underline{v}_o}{dt} = \frac{d_R \underline{v}_o}{dt} + \underline{\omega} \wedge \underline{v}_o$$

INOLTRE **da** $\frac{d_a \underline{v}_o}{dt} = \underline{a}_o \Rightarrow$ "ACCELERAZIONE ASSOLUTA DELL'ORIGINE DEL RIF. RELATIVO RISPETTO AL RIF. "ASSOLUTO" INERZIALE.

DA CUI $\frac{d_R \underline{v}_o}{dt} = \underline{a}_o - \underline{\omega} \wedge \underline{v}_o$

QUINDI IL TERMINE:

$$-m \frac{d_R \underline{v}_o}{dt} \circ (P-O) = -m\, \underline{a}_o \circ (P-O) + m \left[\underline{\omega} \wedge \underline{v}_o \right] \circ (P-O)$$

$$= -m\, \underline{a}_o \circ (P-O) + m \left[(P-O) \wedge \underline{\omega} \right] \circ \underline{v}_o =$$

$$= -m\, \underline{a}_o \circ (P-O) - m \left[\underline{\omega} \wedge (P-O) \right] \circ \underline{v}_o$$

DA CUI:

$$\frac{d_R \hat{f}}{dt} = -\frac{1}{2} m\, v_o^2 - m\, \underline{a}_o \circ (P-O) - m\, \underline{v}_o \circ \underline{v}_R - m\, \underline{v}_o \circ \left[\underline{\omega} \wedge (P-O) \right]$$

DA CUI $\quad U^{APP} = T_a - T_R + \frac{d_R f(q^h, t)}{dt} + \frac{d_R \hat{f}}{dt}$

ESSENDO f ARBITRARIA POSSIAMO RIDEFINIRE UNA FUNZIONE ARBITRARIA $\hat{\hat{f}} = f + \hat{f}$ ED OTTENERE

$$\boxed{U^{APP} = T_a - T_R + \frac{d_R \hat{\hat{f}}}{dt}} \qquad \forall\, \hat{\hat{f}} = \hat{\hat{f}}(q^h, t)$$

EQUAZIONI DIFF., PER LE FORZE APPARENTI, EQUIVALENTI ALLE EQUAZIONI DI MAXWELL.

ABBIAMO VISTO CHE PER UN QUALSIASI POTENZIALE GENERALIZZATO DEVONO VALERE LE ~~[illegible]~~ RELAZIONI.

4) $$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial Q_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha}} = 0 \qquad \alpha \neq \gamma,\ \alpha \neq \beta,\ \gamma \neq \beta$$

5) $$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial Q_{\alpha 0}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial Q_{\beta 0}}{\partial q^{\alpha}}$$

CHE, NEL CASO DI UN CAMPO ELETTROMAGNETICO, QUESTE CI DANNO LA 1ª COPPIA DI EQUAZIONI DI MAXWELL

(*) $$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

CI CHIEDIAMO QUALI SIANO LE EQUAZIONI DIFF. CHE SI POSSONO OTTENERE DALLE 4) E 5) (CORRISPONDENTI ALLA 1ª COPPIA DI EQUAZIONI DI MAXWELL) NEL CASO DELLE FORZE APPARENTI.

PER FAR QUESTO POSSIAMO UTILIZZARE DUE DIVERSE STRATEGIE.

1) 1ª STRATEGIA: CALCOLARE LE QUANTITÀ $Q_{\alpha 0}$, $Q_{\alpha\beta}$ NEL CASO DELLE FORZE APPARENTI ED UTILIZZARE LE RELAZIONI 4) E 5) PER IL CALCOLO.

2) 2ª STRATEGIA: VALUTARE QUALE SIANO I VETTORI EQUIVALENTI AD $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ NEL CASO DELLE FORZE APPARENTI ED UTILIZZARE LE RELAZIONI (*). (QUESTA STRATEGIA È PIÙ SEMPLICE NEI CALCOLI)

ADOPERIAMO QUINDI QUESTA IIª STRATEGIA PER IL CALCOLO A CUI SIAMO INTERESSATI.

DAL MOMENTO CHE LA PROCEDURA ADOTTATA NEL CASO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO È DEL TUTTO GENERALE, CON L'INTRODUZIONE DI UN CAMPO SCALARE U_0 E DI UN CAMPO VETTORIALE U_α ($U_0 = -q\Phi$, $U_\alpha = \frac{q}{c} A_\alpha$) POSSIAMO CONFRONTARE LE SOLLECITAZIONI OTTENUTE SIA NEL CASO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO AGENTE SU UNA PARTICELLA CARICA, CHE DELLE FORZE APPARENTI AGENTI **SU UNA** SINGOLA PARTICELLA DI MASSA m, DEDUCENDO DA TALE CONFRONTO I VETTORI "CORRISPONDENTI" AL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ED AL CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$, NEL CASO DELLE FORZE APPARENTI.

SE QUINDI RISCRIVIAMO:

$$Q_\alpha^{(APP)} = -m a^\tau_\alpha - m a^c_\alpha$$

$$Q_\alpha^{(E.M)} = qE_\alpha + \frac{q}{c}(v \wedge B)_\alpha$$

EGUAGLIANDO QUESTE **ESPRESSIONI OTTERREMO:**

$$qE_\alpha - \frac{q}{c}(\underline{B} \wedge \underline{v})_\alpha = -m a^\tau_\alpha - m(2\underline{\omega} \wedge \underline{V})_\alpha$$

DA CUI AVREMO: $qE_\alpha = -m a^\tau_\alpha \Rightarrow \boxed{\underline{E} = -\frac{m}{q}\underline{a}^\tau}$

$$-\frac{q}{c}\vec{B} = -2m\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\underline{B} = \frac{2mc}{q}\underline{\omega}}$$

QUINDI IN CORRISPONDENZA DELLE 2 EQUAZ. DI MAXWELL

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{2mc}{q}\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\cancel{m}}{\cancel{q}}(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}^\tau) = -\frac{1}{\cancel{c}}\frac{2\cancel{mc}}{\cancel{q}}\dot{\vec{\omega}}$$

DA CUI LE DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{\omega} = 0} \qquad \boxed{\underline{\nabla}\wedge\underline{a}^\tau = 2\dot{\underline{\omega}}}$$

VERIFICHIAMO ADESSO CHE QUESTE DUE EQUAZIONI SONO CORRETTE

A) LA 1ª EQUAZIONE È CERTAMENTE CORRETTA IN QUANTO $\underline{\omega}$ NON DIPENDE DALLE COORDINATE, QUINDI

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega} = 0$$

B) VERIFICHIAMO LA RELAZIONE $\boxed{\underline{\nabla} \wedge \underline{a}^{t} = 2\dot{\underline{\omega}}}$

RICORDIAMO CHE

$$\underline{a}_t = \underline{a}_0 + \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) + \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge (P-O)]$$

CALCOLIAMO INIZIALMENTE

$$\boxed{\frac{\partial a^t_k}{\partial x^j}} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \underline{a}_{0k} + \varepsilon_{k\ell s} \dot{\omega}_\ell x_s + \varepsilon_{k\ell s} \underbrace{[\omega \wedge (P-O)]_s}_{\varepsilon_{sen} \omega_e x_n} \omega_\ell \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ a_{0k} + \varepsilon_{k\ell s} \dot{\omega}_\ell x_s + \varepsilon_{k\ell s} \varepsilon_{sen} \omega_e \omega_\ell x_n \right\}$$

$$= \cancel{\frac{\partial a_{0k}}{\partial x^j}} + \varepsilon_{k\ell s} \dot{\omega}_\ell \underbrace{\frac{\partial x_s}{\partial x^j}}_{\delta_{sj}} + \underbrace{\varepsilon_{k\ell s}}_{-\varepsilon_{ks\ell} = \varepsilon_{sk\ell}} \varepsilon_{sen} \omega_e \omega_\ell \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial x^j}}_{\delta_{nj}} =$$

(a_{0k} NON DIPENDE DALLE COORDINATE)

$$= \varepsilon_{k\ell j} \dot{\omega}_\ell + \underbrace{\varepsilon_{sk\ell} \varepsilon_{sej}}_{2\delta_{k[e}\delta_{j]\ell} = (\delta_{ke}\delta_{j\ell} - \delta_{kj}\delta_{e\ell})} \omega_e \omega_\ell =$$

$$= \varepsilon_{k\ell j} \dot{\omega}_\ell + (\delta_{ke}\delta_{j\ell} - \delta_{kj}\delta_{e\ell}) \omega_e \omega_\ell =$$

$$\boxed{= \varepsilon_{k\ell j} \dot{\omega}_\ell + \omega_k \omega_j - \omega^2 \delta_{kj} = \frac{\partial a^t_k}{\partial x^j}} \quad (*)$$

SE ADESSO CALCOLIAMO PER COMPONENTI L'EQUAZIONE

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{a}^t = 2\,\dot{\underline{\omega}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \wedge \underline{a}^t = \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^t_k}{\partial x^j} \right) \underline{e}_i$$

DA QUI DOVREMO VERIFICARE PER COMPONENTI CHE È VERA LA RELAZIONE

$$\boxed{i = 1, 2, 3} \qquad \boxed{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^t_k}{\partial x^j} = 2\,\dot{\omega}_i} \qquad (1*)$$

VEDIAMO SE È VERA LA (1*)

SFRUTTANDO LA ($\tilde{*}$) AVREMO

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^t_k}{\partial x^j} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\underbrace{-\varepsilon_{ikj}}_{\varepsilon_{kij}}} \varepsilon_{klj}\,\dot{\omega}_l + \underbrace{\cancel{\varepsilon_{ijk}\,\omega_k \omega_j}}_{0} - \omega^2 \underbrace{\cancel{\varepsilon_{ijk}\,\delta_{kj}}}_{0}$$

(CORRISPONDENTE AL PRODOTTO $\underline{\omega} \wedge \underline{\omega} = 0$)

(PER LE PROPRIETÀ DI ε_{ijk})

DA QUI

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^t_k}{\partial x^j} = \underbrace{\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klj}}_{2\delta_{i[l}\delta_{j]j} = (\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{lj})} \dot{\omega}_l = (\delta_{il}\underbrace{\delta_{jj}}_{3} - \delta_{ij}\delta_{lj})\,\dot{\omega}_l$$

$$= 3\,\dot{\omega}_i - \dot{\omega}_i = 2\,\dot{\omega}_i$$

ESSENDO QUINDI VERIFICATA LA (1*) ALLORA È VERIFICATA LA II^a EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{a}^t = 2\,\dot{\underline{\omega}}$$

SE QUINDI CONSIDERIAMO SOLO FORZE CONSERVATIVE

E FORZE DERIVANTI DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(C)} + Q_\alpha^{(G)}$$

CON:
$$\begin{cases} Q_\alpha^{(C)} = \dfrac{\partial U^{(C)}}{\partial q^\alpha} \\[2ex] Q_\alpha^{(G)} = -\left\{ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U^{(G)}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \dfrac{\partial U^{(G)}}{\partial q^\alpha} \right] \end{cases}$$

POTREMO DEF. LA "LAGRANGIANA GENERALIZZATA"

$$\mathcal{L} = T + U^{(C)} + U^{(G)}$$

E SCRIVERE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE IN FORMA CHIUSA

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0$$

IN PRESENZA ANCHE DI SOLLECITAZIONI NON CONSERVATIVE $Q_\alpha^{(N.C)}$

AVREMO, NEL CASO GENERALE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(N.C)}$$

NOTA: NEL CASO DI UN POTENZIALE GENERALIZZATO

$U^{(G)} = U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha$ SE DOVESSE ACCADERE CHE $U_\alpha = 0$

AVREMO CHE $U^{(G)} = U_0(q^\alpha, t)$ [SE NON VI È UNA DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO $U_0 = U_0(q^\alpha)$] IN QUESTO CASO

U_0 ASSUME IL RUOLO DI UN POTENZIALE CONSERVATIVO ESSENDO

$$Q_\alpha^{G} = \frac{\partial U_0}{\partial q^\alpha}$$