PROBLEMA A DUE CORPI

CONSIDERIAMO LA LAGRANGIANA

ENERGIA POTENZIALE

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_2^2 - V(|z_1 - z_2|) \qquad (1)$$

DEFINENDO IL BARICENTRO DEL SISTEMA

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2} m_i (P_i - O) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2} m_i \underline{z}_i$$

PONIAMO L'ORIGINE DEL NOSTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO NEL BARICENTRO

ASSUMENDO $G = O$ DA CUI.

$$m_1 \underline{z}_1 + m_2 \underline{z}_2 = 0$$

CONSIDERIAMO QUINDI IL SISTEMA

$$\begin{cases} \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z} \\ m_1 \underline{z}_1 + m_2 \underline{z}_2 = 0 \end{cases}$$

DA CUI RISOLVENDO CON CRAMER (COMPONENTE PER COMPONENTE) AVREMO

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_1 + m_2 \qquad \text{DA CUI}$$

$$\underline{z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{z} & -1 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{z} \; ; \qquad \underline{z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \underline{z} \\ m_1 & 0 \end{vmatrix}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \underline{z}$$

DA CUI SOSTITUENDO NELLA (1) AVREMO.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\underline{z}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\underline{z}}^2 - V(|\underline{z}|)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - V(|\underline{z}|)$$

CON $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ "MASSA RIDOTTA"

ESSENDO

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - V(r)$$

AVREMO CHE LA LAGRANGIANA E' SIMMETRICA PER ROTAZIONI ATTORNO A QUALSIASI ASSE QUINDI SI CONSERVA IL MOMENTO ANGOLARE

$$M = \underline{r} \wedge \underline{p} = \text{COSTANTE}$$

DEL SISTEMA.

DATO CHE $\underline{r} \perp M$ ALLORA $\underline{r}$ DEVE ESSERE COSTANTEMENTE ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DI $\underline{M}$, QUINDI IL MOTO E' UN MOTO PIANO. DA CUI PONENDO $\underline{M} \equiv (0, 0, M_z)$

$\underline{r} = [x, y, 0]$ QUINDI SI TRATTA DI STUDIARE IL MOTO PIANO DEL TIPO:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$$

CHE IN COORDINATE POLARI $\begin{cases} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi. \end{cases}$

AVRA' COME LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r) \qquad (1)$$

E COME HAMILTONIANA

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r) \qquad (2)$$

VEDIAMO SUBITO CHE φ E' UNA VARIABILE CICLICA DA CUI

$$(3) \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = M_z = M \text{ COSTANTE DEL MOTO}$$

COMPONENTE Z DEL MOMENTO ANGO

$M_z = x p_y - y p$

DA CUI PONENDO $\dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}$ (4) POSSIAMO CALCOLARE L'ENERGIA NELLA FORMA

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \cdot \left(\frac{M}{m r^2} \right)^2 + V(r)$$

DA CUI:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (5)$$

UTILIZZANDO LA (2) ED IL METODO DI HAMILTON-JACOBI AVREMO:

$$(6) \qquad \varphi = \int \frac{M/r^2}{\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}}\, dr + \beta_1$$

$$(7) \qquad t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r)\right] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}\, dr + \beta_2$$

DOVE β_1 E β_2 SONO DETERMINATI UNA VOLTA FISSATE LE CONDIZIONI INIZIALI.

$\boxed{\text{STUDIO QUALITATIVO DEL MOTO}}$

NOTA:

DALLA (4) $\quad \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2} \neq 0 \quad$ (TRANNE QUANDO $M=0$)

DEDUCIAMO CHE $\dot{\varphi} \neq 0$ QUINDI $\dot{\varphi}$ NON CAMBIA MAI SEGNO. (CIOÈ NON CI SONO PUNTI DI INVERSIONE PER φ)

DALLA (5) AVREMO:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - \left[V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \right] \geq 0 \qquad (8)$$

QUANDO $\dot{r} = 0$ ALLORA $\dot{r}$ CAMBIA SEGNO E AVREMO UN "PUNTO DI SVOLTA" DELLA TRAIETTORIA IN CORRISPONDENZA DEL QUALE $r(t)$ DA CRESCENTE DIVENTA DECRESCENTE (O VICEVERSA). IN QUESTO CASO AVREMO PER $\dot{r} = 0$

$$E = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

IL TERMINE $\dfrac{M^2}{2mr^2}$ VIENE CHIAMATO "ENERGIA CENTRIFUGA"

VEDIAMO CHE

$$\lim_{r \to 0} \frac{M^2}{2mr^2} = +\infty$$

QUESTO TERMINE (QUANDO $M \neq 0$) RENDE "GENERALMENTE" IMPOSSIBILE LA PENETRAZIONE DELLE PARTICELLE VERSO IL CENTRO DEL CAMPO.

IN GENERALE DALLA DISEGUAGLIANZA (8) AVREMO.

$$E - V(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0 \Rightarrow r^2 V(r) + \frac{M^2}{2m} < E r^2$$

QUINDI PER $r \to 0$ DOVRA' ACCADERE CHE

$$r^2 V(r)\Big|_{r \to 0} < -\frac{M^2}{2m}$$

CIOE' AVREMO CHE (PERCHE' $r \to 0$) DOVREMO AVERE CHE

$$\lim_{r \to 0} V(r) = -\infty \qquad \text{ESSENDO} \qquad V(r) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{r^2} & \text{CON } \alpha > \dfrac{M^2}{2m} \\ -\dfrac{1}{r^n} & \text{CON } n > 2 \end{cases}$$

SE QUINDI ESCLUDIAMO QUESTE CIRCOSTANZE AVREMO UN $r_{MIN} \neq 0$, CIOE' DUE POSSIBILI CASI:

A) r VARIA IN MODO DA SODDISFARE LA CONDIZIONE

$r \geq r_{MIN}$

IN QUESTO CASO SI PARLA DI "MOTO INFINITO" CIOE' LA PARTICELLA VIENE DALL'∞ E TORNA ALL'∞.

B) $r_{MIN} \leq r \leq r_{MAX}$ IN QUESTO CASO SI PARLA DI "MOTO FINITO", CIOE' LA TRAIETTORIA E' LIMITATA ALL'INTERNO DI UNA CORONA CIRCOLARE LIMITATA DALLE DUE CIRCONFERENZE DI RAGGIO r_{MIN} ~~E~~ A r_{MAX}.
QUESTO NON VUOL DIRE CHE LA TRAIETTORIA SIA NECESSARIAMENTE UNA CURVA CHIUSA, MA NELL'INTERVALLO DI TEMPO IN CUI

r VARIA DA r_{max} A r_{min} E DI NUOVO A r_{max} IL RAGGIO VETTORE r RUOTERA' DI UN ANGOLO $\Delta\varphi$ DATO DALLA RELAZIONE

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(M/r^2)}{\sqrt{2m\left[E-V(r)\right]-\frac{M^2}{r^2}}}\,dr \qquad (9)$$

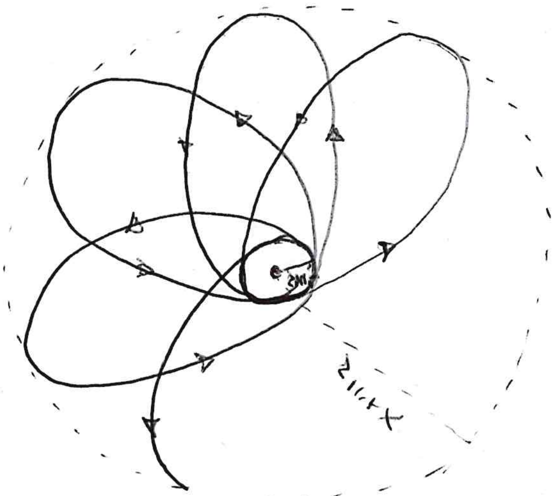
AFFINCHE' LA TRAIETTORIA SIA CHIUSA OCCORRERA' CHE $\Delta\varphi$ SIA UNA FUNZIONE RAZIONALE DI 2π, CIOE'

$$\Delta\varphi = 2\pi\,\frac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

QUINDI DOPO n RIPETIZIONI DI QUESTO PERIODO DI TEMPO, IL RAGGIO VETTORE r, DOPO AVER FATTO m GIRI COMPLETI, RIPRENDERA' IL VALORE INIZIALE E LA TRAIETTORIA SI CHIUDE.

LA "CURVA CHIUSA" E' UNA TRAIETTORIA "ECCEZIONALE", INFATTI PER UNA FORMA ARBITRARIA DI $V(r)$ L'ANGOLO $\Delta\varphi$ NON E' UNA FRAZIONE RAZIONALE DI 2π.

IN QUESTO CASO LA TRAIETTORIA PASSA ∞ VOLTE DALLA DISTANZA r_{min} ALLA DISTANZA r_{max} (DAL CENTRO) E IN UN TEMPO ∞ RICOPRE TUTTA LA CORONA CIRCOLARE COMPRESA TRA LE DUE CIRCONFERENZE LIMITE



E' POSSIBILE PROVARE CHE $\exists$ SOLTANTO DUE TIPI DI CAMPO CENTRALE IN CUI TUTTE LE TRAIETTORIE DEI MOTI FINITI SONO CHIUSE, E SONO I CAMPI PER CUI ACCADE CHE:

$$V(r) \propto \begin{cases} \dfrac{1}{r} \\ r^2 \end{cases}$$

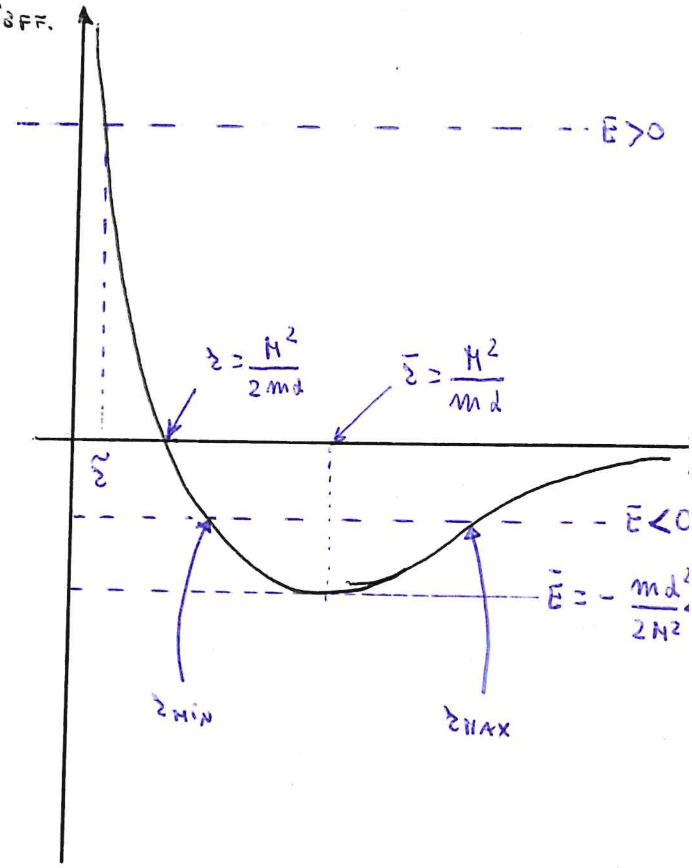
"POTENZIALE NEWTONIANO O ELETTROSTATICO ATTRATTIVO"

(10) $$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{con } \alpha > 0 .$$

DEFINENDO L'ENERGIA POTENZIALE "EFFICACE"

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (11)$$

DALLA (8) $\Rightarrow$ $$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - V_{eff}. \qquad (12)$$



OSSERVIAMO CHE:

1) $\lim_{r \to 0} V_{eff} = +\infty$; $\lim_{r \to +\infty} V_{eff} = 0$

2) $V_{eff} = 0$ PER $r = \frac{M^2}{2m\alpha}$

3) $V'_{eff} = 0$ PER $\bar{r} = \frac{M^2}{m\alpha}$

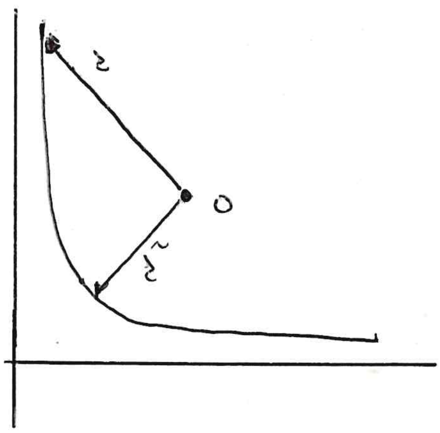
ED $V_{eff}(\bar{r}) = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$

CONSIDERIAMO QUINDI VARI CASI:

1) SIA $E > 0$ (VEDI FIG.)

IN QUESTO CASO AVREMO CHE IL MINIMO VALORE DI r SARÀ $\tilde{r}$. INFATTI PER VALORI DI $r < \tilde{r}$ $V_{eff} > E$ E DALLA (12) SI AVREBBE $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - V_{eff} < 0 \Leftarrow$ ASSURDO.

INOLTRE NON ABBIAMO UN VALORE LIMITE SUPERIORE QUINDI IL MOTO NON È LIMITATO (MOTO INFINITO).



QUINDI UNA PARTICELLA CHE PROVIENE ALL'INFINITO "URTERÀ" LA "BARRIERA REPULSIVA" SARÀ RESPINTA E SI ALLONTANA ALL'∞. OVVIAMENTE PER $r = \tilde{r} \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = 0$ CIOÈ $\dot{r} = 0$ QUINDI $r = \tilde{r}$ È UN "PUNTO DI INVERSIONE"

NEL CASO IN CUI $E=0$ AVREMO UNA SITUAZIONE ANALOGA CON $\tilde{r} = \frac{M}{2m\alpha}$ CON UN MOTO "NON LIMITATO."

2) SIA $E<0$

IN QUESTO CASO AVREMO SIA UN LIMITE INFERIORE CHE UN LIMITE SUPERIORE CIOE' $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

INFATTI SIA PER $r < r_{min}$ CHE PER $r > r_{max}$ $\Rightarrow$ $V_{EFF.} > E$

QUINDI DALLA (12) SI AVREBBE

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - V_{EFF} < 0 \quad \Leftarrow \text{(ASSURDO)}$$

AVREMO QUINDI UN "MOTO FINITO" CON DUE PUNTI DI INVERSIONE $r = r_{min}$ E $r = r_{max}$ (TALI CHE $\dot{r} = 0$).

PER QUESTO TIPO DI POTENZIALE AVREMO UNA "ORBITA CHIUSA ED ELLITTICA".

NEL CASO IN CUI $E = \bar{E} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$ AVREMO CHE

$r_{min} = r_{max}$ E L'ELLISSE SI AUTOFORMERA' IN UN CERCHIO.

"CALCOLO ESPLICITO DELLA TRAIETTORIA"

DALLA (6) PONENDO $\beta_1 = \varphi_0$ E ASSUMENDO

$$x = \frac{1}{r} \quad \left(dx = -\frac{1}{r^2} dr \right)$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2m}{M^2}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{1}{r^2}}} + \varphi_0 = -\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + bx + a}}$$

CON $b = \frac{2m\alpha}{M^2}$ E $a = \frac{2mE}{M^2}$

PONENDO $-x^2 + bx + a = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$

E DEFINENDO

$$x - \frac{b}{2} = \left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \cos \psi$$

$$\Rightarrow dx = - \left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{sen} \psi \, d\psi$$

AVREMO:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + bx + a}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] - \left[x - \frac{b}{2}\right]^2}} =$$

$$= - \int \frac{\cancel{\left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]^{1/2}} \operatorname{sen} \psi \, d\psi}{\cancel{\left[a + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]^{1/2}} \sqrt{1 - \cos^2 \psi}} = - \int d\psi = -\psi$$

DA CUI ESSENDO:

$$\psi = \arccos \left\{ \frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right\}$$

$$\theta = \psi + \theta_0 = \arccos \left\{ \frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}} \right\} + \theta_0 =$$

$$= \arccos \left\{ \frac{\frac{2}{r} - \frac{2m\alpha}{M^2}}{\sqrt{\left(\frac{2m\alpha}{M^2}\right)^2 + \frac{8mE}{M^2}}} \right\} + \theta_0$$

DA CUI:

$$\theta = \theta_0 + \arccos \left\{ \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} \right\}$$

SCEGLIENDO L'ANGOLO φ IN MODO TALE CHE $\varphi_0 = 0$

E PONENDO

$$
(13) \quad \begin{cases} p = \dfrac{M^2}{m\alpha} = \text{"PARAMETRO DELL'ORBITA"} & (p > 0) \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2M^2E}{m\alpha^2}} = \text{"ECCENTRICITA' DELL'ORBITA"} & (e > 0) \end{cases}
$$

$$
\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}} \cos\varphi = \frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}
$$

DA CUI MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $M/m\alpha$

AVREMO:

$$
\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \qquad (14)
$$

LA (14) E' L'EQUAZIONE DI UNA "SEZIONE CONICA" AVENTE PER FUOCO ~~[illegible]~~ IL CENTRO DEL CAMPO.

OSSERVIAMO CHE DALLA (14)

$$
r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad (15)
$$

QUINDI LA SCELTA $\varphi_0 = 0$ E' TALE CHE ~~[illegible]~~ IN CORRISPONDENZA DI $\varphi = 0$ AVREMO IL VALORE $r = r_{min}$, CIOE' IL PUNTO PIU' VICINO AL CENTRO DETTO "PERIELIO DELL'ORBITA". (CIOE $r_{min} = \dfrac{p}{1+e}$). (16)

"ANALISI DELLA SEZIONE CONICA"

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE (14) DELLA "SEZIONE CONICA" AVENTE COME FUOCO IL CENTRO O DEL CAMPO.

E DA INTRODUCIAMO IL RIF. $\{O', x, y\}$ DOVE L'ASSE $\vec{x}$

COINCIDENTE CON L'ASSE FOCALE ESPRESSO DALLA RETTA $\alpha=0$. SIA γ L'ASCISSA DEL FUOCO O ($\gamma=\pm c$ CON $c>0$).

AVREMO COSÌ LE COORDINATE

$$(17)\quad \begin{cases} x=\gamma+r\cos\alpha \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\gamma=r\cos\alpha \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

DA CUI QUADRANDO (18) $r^2=(x-\gamma)^2+y^2=x^2+y^2-2\gamma x+c^2$

DALLA (14) AVREMO:

$$r(1+e\cos\alpha)=p \Rightarrow r=p-er\cos\alpha \Rightarrow$$

$$r^2=[p-e(x-\gamma)]^2=[(p+e\gamma)-ex]^2 \quad (19)$$

CHE INSERITA NELLA (18) CI DÀ:

$$x^2+y^2-2\gamma x+c^2-(p+e\gamma)^2-e^2x^2+2e(p+e\gamma)x=0$$

DA CUI:

$$20)\quad \boxed{(1-e^2)x^2+y^2=2[\gamma-e(p+e\gamma)]x-c^2+(p+e\gamma)^2}$$

CONSIDERIAMO VARI CASI

A) $\boxed{1-e^2=0} \Rightarrow e=1$ (RICORDIAMO CHE $e>0$ PER LA (13))

DALLA (20) AVREMO:

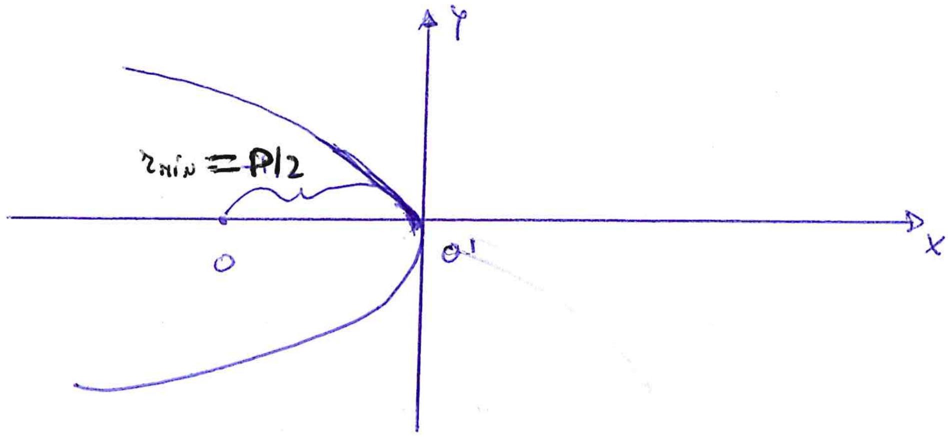
$$y^2=-2px-\cancel{c^2}+p^2+\cancel{\gamma^2}+2p\gamma=-2px+p^2+2p\gamma$$

PONIAMO $\gamma=-\frac{p}{2}$ AVREMO L'EQUAZIONE

$$y^2=-2px \quad (21)$$

PARABOLA AVENTE COME ASSE FOCALE L'ASSE $\vec{x}$

ED $O = \left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ CON E FUOCO



CASO B $\boxed{1 - e^2 \neq 0}$

ASSUMIAMO CHE x SIA TALE DA AVERE $\Rightarrow \boxed{(1-e^2)x - ep = 0}$ (22)

IN QUESTO CASO DALLA (20) AVREMO

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = -c^2 + (p+ex)^2 \qquad (23)$$

UTILIZZANDO LA (22) $\boxed{x = \frac{ep}{1-e^2}}$ QUINDI

$$\boxed{(p+ex)} = p + \frac{e^2 p}{1-e^2} = \frac{p}{1-e^2} = \boxed{\frac{x}{e}}$$

DA CUI INSERENDOLA NELLA (23)

$$\boxed{(1-e^2)x^2 + y^2 = -c^2 + \frac{c^2}{e^2} = c^2\frac{(1-e^2)}{e^2}}$$

CIOÈ QUI

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{e^2}\right)} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(1-e^2)} = 1}$$

DA CUI PONENDO $\frac{c^2}{e^2} = a^2$ (CON $a > 0$) $\Rightarrow c = ae$

AVREMO

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1} \qquad (24)$$

INOLTRE
DALLA (23) $\Rightarrow$ $p = \frac{\gamma}{e}(1-e^2) = \frac{\gamma}{e}\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)$ (25)

CONSIDERIAMO DUE SOTTOCASI:

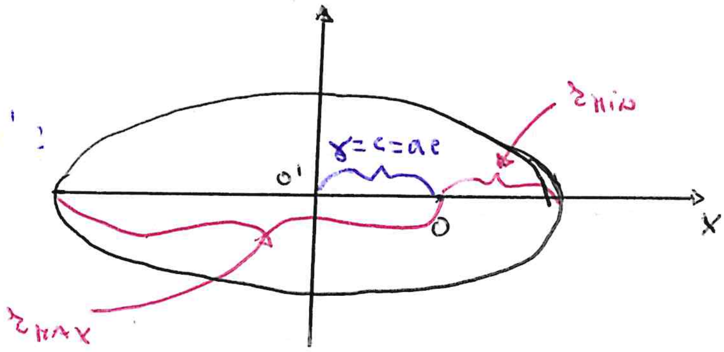
B1) $1-e^2>0 \Rightarrow \boxed{e<1}$ (26)

$$1-e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} > 0$$

PONIAMO $b^2 = a^2 - c^2$

DA CUI LA (24) SI SCRIVERA':

$$(27) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



CHE E' L'EQUAZIONE DI UNA ELLISSE CON O UNO DEI DUE FUOCHI. SE VOLESSIMO CALCOLARE I DUE SEMIASSI a, b RICORDIAMO CHE

$$p = \frac{\gamma}{e}(1-e^2) \Rightarrow \frac{p}{1-e^2} = \frac{\gamma}{e} = \frac{c}{e} = \frac{a\cancel{e}}{\cancel{e}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}} \qquad (28)$$

ANALOGAMENTE

$$p = \frac{\gamma}{e}\frac{(a^2-c^2)}{a^2} = \frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{e}}\frac{b^2}{a^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{pa} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}} \qquad (29)$$

INFINE SE CALCOLIAMO r_{min} ED r_{max}

$$\begin{cases} \boxed{r_{min}} = a - ae = \boxed{a(1-e)} \\ \boxed{r_{max}} = a + ae = \boxed{a(1+e)} \end{cases} \qquad (30)$$

SOTTOCASO B2

B2) $\Rightarrow$ $1-e^2<0 \Rightarrow \boxed{e>1}$ (31)

$1-e^2 = \dfrac{a^2-c^2}{a^2} < 0$ PONENDO $\boxed{c^2-a^2=b^2}$

$\boxed{1-e^2 = -\dfrac{b^2}{a^2}}$ DA CUI PER LA (24)

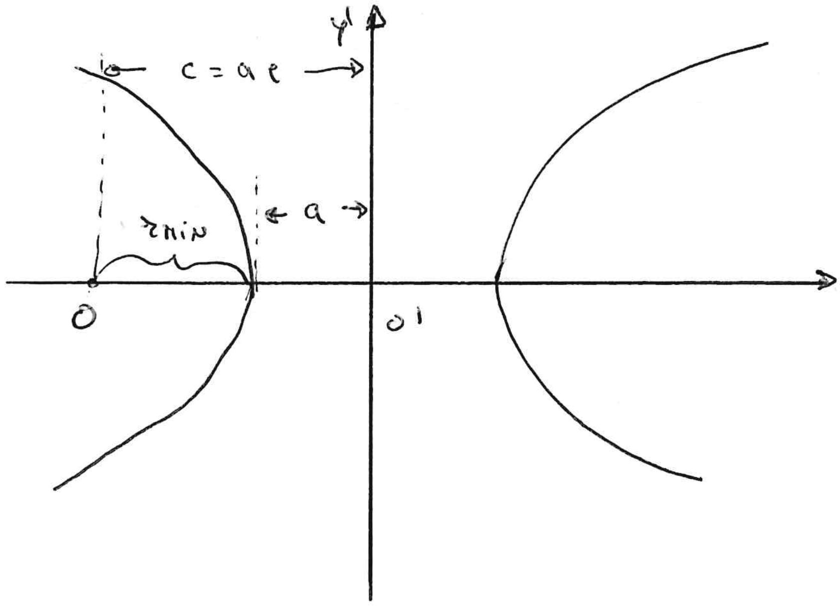
(32) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\Leftarrow$ IPERBOLE

$p = \dfrac{\gamma}{e}(1-e^2) = \dfrac{\gamma}{e}\left(\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\right) = -\dfrac{\gamma}{e}\dfrac{b^2}{a^2}>0$ (PER LA $(13)_1$ $p=\dfrac{M^2}{mk}>0$)

DA CUI DEDUCIAMO CHE $\gamma = -c = -ae$ (33)

QUINDI $p=\dfrac{b^2}{a} = a(e^2-1) \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{p}{e^2-1}}$ (34)

$\boxed{b=\sqrt{pa} = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}}$ (35)



CON $\boxed{r_{min} = ae-a = a(e-1)}$ (36)

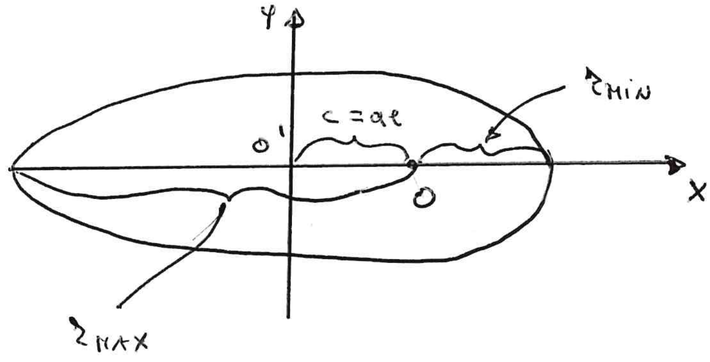
"RIEPILOGO"

$$P = \frac{M^2}{m\alpha} > 0 \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} > 0$$

$$\frac{P}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

1) $\boxed{E < 0}$ $\Rightarrow$ $e < 1$ L'ORBITA E' UNA ELLISSE

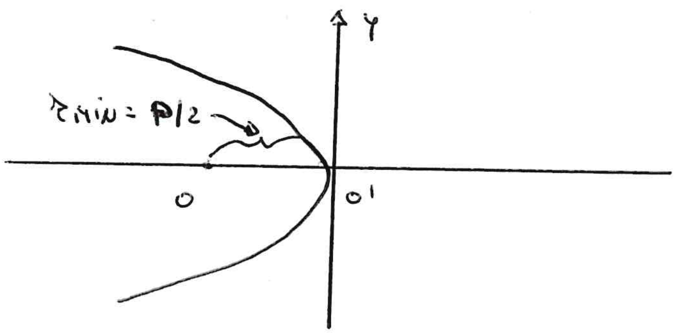
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



DOVE $a = \dfrac{P}{1-e^2}$ $\qquad b = \dfrac{P}{\sqrt{1-e^2}}$ $\qquad \begin{cases} r_{MIN} = a(1-e) \\ r_{MAX} = a(1+e) \end{cases}$

2) $\boxed{E = 0}$ $\Rightarrow$ $e = 1$ L'ORBITA E' UNA PARABOLA

$$y^2 = -2Px$$

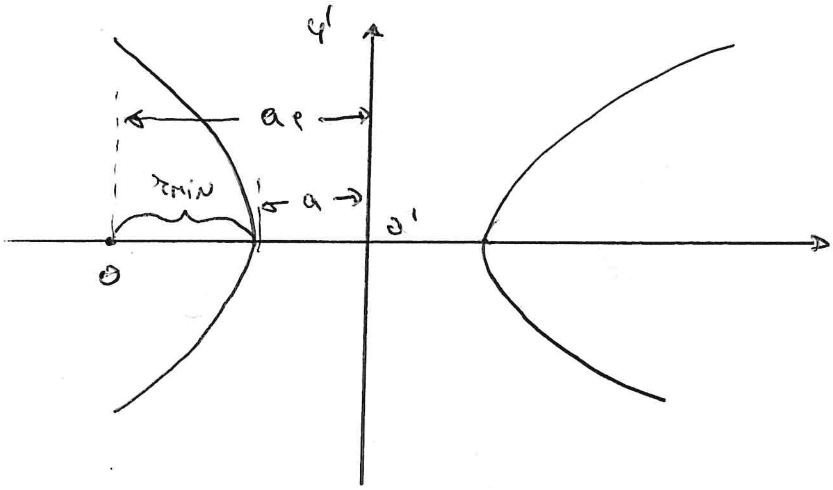


3) $\boxed{E > 0}$ $\Rightarrow$ $e > 1$ L'ORBITA E' UNA IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

DOVE:

$$\begin{cases} a = \dfrac{P}{e^2-1} \qquad b = \dfrac{P}{\sqrt{e^2-1}} \\ r_{MIN} = a(e-1) \end{cases}$$



QUINDI COME NELLO STUDIO QUALITATIVO:

$E \geq 0$ IL MOTO E' INFINITO

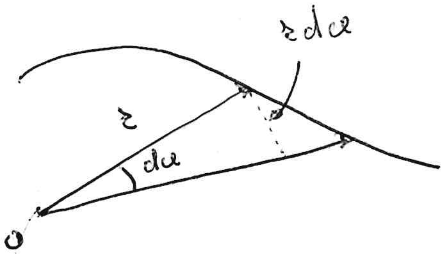
$E < 0$ IL MOTO E' FINITO

"LEGGI DI KEPLERO"

1ª LEGGE DI KEPLERO: NEL CASO DI UN POTENZIALE NEWTONIANO SE ABBIAMO UN MOTO FINITO "I PIANETI DESCRIVONO ORBITE ELLITTICHE DI CUI IL SOLE OCCUPA UN FUOCO".

2ª LEGGE DI KEPLERO: (E' UNA PROPRIETA' GENERALE DEI MOTI IN UN CAMPO CENTRALE) "LA VELOCITA AREOLARE E' COSTANTE, CIOE DURANTE IL MOTO IL RAGGIO VETTORE DESCRIVE AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI".

RICORDIAMO CHE $M = m r^2 \dot{\varphi}$ SE QUINDI CONSIDERIAMO LA QUANTITA



$$df = \frac{1}{2} r (r\, d\varphi) \simeq$$ AREA DEL SETTORE FORMATO DA 2 RAGGI VETTORI INFINITAMENTE VICINI E DA UN ELEMENTO D'ARCO DI TRAIETTORIA

DA CUI LA VELOCITA AREOLARE

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{M}{2m} = \text{COSTANTE.} \quad (*)$$

3ª LEGGE DI KEPLERO: (LIMITATA AL SOLO CASO DI POTENZIALI CHE DIPENDONO DALL'INVERSO DELLA DISTANZA, NEL CASO DI ORBITE ELLITTICHE: "IL QUADRATO DEL PERIODO E' PROPORZIONALE AL CUBO DELL'ASSE MAGGIORE"

INTEGRANDO LA RELAZIONE (*) $M \int_0^T dt = MT = 2m \int_0^T df \Rightarrow$

$$MT = 2m \underbrace{[f]_0^T}_{\text{AREA RACCHIUSA DALL'ORBITA}} \Rightarrow [f]_0^T = \pi a b$$

$$T = \frac{2m}{M} \pi a b \quad (b = \sqrt{pa}) \Rightarrow T = \frac{2m}{M} \pi a^{3/2} \sqrt{p}$$

DA CUI ESSENDO $p = \frac{M^2}{m\alpha} \Rightarrow T = 2\pi\, a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$

— o —

FORZE COULOMBIANE REPULSIVE

$$V = \frac{\alpha}{r} \qquad \alpha > 0$$

DA CUI IL POTENZIALE EFFICACE

$$V_{EFF} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M}{2mr^2} > 0 \quad \text{SEMPRE}$$

QUINDI $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{EFF} > 0$ SEMPRE $\Rightarrow$ "MOTO INFINITO".

COME NEL CALCOLO DI PAG. 7 - 8, PONENDO $x = \frac{1}{r}$ AVREMO

$$\varphi = \int \frac{\frac{1}{r^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2m}{M}\left(E - \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{1}{r^2}}} + \varphi_0 = - \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + bx + a}} + \varphi_0$$

CON $b = -\frac{2m\alpha}{M^2}$ ED $a = \frac{2mE}{M}$

DA CUI COME NEL CALCOLO PRECEDENTE

$$\varphi = \arccos\left\{\frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}}\right\} + \varphi_0 = \varphi_0 + \arccos\left\{\frac{\frac{M}{r} + \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2ME + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\right\}$$

DA CUI DEFINENDO

$$p = \frac{M}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}; \quad \varphi_0 = 0$$

AVREMO:

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$$

ESSENDO $e > 1$ LA TRAIETTORIA SARÀ UNA IPERBOLE.

CON $r_{MIN} = a(e+1)$

— o —

che sia:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

In questo caso la formula (12,1) dà per $x(U)$ l'espressione univoca

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \qquad (12,2)$$

§ 13. *Massa ridotta*

Il problema particolarmente importante del moto di un sistema composto di due particelle interagenti (*problema dei due corpi*) ammette una soluzione completa in forma generale.

Come passo preliminare alla soluzione di questo problema, mostriamo come è possibile semplificarlo sostanzialmente separando il moto del sistema in moto del centro di massa e moto dei punti materiali rispetto a quest'ultimo.

L'energia potenziale d'interazione di due particelle dipende soltanto dalla distanza tra di loro, cioè dal valore assoluto della differenza tra i loro raggi vettori. Perciò la funzione lagrangiana di un tale sistema è:

$$L = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \qquad (13,1)$$

Sia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

il vettore della distanza che separa i due punti; poniamo l'origine delle coordinate al centro di massa il che ci dà:

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0.$$

Dalle due ultime uguaglianze otteniamo:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}. \qquad (13,2)$$

Riportando queste espressioni nella (13,1), otteniamo:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \qquad (13,3)$$

dove

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad (13,4)$$

è una grandezza chiamata *massa ridotta*. La funzione (13,3) coincide formalmente con la funzione di Lagrange di un punto materiale di massa m che si muove in un campo esterno $U(r)$ simmetrico rispetto all'origine immobile delle coordinate.

Cosí, il problema del moto di due punti materiali interagenti si riduce al problema del moto di un punto materiale in un campo esterno dato $U(r)$. La soluzione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ di questo problema permette di determinare separatamente, mediante la formula (13,2), le traiettorie $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ (rispetto al centro di massa) per ciascuna delle due particelle m_1 e m_2.

PROBLEMA

Un sistema è composto di una particella di massa M e di n particelle di massa m. Eliminare il moto del centro di massa e ridurre il problema a quello del moto di n particelle.

Soluzione. Siano $\mathbf{R}$ il raggio vettore della particella M ed $\mathbf{R}_a$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$ i raggi vettori delle particelle di massa m. Introduciamo le distanze della particella M dalle particelle m

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

e come origine delle coordinate prendiamo il centro di massa:

$$M\mathbf{R} + m\sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

Da queste uguaglianze otteniamo:

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{\mu}\sum_a \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a,$$

dove $\mu = M + nm$. Riportando queste espressioni nella funzione di Lagrange

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_a \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U,$$

otteniamo:

$$L = \frac{m}{2}\sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu}\Big(\sum_a \mathbf{v}_a\Big)^2 - U,$$

dove $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$.

L'energia potenziale dipende soltanto dalle distanze tra le particelle e può quindi essere rappresentata come funzione dei vettori $\mathbf{r}_a$.

§ 14. *Moto in un campo centrale*

Nel ridurre il problema del moto dei due corpi al problema del moto di un corpo, ci siamo venuti a trovare di fronte al problema della determinazione del moto di una particella in un campo esterno in cui l'energia potenziale della particella dipende soltanto dalla distanza r da un dato punto fisso; un tale campo è detto *centrale.* La forza

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

agente sulla particella, dipende anch'essa, in valore assoluto, da r ed è diretta in ogni punto come il raggio vettore.

Come già è stato detto nel § 9, durante il moto in un campo centrale il momento angolare del sistema rispetto al centro del campo si conserva. Per una particella questo momento angolare è

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rp}].$$

Poiché i vettori $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{r}$ sono mutuamente perpendicolari, la costanza di $\mathbf{M}$ significa che durante il moto della particella il suo raggio vettore resta sempre in uno stesso piano perpendicolare ad $\mathbf{M}$.

In tal modo la traiettoria di una particella che si muove in un campo centrale giace tutta in un solo piano. Introducendo le coordinate polari r, φ, la funzione di Lagrange assume la forma [vedi (4,5)]:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{14,1}$$

Questa funzione non contiene in modo esplicito la coordinata φ. Si chiama *ciclica* ogni coordinata generalizzata q_i che non appare in modo esplicito nella funzione di Lagrange. In virtú dell'equazione lagrangiana, per ogni coordinata ciclica q_i si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

cioè l'impulso generalizzato corrispondente $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ è un integrale del moto. Questa circostanza porta ad una semplificazione sostanziale del problema dell'integrazione delle equazioni del moto nel caso in cui esistano le coordinate cicliche.

Nel caso considerato l'impulso generalizzato

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

coincide con il momento angolare $M_z = M$ [cfr. (9,6)] e cosí ritroviamo la legge, che già conosciamo, di conservazione del momento angolare

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{costante}. \tag{14,2}$$

Notiamo, che per il moto piano di una particella in un campo centrale, questa legge ammette un'interpretazione geometrica semplice. L'espressione $\frac{1}{2} r \cdot r \, d\varphi$ rappresenta l area del settore formato dai due raggi vettori infinitamente vicini e da un elemento d'arco della traiettoria (fig. 8). Indicando questa superficie con df, il momento angolare della particella assume la forma:

$$M = 2m\dot{f}, \tag{14,3}$$

dove la derivata $\dot{f}$ è detta *velocità areolare*. La conservazione del momento angolare implica dunque la costanza della velocità areolare: in uguali intervalli di tempo il raggio vettore della particella in moto descrive aree uguali (*seconda legge di Keplero*[1])).

La soluzione completa del problema del moto di una particella in un campo centrale si ottiene piú semplicemente se si parte dalle

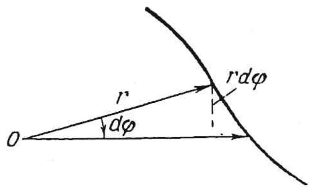


Fig. 8

leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare senza neanche scrivere le equazioni stesse del moto. Esprimendo $\dot{\varphi}$ in funzione di M con la (14,2) e riportando questo valore nell'espressione dell'energia, otteniamo:

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \qquad (14,4)$$

Da cui

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (14,5)$$

oppure, separando le variabili ed integrando:

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{costante}. \qquad (14,6)$$

Scrivendo poi la (14,2) nella forma

$$d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt,$$

ponendovi dt dalla (14,5) e integrando, otteniamo:

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+\text{costante}. \qquad (14,7)$$

Le formule (14,6) e (14,7) danno la soluzione generale del problema posto. La seconda di queste formule determina la relazione tra r e φ, cioè l'equazione della traiettoria. La formula (14,6) determina

[1]) La legge di conservazione del momento angolare per una particelle in moto in un campo centrale si chiama talvolta *integrale delle aree*.

invece, in modo implicito, la distanza r dal centro del punto in moto come funzione del tempo. Notiamo che l'angolo φ varia sempre col tempo in modo monotono: risulta chiaramente dalla (14,2) che $\dot{\varphi}$ non cambia mai di segno.

L'espressione (14,4) mostra che la parte radiale del moto si può considerare come un moto lineare in un campo con energia potenziale « efficace »

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \qquad (14,8)$$

La grandezza $M^2/2mr^2$ è detta energia centrifuga. I valori di r per i quali

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad (14,9)$$

determinano i confini della regione del moto per quanto riguarda la distanza dal centro. Se l'uguaglianza (14,9) è soddisfatta la velocità radiale $\dot{r}$ si annulla. Ciò non significa che la particella si fermi (come avviene in un vero moto unidimensionale), poiché la velocità angolare $\dot{\varphi}$ non si annulla. L'uguaglianza $\dot{r} = 0$ significa un « punto di svolta » della traiettoria in cui la funzione $r(t)$ da crescente diventa decrescente o viceversa.

Se la regione della variazione di r è limitata dalla sola condizione $r \geqslant r_{min}$, il moto della particella è infinito: la sua traiettoria proviene dall'infinito e torna all'infinito.

Se la regione della variazione di r ha invece due limiti, r_{min} e r_{max}, il moto è finito e la traiettoria giace interamente in una corona limitata dalle circonferenze $r = r_{max}$ e $r = r_{min}$. Ciò non significa, però, che la traiettoria sia necessariamente una curva chiusa. Nell'intervallo di tempo in cui r varia da r_{max} a r_{min} e di nuovo a r_{max}, il raggio vettore ruota di un angolo $\Delta\varphi$ che, conformemente alla (14,7), è

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \qquad (14,10)$$

Perché la traiettoria sia chiusa è necessario che questo angolo sia una frazione razionale di 2π, sia cioè uguale a $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, dove m ed n sono numeri interi. Allora, dopo n ripetizioni di questo periodo di tempo, il raggio vettore del punto, dopo aver fatto m giri completi, riprenderà il suo valore iniziale, cioè la traiettoria si chiude.

Casi di questo genere sono tuttavia eccezionali, e per una forma $U(r)$ arbitraria l'angolo $\Delta\varphi$ non è una frazione razionale di 2π. Per questo la traiettoria di un moto finito generalmente non è chiusa. Essa passa infinite volte alla distanza minima e a quella massima dal centro (come, per esempio, nella fig. 9), e, in un tempo infinito, ricopre tutta la corona compresa tra le due circonferenze limite.

Esistono soltanto due tipi di campo centrale in cui tutte le traiettorie dei moti finiti sono chiuse. Sono i campi in cui l'energia potenziale della particella è proporzionale a $1/r$ o a r^2. Il primo di questi casi verrà esaminato nel prossimo paragrafo, e il secondo corrisponde al cosiddetto oscillatore spaziale (vedi problema 3 del § 23).

In un punto di svolta, la radice quadrata della (14,5) (così come le espressioni integrande nella (14,6) e nella (14,7)) cambia di segno. Se

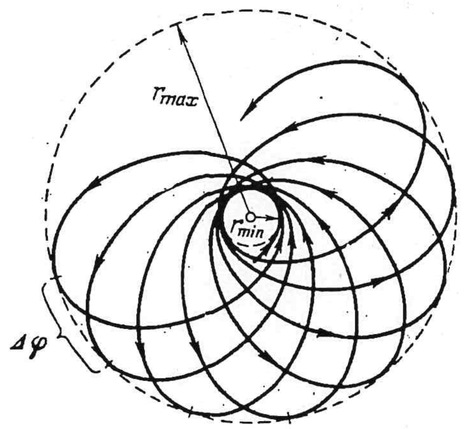


Fig. 9

si misura l'angolo φ a partire dalla direzione di un raggio vettore terminante in un punto di svolta, le porzioni della traiettoria facenti capo, da parti opposte, a questo punto differiranno, per valori di r uguali, solo per il segno di φ; questo significa che la traiettoria è simmetrica rispetto alla direzione indicata. Partendo, per esempio, da uno dei punti $r = r_{max}$, si percorre la porzione di traiettoria fino al punto $r = r_{min}$, poi si ha una porzione disposta simmetricamente fino al successivo punto $r = r_{max}$ e via di seguito; in altre parole, l'intera traiettoria si ottiene ripetendo in andata e in ritorno porzioni uguali. Ciò avviene anche per le traiettorie infinite le quali sono formate da due rami simmetrici che si estendono dal punto di svolta r_{min} fino all'infinito.

L'esistenza di un'energia centrifuga (per un moto in cui $M \neq 0$), tendente all'infinito come $1/r^2$ quando $r \to 0$, rende generalmente impossibile la penetrazione delle particelle nel centro del campo, anche se questo è di per sé stesso un centro d'attrazione. La « caduta » di una particella nel centro è possibile soltanto nel caso in cui l'energia potenziale tende con sufficiente rapidità verso $-\infty$ per $r \to 0$.

Dalla disuguaglianza

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

o

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

segue che r può prendere valori tendenti a zero soltanto se

$$r^2 U(r)\,|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}, \qquad (14,11)$$

cioè $U(r)$ deve tendere verso $-\infty$ come $-\alpha/r^2$ dove $\alpha > M^2/2m$, oppure proporzionalmente a $-1/r^n$ dove $n > 2$.

PROBLEMI

1. **Integrare le equazioni del moto di un pendolo sferico, cioè di un punto materiale m che si muove sulla superficie di una sfera di raggio l in un campo di gravità.**

Soluzione. In coordinate sferiche, ponendo origine nel centro della sfera e dirigendo l'asse polare verticalmente verso il basso, la funzione di Lagrange del pendolo è

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

La coordinata φ è ciclica, e perciò l'impulso generalizzato p_φ, che coincide con la componente z del momento angolare, si conserva:

$$ml^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = \text{costante}. \qquad (1)$$

L'energia è

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} - mgl\cos\theta. \qquad (2)$$

Ricavando di qui $\dot{\theta}$ e separando le variabili, si ottiene:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E - U_{\text{eff}}(\theta)]}}, \qquad (3)$$

dove è stata introdotta « l'energia potenziale efficace »

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} - mgl\cos\theta.$$

Utilizzando la (1), troviamo per l'angolo φ:

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta\,\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\theta)}}. \qquad (4)$$

Gli integrali (3) e (4) si riducono ad integrali ellittici di prima e di terza specie, rispettivamente.

La regione del moto per l'angolo θ è determinata dalla condizione $E > U_{eff}$, ed i suoi limiti si trovano dall'equazione $E = U_{eff}$. Quest'ultima è un'equazione di terzo grado in $\cos\theta$, avente due radici nell'intervallo compreso tra -1 e $+1$; queste radici determinano la posizione di due circonferenze parallele sulla sfera tra le quali è compresa tutta la traiettoria.

2. Integrare le equazioni del moto di un punto materiale che si muove sulla superficie di un cono (angolo al vertice è 2α), posto verticalmente con il vertice verso il basso, in un campo di gravità.

Soluzione. In coordinate sferiche (origine nel vertice del cono ed asse polare diretto verticalmente verso l'alto) la funzione di Lagrange è

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha.$$

La coordinata φ è ciclica e perciò anche in questo caso si conserva la grandezza

$$M_z = mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \dot{\varphi}.$$

L'energia è

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

Analogamente al procedimento usato per il problema 1, troviamo:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{eff}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\operatorname{sen}^2\alpha\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}},$$

$$U_{eff}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

La condizione $E = U_{eff}(r)$ rappresenta (per $M_z \neq 0$) un'equazione di terzo grado in r avente due radici positive; queste radici determinano la posizione di due circonferenze orizzontali sulla superficie del cono tra le quali è compresa la traiettoria.

3. Integrare le equazioni del moto di un pendolo piano il cui punto di sospensione (di massa m_1) può spostarsi orizzontalmente (vedi fig. 2).

Soluzione. Nella funzione di Lagrange, trovata nel problema 2 del § 5, la coordinata x è ciclica. Per questo, si conserva l'impulso generalizzato P_x che coincide con la componente orizzontale dell'impulso totale del sistema:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{costante}. \tag{1}$$

Si può sempre considerare il sistema come un insieme che persevera in quiete; in questo caso, la costante è nulla e l'integrazione dell'equazione (1) dà la relazione

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \operatorname{sen}\varphi = \text{costante}, \tag{2}$$

che esprime l'immobilità del centro di massa del sistema nella direzione orizzontale. Partendo dalla (1), si ottiene l'energia nella forma

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 gl\cos\varphi. \tag{3}$$

Donde

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{E+m_2 gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Esprimendo mediante la (2) le coordinate $x_2 = x + l\,\mathrm{sen}\,\varphi$, ed $y_2 = l\cos\varphi$ della particella m_2 in funzione di φ, troviamo che la traiettoria di questa particella rappresenta un arco d'ellisse con semiasse orizzontale uguale a $lm_1/(m_1+m_2)$ e semiasse verticale uguale a l. Quando $m_1 \to \infty$, si ritrova l'usuale pendolo matematico oscillante secondo un arco di circonferenza.

§ 15. *Il problema di Keplero*

L'esempio piú importante di campi centrali è quello di un campo in cui l'energia potenziale è inversamente proporzionale ad r e, rispettivamente, le forze sono inversamente proporzionali a r^2. È il

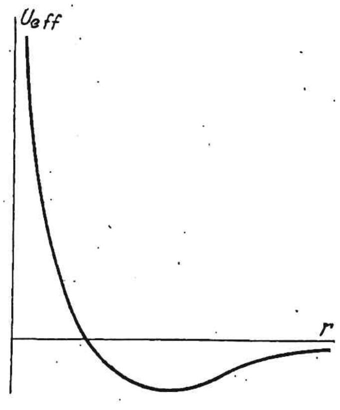


Fig. 10

caso dei campi newtoniani di gravità e dei campi coulombiani elettrostatici. I primi, come è noto, hanno carattere attrattivo, e secondi possono essere sia attrattivi che repulsivi.

Consideriamo anzitutto un campo d'attrazione in cui

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

dove la costante α e positiva. Il grafico dell'energia potenziale « efficace »

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

è della forma indicata nella fig. 10. Per $r \to 0$, essa tende verso $+\infty$, e per $r \to \infty$ tende a zero per valori negativi; per $r = M^2/\alpha m$ essa ha un minimo uguale a

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{15,3}$$

Risulta direttamente da questo grafico che per $E > 0$ il moto della particella sarà infinito, e finito per $E < 0$.

La forma della traiettoria è determinata dalla formula generale (14,7). Riportando in essa $U = -\frac{\alpha}{r}$ ed eseguendo un'integrazione elementare, si ottiene:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dell'angolo φ in modo tale che la costante sia nulla e introducendo le notazioni

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15,4}$$

possiamo scrivere la formula della traiettoria come segue:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi. \tag{15,5}$$

Questa è l'equazione di una sezione conica avente per fuoco l'origine delle coordinate; p ed e sono detti rispettivamente *parametro* e *eccentricità* dell'orbita. Come si vede dalla (15,5), la scelta dell'origine di φ è tale che il punto in cui $\varphi = 0$ è il piú vicino al centro (questo punto è detto *perielio* dell'orbita).

Nel problema equivalente dei due corpi interagenti secondo la legge (15,1), l'orbita di ciascuna delle particelle rappresenta una sezione conica avente per fuoco il centro di massa comune.

Dalla (15,4) si vede che per $E < 0$ l'eccentricità è minore di 1, cioè l'orbita è un'ellisse (fig. 11) e il moto è finito conformemente a quanto detto all'inizio di questo paragrafo. Secondo note formule della geometria analitica, il semiasse maggiore a e il semiasse minore b sono dati da

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15,6}$$

Il valore minimo ammissibile dell'energia coincide con la (15,3), e in questo caso si ha $e = 0$, cioè l'ellisse si trasforma in un cerchio. Notiamo che il semiasse maggiore dell'ellisse dipende soltanto dall'energia (e non dal momento angolare) della particella. Le distanze minima e massima dal centro del campo (fuoco dell'ellisse) sono

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \tag{15,7}$$

Queste espressioni (con a ed e sostituite mediante la (15,6) e la (15,4)) si potrebbero evidentemente ottenere direttamente come radici dell'equazione $U_{eff}(r) = E$.

È comodo determinare il tempo di rivoluzione sull'orbita ellittica, cioè il periodo del moto T, per mezzo della legge di conservazione

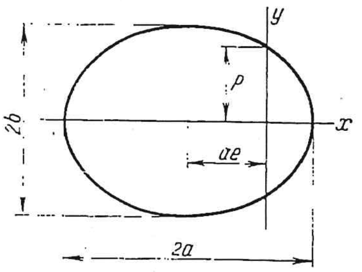


Fig. 11

del momento angolare nella forma dell'« integrale delle aree » (14,3). Integrando questa uguaglianza rispetto al tempo da zero a T, si ottiene:

$$2mf = TM,$$

dove f è l'area racchiusa dall'orbita. Per l'ellisse $f = \pi ab$, e mediante le formule (15,6) si ottiene:

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \tag{15,8}$$

Il fatto che il quadrato del periodo dovesse essere proporzionale al cubo delle dimensioni lineari dell'orbita era già stato mostrato nel § 10. Notiamo ancora che il periodo dipende solo dall'energia della particella.

Per $E \geqslant 0$ il moto è infinito. Se $E > 0$, l'eccentricità $e > 1$, cioè la traiettoria è un'iperbole che contorna il centro del campo (fuoco), come è indicato nella fig. 12. La distanza del perielio dal centro è

$$r_{min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \tag{15,9}$$

dove

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

è il « semiasse » dell'iperbole.

Se invece $E = 0$, l'eccentricità $e = 1$, la particella percorre una parabola con distanza di perielio $r_{min} = p/2$. Questo caso si ha allorché la particella comincia il suo moto da uno stato di quiete all'infinito.

La relazione tra le coordinate di una particella in moto su un'orbita e il tempo può essere trovata con l'aiuto della formula generale

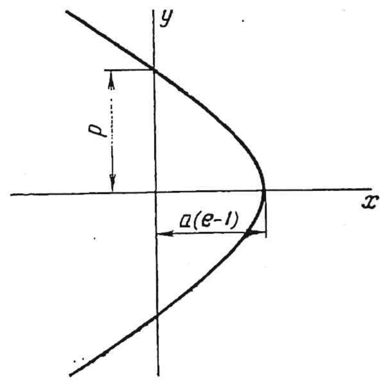


Fig. 12

(14,6). Per essa esiste una forma parametrica piú comoda a cui si può giungere nel modo seguente.

Consideriamo anzitutto orbite ellittiche. Sostituendo a ed e secondo la (15,4) e la (15,6), scriviamo l'integrale (14,6), che determina il tempo, nella forma

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Eseguendo la sostituzione

$$r-a=-ae\cos\xi,$$

questo integrale assume la forma

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\,d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\,\mathrm{sen}\,\xi)+\text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dei tempi in modo tale da annullare la costante, si ottiene infine la seguente rappresentazione parametrica della relazione tra r e t:

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\,\mathrm{sen}\,\xi) \tag{15,10}$$

(nell'istante $t=0$ la particella si trova nel suo perielio). Mediante lo stesso parametro ξ si possono esprimere anche le coordinate cartesiane della particella $x=r\cos\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$ (gli assi x ed y sono diretti rispettivamente lungo i semiassi maggiore e minore dell'ellisse). Dalle (15,5) e (15,10) otteniamo

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

e troviamo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Infine abbiamo:

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\,\mathrm{sen}\,\xi. \tag{15,11}$$

Ad una rivoluzione completa sull'ellisse corrisponde una variazione del parametro ξ da 0 a 2π.

Calcoli del tutto analoghi ci portano ai seguenti risultati per le traiettorie iperboliche:

$$\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi), \\ x &= a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi, \end{aligned} \tag{15,12}$$

dove il parametro ξ assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.

Consideriamo ora il moto in un campo di repulsione dove

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15,13}$$

($\alpha > 0$). In questo caso l'energia potenziale efficace

$$U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

decresce in modo monotono da $+\infty$ a zero, quando r varia da zero ad ∞. L'energia della particella non può essere che positiva, ed il

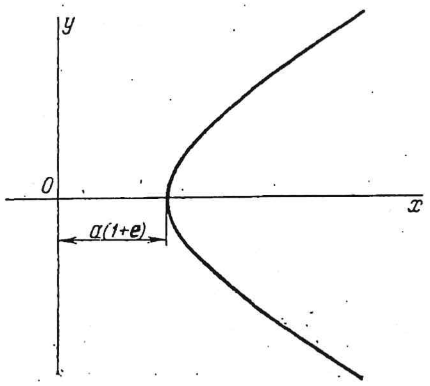


Fig. 13

moto è sempre infinito. Tutti i calcoli per questo caso sono precisamente analoghi a quelli eseguiti sopra. La traiettoria è un'iperbole

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15,14}$$

[p ed e sono determinate dalle formule (15,4)]. Essa passa vicino al centro del campo, come è indicato nella fig. 13. La distanza del perielio è

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) \tag{15,15}$$

La dipendenza dal tempo è determinata dalle equazioni parametriche

$$\begin{gathered} r = a(e \operatorname{ch} \xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e \operatorname{sh} \xi + \xi), \\ x = a(\operatorname{ch} \xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} \xi. \end{gathered} \tag{15,16}$$

Concludendo questo paragrafo mostriamo che per il moto in un campo $U = \alpha/r$ (dove il segno di α è arbitrario) esiste un integrale del moto specifico di questo campo. È facile verificare con un calcolo diretto che l'espressione

$$[\mathbf{vM}] + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} = \text{costante}. \tag{15,17}$$

Infatti, la sua derivata totale rispetto al tempo è

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3},$$

o, sostituendo $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3};$$

ponendovi, secondo le equazioni del moto, $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{r}/r^3$, vedremo che alla fine questa espressione si annulla.

Il vettore conservativo (15,17) è diretto lungo l'asse maggiore dal fuoco al perielio e la sua grandezza è uguale ad αe. Questo è facilmente verificabile considerando il suo valore nel perielio.

Sottolineiamo che l'integrale del moto (15,17), come anche gli integrali M ed E, è una funzione monodroma dello stato (posizione e velocità) della particella. Vedremo nel § 50 che la comparsa di questo integrale monodromo supplementare è dovuta alla cosiddetta degenerazione del moto.

PROBLEMI

1. Trovare la relazione tra le coordinate ed il tempo per una particella che si muove in un campo $U = -\alpha/r$ con energia $E = 0$ (secondo una parabola).

Soluzione. Nell'integrale

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

sostituiamo

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2)$$