"INTEGRALI PRIMI"

DEF. DATO UN SET DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI (EQUAZ. DEL MOTO) CHE DESCRIVONO IL MOTO DI UN SISTEMA FISICO

$$F_\alpha(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k, t) = 0 \qquad (1)$$

SE INTRODUCIAMO LE FUNZIONI

$$H_\beta(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = 0 \qquad (2)$$

CHE VALUTATE SULLE SOLUZIONI γ DELLE EQUAZIONI (1) SONO COSTANTI

$$H_\beta(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\Big|_\gamma = \text{COSTANTI}$$

ALLORA LE QUANTITA' SUDDETTE H_β SI DIRANNO DEGLI "INTEGRALI PRIMI", SULLE TRAIETTORIE DEL MOTO.

"INTEGRALI PRIMI ED EQUAZIONI CARDINALI"

ABBIAMO GIA VISTO, A PARTIRE DALLE EQUAZIONI CARDINALI, CHE POSSIAMO DETERMINARE DEGLI INTEGRALI PRIMI

DALLA 1ª EQUAZ. CARDINALE:

$\underline{R}^{(ext)} = \dot{\underline{Q}}$ SE QUINDI $\exists$ UNA DIREZIONE INDIVIDUATA DA UN VERSORE $\underline{u}$ COSTANTE TALE CHE

$$\underline{R}^{(ext)} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\underline{Q} \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \underline{Q} \cdot \underline{u} = \text{cost.}$$

CIOE LA QUANTITA' DI MOTO $\underline{Q}$ LUNGO LA DIREZIONE $\underline{u}$ E' COSTANTE

DALLA 2ª EQUAZ. CARDINALE (SCRITTA NELLA FORMA)

$\underline{M}_o^{(ext)} = \dot{\underline{K}}_o$ SE $\exists$ UNA DIREZIONE $\underline{u}$ COSTANTE TALE CHE

$$\underline{M}_o^{(ext)} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{K}}_o \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\underline{K}_o \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \underline{K}_o \cdot \underline{u} = \text{COSTANTE}$$

IL MOMENTO ANGOLARE E' COSTANTE LUNGO $\underline{u}$

"ENERGIA"

CONSIDERIAMO UN INSIEME DI PUNTI MATERIALI CON ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

SOGGETTO A "FORZE CONSERVATIVE", CON VINCOLI CHE NON DIPENDONO ESPLICITAMENTE DAL TEMPO.

CALCOLIAMO:

$$\frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{d\underline{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \underline{v}_i$$

ESSENDO $$\underline{v}_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \underbrace{\cancel{\frac{\partial P_i}{\partial t}}}_{}$$

= 0 SE I VINCOLI NON DIPENDONO ESPLICITAMENTE DAL TEMPO

DA CUI

$$\frac{d}{dt} T = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha} \right\}}_{Q_\alpha} \dot{q}^\alpha = Q_\alpha \dot{q}^\alpha$$

SE LE FORZE SONO CONSERVATIVE $Q_\alpha = \frac{\partial U^{(q)}}{\partial q^\alpha}$

$$\frac{d}{dt} T = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha}_{} = \frac{dU^{(q)}}{dt}$$

SE NON VI È DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

ALLORA SULLE TRAIETTORIE DEL MOTO SI AVRÀ

$$E = T - U = \text{COSTANTE}$$ (ENERGIA DEL SISTEMA)

"ENERGIA GENERALIZZATA"

DEFINIAMO LA QUANTITÀ

$$E(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) \qquad (*)$$

CONSIDERIAMO LA SUA DERIVATA TOTALE

$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\ddot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}} + \dot{q}^\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \right\} \dot{q}^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

CALCOLIAMO QUESTA QUANTITÀ SULLE TRAIETTORIE DEL MOTO CIOÈ SULLE SOLUZIONI $\bar{\gamma}$ DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(NC)}$$

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\bar{\gamma}} = Q_\alpha^{(NC)} \dot{q}^\alpha \Big|_{\bar{\gamma}} - \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\bar{\gamma}}$$

SE ADESSO ASSUMIAMO CHE LA LAGRANGIANA NON DIPENDA ESPLICITAMENTE DAL TEMPO (CIOÈ DIPENDE DAL TEMPO SOLTANTO TRAMITE LE q^α, $\dot{q}^\alpha$) AVREMO.

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\bar{\gamma}} = Q_\alpha^{(NC)} \dot{q}^\alpha \Big|_{\bar{\gamma}}$$

IN ASSENZA DI FORZE "NON CONSERVATIVE"

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\bar{\gamma}} = 0 \Rightarrow E\Big|_{\bar{\gamma}} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)\Big|_{\bar{\gamma}} = \text{COSTANTE}$$

NEL CASO DI FORZE "NON CONSERVATIVE" DI TIPO "DISSIPATIVO" 4

LA POTENZA

$$P = Q_\alpha^{(NC)} \dot{q}^\alpha \big)_\gamma \leq 0$$

DA CUI SI OTTERRA' CHE

$$\frac{dE}{dt}\bigg|_{\bar{\gamma}} = Q_\alpha^{(NC)} \dot{q}^\alpha \leq 0$$

SE ADESSO CONSIDERIAMO L'IPOTESI CHE LA LAGRANGIANA

NON DIPENDE IN MODO ESPLICITO DAL TEMPO, PER UN

SISTEMA MECCANICO OLONOMO

$$T = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \, ; \qquad U = U^{(c)} + \overbrace{(U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha)}^{\text{POTENZIALE GENERALIZZATO}} \, ;$$

DOVE $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(q^u)$

$$\begin{cases} U^{(c)} = U(q^u) \\ U_0 = U_0(q^u) \\ U_\alpha = U_\alpha(q^u) \end{cases}$$

NON VI E' UNA DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO(*)

DA CUI:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + U^{(c)} + U_0 + U_\alpha \dot{q}^\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + U_\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \underbrace{A_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}_{2T} + U_\alpha \dot{q}^\alpha$$

$$E = \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mathcal{L} = 2T + \cancel{U_\alpha \dot{q}^\alpha} - \cancel{T} - U^{(c)} - U_0 - \cancel{U_\alpha \dot{q}^\alpha} =$$

$$= T - \boxed{(U^{(c)} + U_0)}$$

POTENZIALE CONSERVATIVO.

QUINDI IN ASSENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE, E DI DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO, QUESTA E' PROPRIO L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA.

$$E\big|_{\bar{\gamma}} = T - (U^{(c)} + U_0)\big|_{\bar{\gamma}} = \text{COSTANTE}.$$

(*) QUESTO SIGNIFICA CHE NEL CASO, AD ESEMPIO, DELLE FORZE APPARENTI NON ABBIAMO LE FORZE NON UNIFORMI ASSOCIATE AD $\dot{\omega}$ CIOE' ω = COSTANTE. MA ABBIAMO LA F DI CORIOLIS CHE NON COMPIE LAVORO

"VARIABILI CICLICHE"

CONSIDERIAMO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0$$

DEF. DIREMO CHE UNA VARIABILE $\boxed{q^\alpha \text{ E' "CICLICA"}}$ SE LA LAGRANGIANA $\mathcal{L}$ NON DIPENDE DALLA q^α, CIOE'

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0}$$

DA CUI $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \text{COSTANTE}$

CIOE' AVREMO L'INTEGRALE PRIMO $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \text{COSTANTE}}$

"INTEGRALI PRIMI DEDOTTI DALLE EQUAZIONI DEL MOTO"

SIA DATA L'EQUAZIONE DEL MOTO

$$K\ddot{z} = F(z)$$

QUESTA AMMETTERA' L'INTEGRALE

$$\frac{1}{2}K\dot{z}^2 = \int_0^z F(\xi)\,d\xi + E$$

INFATTI DERIVANDO AVREMO:

$$\frac{1}{\cancel{2}}K\,\cancel{2}\,\cancel{\dot{z}}\,\ddot{z} = F(z)\,\cancel{\dot{z}} \Rightarrow K\ddot{z} = F(z)$$

ALLORA PER OGNI EQUAZIONE DI LAGRANGE DI QUESTA FORMA

$$K\ddot{q}_\alpha = F(q_\alpha)$$

AVREMO L'INTEGRALE PRIMO

$$\boxed{E_\alpha = \frac{1}{2}K\dot{q}_\alpha^2 - \int_0^{q_\alpha} F(\xi)\,d\xi}$$