CAPITOLO I.

ALGEBRA DEGLI SPAZI VETTORIALI.

I. SPAZI VETTORIALI.

I. PROPRIETA' ELEMENTARI DEGLI SPAZI VETTORIALI.

Definizione di spazio vettoriale.

Indichiamo con R il corpo dei numeri reali; con E indichiamo un qualsiasi altro insieme.

Diremo che E è uno spazio vettoriale sul corpo R se ammette le seguenti due leggi di composizione.

I) Una interna (indicata col simbolo +), ove per operazione interna si intende una applicazione definita nel prodotto cartesiano E x E e a valori in E stesso:

$$\varphi : E \times E \longrightarrow E \quad ;$$

questa applicazione è tale che ad una coppia ordinata di elementi di E associa ancora un elemento di E. Gli elementi di E verranno indicati con delle lettere sottolineate ($\underline{x}$) e saranno chiamati vettori.

Scriveremo perciò:

$$\forall\, \underline{x}\,,\, \underline{y} \in E \qquad (\underline{x}\,,\, \underline{y}) \longrightarrow \underline{x} + \underline{y} \quad .$$

2) Una esterna (indicata col simbolo ·), ove per operazione esterna si

intende una applicazione definita nel prodotto cartesiano $R \times E$ e a valori in E :

$$\varphi : R \times E \longrightarrow E \quad .$$

Scriveremo perciò:

$$\forall a \in R \ , \ \forall \underline{x} \in E \qquad (a\ ,\ \underline{x}) \longrightarrow a \cdot \underline{x} \quad .$$

In generale preferiamo omettere il $\cdot$ e porremo $a \cdot \underline{x} \equiv a\underline{x}$ (il simbolo $\cdot$ lo riserveremo, invece, al prodotto scalare).

Queste operazioni non possono essere date in modo arbitrario ma devono soddisfare i seguenti due gruppi di assiomi.

I gruppo -
i) $\forall \underline{x}\ ,\ \underline{y} \in E\ ,\quad \underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ (prop. commutativa)
ii) $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in E\ ,\quad \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$ (prop. associativa)
iii) $\exists\, \underline{o} \in E$ tale che $\underline{x} + \underline{o} = \underline{x}$
iv) $\forall \underline{x} \in E\ ,\ \exists\, \underline{x}' \in E \ :\ \underline{x} + \underline{x}' = \underline{o}$.

Questo primo gruppo di assiomi definisce su E una struttura di gruppo additivo commutativo (avremo, quindi, potuto affermare, invece di enunciare i quattro assiomi di cui sopra, che l'insieme E con l'operazione di somma (interna) è un gruppo additivo commutativo).

II gruppo - (questo secondo gruppo di assiomi riguarda in modo particolare l'operazione esterna e le relazioni che intercorrono tra le due operazioni).

i) $\forall \underline{x} \in E$ si ha $I \cdot \underline{x} = \underline{x}$
ii) $\forall a\ ,\ b \in R\ ,\ \forall \underline{x} \in E$ si ha $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$
iii) $\forall a\ ,\ b \in R\ ,\ \forall \underline{x} \in E$ si ha $(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$
iv) $\forall a \in R\ ,\ \forall \underline{x}\ ,\ \underline{y} \in E$ si ha $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$.

Quando si definisce una struttura teorica in maniera assiomatica il primo passo che bisogna compiere consiste nell'assicurarsi che oggetti matematici così definiti esistano veramente, bisogna, cioè, portare degli esempi i quali soddisfino i nostri assiomi.

Come primo esempio consideriamo lo spazio R^n .

Lo spazio R^n è l'insieme formato dalle n-uple dei numeri reali:

$$\underline{x} = (x^I, x^2, \ldots, x^n) \quad .$$

Definiamo come segue le operazioni interna ed esterna.

Fissiamo:

$$\underline{x} = (x^I, x^2, \ldots, x^n)$$
$$\underline{y} = (y^I, y^2, \ldots, y^n) \quad ,$$

per definizione poniamo:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x^I + y^I, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$
$$a\,\underline{x} = (ax^I, ax^2, \ldots, ax^n) \quad .$$

Ebbene, si può verificare che R^n, con le definizioni date, è uno spazio vettoriale sui reali.

Prima di proseguire, riportando un altro esempio, ricordiamo che il vettore $\underline{o}$, neutro rispetto alla somma, ed il vettore $\underline{x}'$, associato ad ogni vettore $\underline{x}$, come subito si verifica, sono unici.

Inoltre si può dimostrare che:

$$\underline{x}' = -\underline{x}$$

cioè, $\underline{x}'$ si ottiene applicando ad $\underline{x}$ il numero $-I$.

Altro esempio. Consideriamo un certo intervallo $[a , b]$ e consideriamo l'insieme delle funzioni continue in $[a , b]$:

$$C^o[a , b] = \{f: R \rightarrow R \text{ continue in } [a , b]\} .$$

Questo insieme si può dotare di una struttura di spazio vettoriale come segue.

Fissiamo:

$$\underline{x} = f(x) \in C^o[a , b]$$

$$\underline{y} = g(x) \in C^o[a , b] ,$$

per definizione poniamo:

$$(f + g) = f(x) + g(x)$$

$$(af) = af(x) .$$

Ebbene, si può dimostrare che, con le definizioni date, $C^o[a , b]$ è uno spazio vettoriale sui reali.

2. DIMENSIONE E BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE.

Uno dei concetti più importanti nella teoria degli spazi vettoriali è quello di dipendenza ed indipendenza lineare.

Definizione: n vettori $\underline{x}_I, \underline{x}_2, \dots , \underline{x}_n \in E$ sono linearmente indipendenti se, presa una qualunque combinazione lineare del tipo:

$$\text{(I)} \qquad a_I\underline{x}_I + a_2\underline{x}_2 + \dots + a_n\underline{x}_n ,$$

essa risulta eguale al vettore nullo allora e solo allora che sia:

$$a_I = a_2 = \dots = a_n = o$$

Quando esiste una n-upla di numeri reali non tutti nulli tali che una certa combinazione lineare del tipo (I) è uguale al vettore nullo, allora i vettori $\underline{x}_I$, $\underline{x}_2$, ... , $\underline{x}_n$ si dicono linearmente dipendenti.

Prima di proseguire introduciamo la seguente convenzione di scrittura. Chiamando $\underline{x}_i$ il generico vettore della combinazione lineare e a_i il generico coefficiente, invece di scrivere $a_I\underline{x}_I + a_2\underline{x}_2 + \dots + a_n\underline{x}_n = \underline{o}$, potremmo scrivere più comodamente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\underline{x}_i = \underline{o} \qquad (2)$$

Sempre per comodità di scrittura, quello che faremo sistematicamente, tranne quando vi siano pericoli di ambiguità, è di togliere nella (2) il simbolo di sommatoria. Più precisamente, ogni qualvolta ci troviamo di fronte ad espressioni con due indici ripetuti del tipo $a_i\underline{x}_i$, implicitamente si sottointende un'operazione di somma per tutti i valori attribuibili all'indice i . Questa convenzione sugli indici ripetuti viene intesa come "convenzione di Einstein".

Definiamo il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale. Dicesi dimensione di uno spazio vettoriale E il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

Definiamo, adesso, il concetto di base di uno spazio vettoriale.

Supponiamo che lo spazio vettoriale E abbia dimensione n :

$$\dim E = n ,$$

allora un insieme di n vettori $\{\underline{e}_i\}$ $(i = I, 2, \dots, n)$ linearmente indipendenti si dice base dello spazio vettoriale E .

Esempi. Consideriamo lo spazio R^n . Ci proponiamo di dimostrare che la dimensione di R^n è proprio uguale ad n . Basterà dimostrare che in R^n non possono trovarsi $n+I$ vettori linearmente indipendenti, cioè che ogni relazione lineare del tipo:

$$(3) \qquad c_I \underline{x}_I + c_2 \underline{x}_2 + \ldots + c_{n+I} \underline{x}_{n+I} = \underline{o}$$

non è banale. Per fare ciò osserviamo che la (3) è equivalente al seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} c_I x_I^I + c_2 x_2^I + \ldots + c_{n+I} x_{n+I}^I = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_I x_I^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_{n+I} x_{n+I}^n = o \end{cases} .$$

Questo che abbiamo ottenuto è un sistema di $n+I$ incognite in n equazioni omogeneo che, per il teorema di Rouche-Capelli, ammette infinite soluzioni.

Altro esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale $C^o[a , b]$. Ci proponiamo di dimostrare che:

$$\dim C^o[a , b] = \infty .$$

Basterà provare che esistono un numero infinito di vettori appartenenti a $C^o[a , b]$ che siano linearmente indipendenti. Infatti: consideriamo le seguenti funzioni (definite e continue su tutto R):

$$f_I = x \ , \ f_2 = x^2 \ , \ \ldots \ , \ f_n = x^n$$

(con n arbitrario); eseguiamo una combinazione lineare di questi vettori e uguagliamola alla funzione identicamente nulla:

$$a_I x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = o \quad \dots \quad ;$$

da ciò segue, per il principio d'identità dei polinomi, che:

$$a_I = a_2 = \dots = a_n = o \qquad .$$

I nostri vettori sono linearmente indipendenti e in numero infinito giacché n può variare in tutto il campo dei numeri naturali.

TEOREMA

Proposizione. Sia $\underline{x} \neq \underline{o}$, $\underline{x} \in E$, e sia $\{\underline{e}_i\}$ $(i = I, 2, \dots, n)$ una base di E, allora esistono e sono univocamente determinati n numeri reali $x^I, x^2, \dots, x^n$ non tutti nulli tali che $\underline{x}$ risulta essere una combinazione lineare degli elementi della base:

$$\boxed{\underline{x} = x^I \underline{e}_I + x^2 \underline{e}_2 + \dots + x^n \underline{e}_n = x^i \underline{e}_i} \quad .$$

3. CAMBIAMENTI DI BASE IN E_n. LEGGE DI CONTROVARIANZA.

Una delle domande che, a questo punto, ci si può porre, è la seguente: "Come cambiano le componenti controvarianti del vettore $\underline{x}$ al cambiare della base"? (Questa domanda, fra l'altro, ha un importante significato fisico: vedremo, infatti, che il concetto di base è collegato a quello di sistema di riferimento fisico).

Supponiamo di passare dalla base $\{\underline{e}_i\}$ alla base $\{\underline{e}_{i'}\}$, allora, per il teorema dimostrato al numero 2, il generico vettore $\underline{e}_i$ si può rappresentare univocamente come combinazione lineare dei vettori della nuova base:

$$\text{(I)} \qquad \underline{e}_i = A_i^{i'} \underline{e}_{i'} \qquad ,$$

ovvero, scrivendo esplicitamente:

$$\underline{e}_i = A_i^{I'} \underline{e}_{I'} + A_i^{2'} \underline{e}_{2'} + \dots + A_i^{n'} \underline{e}_{n'} \quad .$$

Possiamo, dunque, introdurre la matrice del cambiamento di base (I) (in questa matrice la riga i'-esima è formata dai coefficienti della combinazione lineare che esprime il vettore $\underline{e}_i$ in funzione dei vettori della nuova base):

SIA DATO UNO SPAZ. VETT. E CON $\dim E = n$

SIANO DATE DUE BASI DI TALE SPAZIO

$$\{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n} \qquad \{\underline{e}_{\alpha'}\}_{\alpha'=1}^{n}$$

ALLORA DATO UN $\forall\, \underline{v} \in E$ AVREMO.

$$\underline{v} = v^\alpha \underline{e}_\alpha \quad \text{OPPURE} \quad \underline{v} = v^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$$

CI CHIEDIAMO QUALI SIANO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE:

$$\underline{e}_\alpha \leftrightarrow \underline{e}_{\alpha'} \quad \text{ED} \quad v^\alpha \leftrightarrow v^{\alpha'}$$

DAL MOMENTO CHE $\forall$ VETTORE DI E PUO' ESSERE ESPRESSO TRAMITE I VETTORI DI UNA BASE AVREMO.

$$\underline{e}_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$$

(RICORDANDO CHE SUGLI INDICI "SATURATI" E' SOTTOINTESA UNA SOMMATORIA SU TALI INDICI)

CIOE':

$$\underline{e}_1 = A_1{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} = A_1{}^{1'} \underline{e}_{1'} + \dots + A_1{}^{n'} \underline{e}_{n'}$$
$$\underline{e}_2 = A_2{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} = A_2{}^{1'} \underline{e}_{1'} + \dots + A_2{}^{n'} \underline{e}_{n'}$$
$$\vdots$$
$$\underline{e}_n = A_n{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} = A_n{}^{1'} \underline{e}_{1'} + \dots + A_n{}^{n'} \underline{e}_{n'}$$

IN TERMINI MATRICIALI

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \vdots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1{}^{1'} & A_1{}^{2'} & \dots & A_1{}^{n'} \\ A_2{}^{1'} & A_2{}^{2'} & \dots & A_2{}^{n'} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_n{}^{1'} & A_n{}^{2'} & \dots & A_n{}^{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \underline{e}_{2'} \\ \vdots \\ \underline{e}_{n'} \end{pmatrix}$$

IN FORMA COMPATTA

INDICE DI COLONNA

$$\underline{e}_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$$

INDICE DI RIGA

$A_\alpha{}^{\alpha'}$ "MATRICE ASSOCIATA AL CAMBIAMENTO DI BASE"

OVVIAMENTE VALE IL VICEVERSA

$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\, \underline{e}_\alpha$ (DOVE OVVIAMENTE $A_{\alpha'}{}^{\alpha}$ E' LA MATRICE INVERSA DELLA $A_\alpha{}^{\alpha'}$)

INFATTI:

$$\underline{e}_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'}\, \underline{e}_{\alpha'} = A_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\beta}\, \underline{e}_\beta$$

MA $\underline{e}_\alpha = \delta_\alpha{}^\beta\, \underline{e}_\beta$ (ESSENDO $\delta_\alpha{}^\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$ DELTA DI KRONECKER)

DA CUI

$$A_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\beta}\, \underline{e}_\beta = \delta_\alpha{}^\beta\, \underline{e}_\beta$$

$\Rightarrow \left[A_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\beta} - \delta_\alpha{}^\beta \right] \underline{e}_\beta = 0$ ESSENDO $\{\underline{e}_\beta\}$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI ALLORA TUTTI I COEFFICIENTI DOVRANNO ESSERE NULLI

$$A_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\beta} = \delta_\alpha{}^\beta$$

BANALMENTE SI PROVA ANCHE CHE

$$A_{\alpha'}{}^{\alpha} A_\alpha{}^{\beta'} = \delta_{\alpha'}{}^{\beta'}$$

VEDIAMO ADESSO COME VARIANO LE COMPONENTI

V^α E $V^{\alpha'}$

$$\begin{cases} \underline{V} = V^{\alpha}\,\underline{e}_{\alpha} = V^{\alpha} A_{\alpha}{}^{\alpha'}\,\underline{e}_{\alpha'} \\ \underline{V} = V^{\alpha'}\,\underline{e}_{\alpha'} \end{cases} \Rightarrow \left[V^{\alpha} A_{\alpha}{}^{\alpha'} - V^{\alpha'} \right] \underline{e}_{\alpha'} = 0$$

ESSENDO $\{\underline{e}_{\alpha'}\}$ LINEAR. INDIPENDENTI $\Rightarrow$ $V^{\alpha'} = A^{\alpha'}{}_{\alpha} V^{\alpha}$

VALE OVVIAMENTE ANCHE IL VICEVERSA $V^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\alpha'} V^{\alpha'}$

QUINDI NELLA BASE $\{\underline{e}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{n}$ NELLA BASE $\{\underline{e}_{\alpha'}\}$

$$\underline{V} = V^{\alpha}\,\underline{e}_{\alpha} \qquad\qquad \underline{V} = V^{\alpha'}\,\underline{e}_{\alpha'}$$

CON: $(*)\ \begin{cases} \underline{e}_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\alpha'}\,\underline{e}_{\alpha'} \\ V^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\alpha'} V^{\alpha'} \end{cases}$ CON: $(**)\ \begin{cases} \underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\,\underline{e}_{\alpha} \\ V^{\alpha'} = A^{\alpha'}{}_{\alpha} V^{\alpha} \end{cases}$

DALLE $(*)$ OSSERVIAMO CHE SI PASSA DALLA BASE $\{\underline{e}_{\alpha'}\}$ ALLA BASE $\{\underline{e}_{\alpha}\}$ TRAMITE LA MATRICE $A_{\alpha}{}^{\alpha'}$ MENTRE SI PASSA DALLE COMPONENTI $V^{\alpha'}$ ALLE COMPONENTI V^{α} TRAMITE LA MATRICE $A^{\alpha}{}_{\alpha'}$ INVERSA

(LO STESSO ACCADE OSSERVANDO LE $(**)$)

QUINDI LE "COMPONENTI" V^{α} SI DICONO "CONTROVARIANTI" DEL VETTORE $\underline{V}$.

OSSERVIAMO CHE: SE ESPRIMIAMO LE COSE APPENA DETTE IN FORMA MATRICIALE, SE I VETTORI $\underline{e}_{\alpha}$ E/A $\underline{e}_{\alpha'}$ SI TRASFORMANO COME "VETTORI" COLONNA, ALLORA LE COMPONENTI CONTROVARIANTI SARANNO DESCRITTE TRAMITE "VETTORI" "RIGA" O "ELEMENTI" RIGA

$$V^\alpha = A^\alpha{}_{\alpha'} V^{\alpha'} \Rightarrow (V^1 \dots V^n) = (V^{1'} \dots V^{n'}) \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & \dots & A_{1'}{}^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n'}{}^1 & \dots & A_{n'}{}^n \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} V^1 = A^1{}_{\alpha'} V^{\alpha'} = A^1{}_{1'} V^{1'} + A^1{}_{2'} V^{2'} + \dots + A^1{}_{n'} V^{n'} \\ V^2 = A^2{}_{\alpha'} V^{\alpha'} = A^2{}_{1'} V^{1'} + A^2{}_{2'} V^{2'} + \dots + A^2{}_{n'} V^{n'} \\ \vdots \\ V^n = A^n{}_{\alpha'} V^{\alpha'} = A^n{}_{1'} V^{1'} + \dots \quad + A^n{}_{n'} V^{n'} \end{cases}$$

infatti

$$\underline{V} = V^\alpha \underline{e}_\alpha = (V^1 \dots V^n) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \vdots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (V^{1'} \dots V^{n'}) \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & \dots & A_{1'}{}^n \\ \vdots & & \\ A_{n'}{}^1 & \dots & A_{n'}{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1{}^{1'} & \dots & A_1{}^{n'} \\ \vdots & & \\ A_n{}^{1'} & \dots & A_n{}^{n'} \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \vdots \\ \underline{e}_{n'} \end{pmatrix}$$

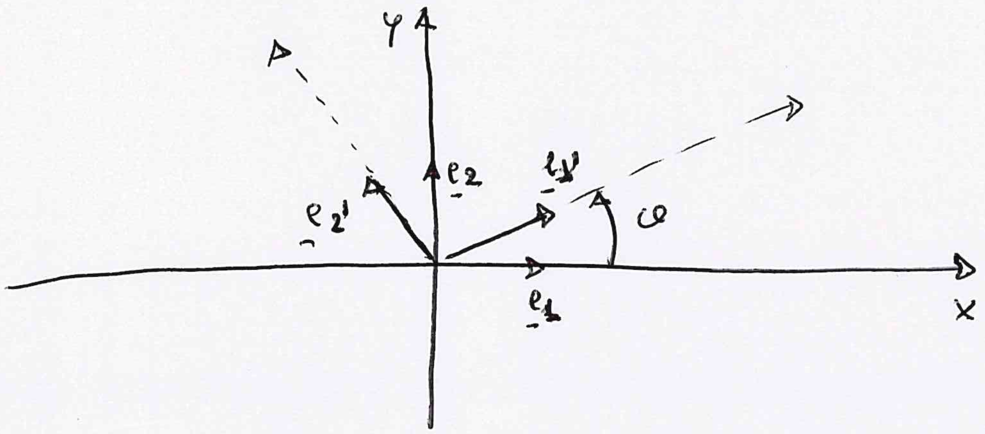
$$= (V^{1'} \dots V^{n'}) \begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \vdots \\ \underline{e}_{n'} \end{pmatrix} = V^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$$

cioè $\underline{V} = V^\alpha \underline{e}_\alpha = V^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$

<u>ESEMPIO</u>: Consideriamo una trasformazione descritta da una rotazione attorno all'asse $\underline{z}$.

Cioè consideriamo i vettori $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di un dato riferimento $\{O, \underline{e}_i\}$ e con una rotazione passiamo ad un altro riferimento $\{O, \underline{e}_{i'}\}$

Consideriamo una rotazione attorno all'asse $\vec{z}$ da cui nel piano $\{x, y\}$



Supponendo i vettori descritti ortonormali, avremo banalmente

$$\begin{cases} \underline{e}_2' = \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \sin\varphi\, \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2' = -\sin\varphi\, \underline{e}_1 + \cos\varphi\, \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3' = \underline{e}_3 \end{cases}$$

da cui

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_2' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix}}_{\underline{e}_{\alpha'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{\alpha'}{}^{\alpha}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\alpha}$$

BANALMENTE LA TRASFORMAZIONE INVERSA SARÀ DATA DALLA MATRICE TRASPOSTA (LE ROTAZIONI SONO TRASF. ORTOGONALI)

DA CUI

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\alpha =} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_\alpha{}^{\alpha'}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \underline{e}_{2'} \\ \underline{e}_{3'} \end{pmatrix}}_{\underline{e}_{\alpha'}}$$

DOVE BANALMENTE

$$\begin{cases} A_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\beta} = \delta_\alpha{}^\beta \\ A_{\alpha'}{}^{\alpha} A_\alpha{}^{\beta'} = \delta_{\alpha'}{}^{\beta'} \end{cases}$$

E BANALMENTE DA QUANTO DETTO PRIMA

$$\underline{V} = V^\alpha \underline{e}_\alpha = V^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$$

"PRODOTTO SCALARE"

INTRODUCIAMO L'APPLICAZIONE:

$$\tilde{\varphi} : E \times E \to \mathbb{R}$$

$\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in E$ ALLORA ALLA $(\underline{u}, \underline{v}) \to \tilde{\varphi}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

CON LE SEGUENTI PROPRIETÀ

1) $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in E$ $\quad \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (SIMMETRIA)
2) $\forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in E$
   $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{v} \cdot (\alpha \underline{u} + \beta \underline{w}) = \alpha (\underline{v} \cdot \underline{u}) + \beta (\underline{v} \cdot \underline{w})$

3) $\forall \, \underline{v} \in E$ con $\underline{v} \neq 0$ $\quad \underline{v} \cdot \underline{u} = 0 \iff \underline{u} = 0$

IN QUESTO CASO LO SPAZIO VETTORIALE E SI DICE "PSEUDOEUCLIDEO"

SE VALE ANCHE UNA 4ª PROPRIETA'

4) $\forall \, \underline{v} \in E \qquad \underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad (= 0 \iff \underline{v} = 0)$

LO SPAZIO SI DICE "EUCLIDEO".

METODO "COSTRUTTIVO" PER LA DEFINIZIONE DELLE "COMPONENTI COVARIANTI" DI UN VETTORE $\underline{v}$

- DATO UNO SPAZIO VETTORIALE PSEUDOEUCLIDEO E CON $\dim E = n$

CONSIDERIAMO IL PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI $\underline{u}, \underline{v} \in E$

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = v^\alpha \underline{e}_\alpha \cdot u^\beta \underline{e}_\beta = v^\alpha u^\beta \underbrace{\underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta}$$

"SARÀ CHIAMATA"

$g_{\alpha\beta}$ { MATRICE DELLA METRICA
(OPPURE)
"COMPONENTI COVARIANTI DEL TENSORE METRICO" }

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 & \cdots & \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_n \\ \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 & \cdots & \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \underline{e}_n \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_n \cdot \underline{e}_2 & \cdots & \underline{e}_n \cdot \underline{e}_n \end{pmatrix}$$

É CHIARO CHE SE LO SPAZIO È EUCLIDEO E LA BASE $\{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ È ORTONORMALE

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

SI PROVA CHE:

1) $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$

2) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

3) $g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}$

PROVIAMO LE PROPRIETA' 1), 2), 3)

1) SIA $\underline{V} = \underline{0}$ VETTORE NULLO ALLORA $\underline{V} = 0 \iff V^\alpha = 0 \quad \forall \alpha$

ESSENDO $\underline{V} = V^\alpha \underline{e}_\alpha = 0$

CALCOLIAMO $\underline{V} \cdot \underline{e}_\beta = V^\alpha \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = V^\alpha g_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \beta$

QUESTO E' UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO NELLE VARIABILI V^α DA CUI ESSENDO L'UNICA SOLUZIONE $V^\alpha = 0 \ \forall \alpha$ PER LA TEORIA SUI SISTEMI OMOGENEI AVREMO $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$

2) $g_{\alpha\beta} = \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = \underline{e}_\beta \cdot \underline{e}_\alpha = g_{\beta\alpha}$

3) CALCOLIAMO LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE.

$$g_{\alpha\beta} = \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = A_\alpha^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} \cdot A_\beta^{\beta'} \underline{e}_{\beta'} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} \underbrace{\underline{e}_{\alpha'} \cdot \underline{e}_{\beta'}}_{g_{\alpha'\beta'}}$$

$$= A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}$$

ALLORA ESSENDO $\det g_{\alpha\beta} \neq 0 \quad \exists\ g^{-1}$:

$$g^{-1} g = g\, g^{-1} = I$$

SE QUINDI SCRIVIAMO DI NUOVO

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = v^{\alpha} u^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

DEFINIAMO "COSTRUTTIVAMENTE" LA QUANTITA':

(1**) $\boxed{u_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, u^{\beta}}$ CHIAMANDOLE "COMPONENTI COVARIANTI" DI $\underline{u}$

OPPURE IN MODO ANALOGO

$$v_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, v^{\beta}$$ "COMPONENTI COVARIANTI" DI $\underline{v}$

VEDIAMO COME SI TRASFORMANO LE u_{α} (O LE v_{α})

IN CORRISPONDENZA DI UN CAMBIAMENTO DI BASE:

$$u_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = A_{\alpha}{}^{\alpha'} \underbrace{A_{\beta}{}^{\beta'}\, g_{\alpha'\beta'}\, A^{\beta}{}_{\gamma'}}_{\delta^{\beta'}_{\gamma'}} u^{\gamma'} =$$

$$= A_{\alpha}{}^{\alpha'} g_{\alpha'\beta'}\, \delta^{\beta'}_{\gamma'}\, u^{\gamma'} = A_{\alpha}{}^{\alpha'} \underbrace{g_{\alpha'\beta'}\, u^{\beta'}}_{u_{\alpha'}}$$

QUINDI $\boxed{u_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\alpha'} u_{\alpha'}}$

IL NOME "COVARIANTI" NASCE DAL FATTO CHE LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEI VETTORI DI BASE $\{\underline{e}_{\alpha}\}$ E DELLE COMPONENTI u_{α} E' DESCRITTA DALLA STESSA MATRICE cioè'

$$\underline{e}_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'}\, \underline{e}_{\alpha'} \quad (*)$$

$$u_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'}\, u_{\alpha'} \quad (**)$$

ABBIAMO VISTO CHE ESSENDO $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$ LA MATRICE $g_{\alpha\beta}$ E' INVERTIBILE. POSSIAMO QUINDI INVERTIRE LA RELAZIONE (1**) IN QUANTO $\exists\; g^{\alpha\beta}$ TALE CHE

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \quad \text{CON:} \quad \begin{cases} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma \\ g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma \end{cases}$$

LA MATRICE $g^{\alpha\beta}$ VERRA' CHIAMATA

- MATRICE INVERSA DELLA $g_{\alpha\beta}$
  OPPURE
- MATRICE "DUALE" DELLA $g_{\alpha\beta}$
  OPPURE
- "COMPONENTI CONTROVARIANTI DEL TENSORE METRICO"
  OPPURE
- TENSORE METRICO "CONTROVARIANTE" DI RANGO 2.

OSSERVIAMO CHE $\forall\, \underline{v} \in E \Rightarrow \underline{v} = v^\alpha \underline{e}_\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta \underline{e}_\alpha = v_\beta \underbrace{\left(g^{\alpha\beta}\underline{e}_\alpha\right)}_{e^\beta} = v_\beta e^\beta$

ESSENDO $\boxed{e^\beta = g^{\alpha\beta}\, \underline{e}_\alpha}$ (***)

cioè POSSIAMO DEFINIRE I NUOVI ELEMENTI

$\{e^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ "VETTORI DUALI" DEI VETTORI $\{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$

QUESTI POSSONO ESSERE VISTI COME "ELEMENTI DELLO SPAZIO E" IN QUANTO SARANNO ESPRESSI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI BASE $\underline{e}_\alpha$ TRAMITE DEI COEFFICIENTI ESPRESSI DALLE COMPONENTI $g^{\beta\alpha}$.

PROVIAMO ADESSO TRE PROPRIETA' RELATIVE ALLA MATRICE INVERSA

$g^{\alpha\beta}$

1) $\det g^{\alpha\beta} \neq 0$

2) $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$

3) $g^{\alpha\beta} = A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} g^{\alpha'\beta'}$

INFATTI:

ESSENDO $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$ $\exists\, g^{\alpha\beta}$ E' A OVVIAMENTE $\det(g^{\alpha\beta}) \neq 0$

SE QUINDI CONSIDERIAMO I VETTORI DUALI $\{e^{\alpha}\}$

$e^{\alpha} = g^{\gamma\alpha} \underline{e}_{\gamma}$ AVREMO CHE

$$c_{\alpha} e^{\alpha} = (c_{\alpha} g^{\gamma\alpha}) e_{\gamma} = 0 \Leftrightarrow c_{\alpha} g^{\gamma\alpha} = 0 \quad (\text{ESSENDO } \det g^{\gamma\alpha} \neq 0)$$

DA CUI AVREMO COME UNICA SOLUZIONE $c_{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha$

QUINDI I VETTORI $\{e^{\alpha}\}_{\alpha=1}^{n}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

INOLTRE ESSENDO VETTORI AI E POSSIAMO CONSIDERARE

$$\underline{e}^{\alpha} \cdot \underline{e}^{\beta} = g^{\gamma\alpha} \underline{e}_{\gamma} \cdot g^{\kappa\beta} \underline{e}_{\kappa} = g^{\gamma\alpha} g^{\kappa\beta} \underbrace{\underline{e}_{\gamma} \cdot \underline{e}_{\kappa}}_{g_{\gamma\kappa}} =$$

$$= g^{\gamma\alpha} \underbrace{g_{\gamma\kappa} g^{\kappa\beta}}_{\delta_{\gamma}^{\beta}} = g^{\beta\alpha}$$

QUINDI ABBIAMO PROVATO CHE

$$\boxed{g^{\alpha\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta}} = e^{\beta} \cdot e^{\alpha} = g^{\beta\alpha}$$

ABBIAMO VISTO CHE

$$\underline{V} = V^{\alpha} \underline{e}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} V_{\beta} \underline{e}_{\alpha} = V_{\beta} (g^{\beta\alpha} \underline{e}_{\alpha}) = V_{\beta} e^{\beta}$$

QUINDI

$$\underline{V} = V_{\beta} e^{\beta} = A_{\beta}^{\ \beta'} V_{\beta'} e^{\beta} = V_{\beta'} A_{\beta}^{\ \beta'} e^{\beta} = V_{\beta'} e^{\beta'}$$

DA CUI $\quad V_{\beta'} \left[e^{\beta'} - A^{\beta'}_{\ \beta} e^{\beta} \right] = 0 \qquad \forall V_{\beta'}$

QUINDI: (*) $\boxed{e^{\beta'} = A^{\beta'}_{\ \beta} e^{\beta}}$ E VICEVERSA $\boxed{e^{\beta} = A^{\beta}_{\ \beta'} e^{\beta'}}$

CHE E' LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEI VETTORI DUALI.

DA CUI SI PROVA

$$g^{\alpha\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} e^{\alpha'} \cdot A^{\beta}_{\ \beta'} e^{\beta'} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} A^{\beta}_{\ \beta'} \underbrace{e^{\alpha'} \cdot e^{\beta'}}_{g^{\alpha'\beta'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{g^{\alpha\beta} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} A^{\beta}_{\ \beta'} g^{\alpha'\beta'}}$$

(*) ⇒ LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEI VETTORI DUALI.

"RIEPILOGO"

$\{\underline{e}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{n} \qquad \{\underline{e}_{\alpha'}\}_{\alpha'=1}^{n}$

$\underline{V} = V^{\alpha} \underline{e}_{\alpha}$ OPPURE $\underline{V} = V^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} \underline{e}_{\alpha} = A_{\alpha}^{\ \alpha'} \underline{e}_{\alpha'} \\ V^{\alpha} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} V^{\alpha'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\ \alpha} \underline{e}_{\alpha} \\ V^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha} V^{\alpha} \end{cases}$$

DOVE $\begin{cases} A^{\alpha}_{\ \alpha'} A^{\alpha'}_{\ \beta} = \delta^{\alpha}_{\ \beta} \\ A_{\alpha}^{\ \alpha'} A_{\alpha'}^{\ \beta} = \delta_{\alpha}^{\ \beta} \end{cases}$

INTRODUCIAMO:

$g_{\alpha\beta} = \underline{e}_{\alpha} \cdot \underline{e}_{\beta}$

1) $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$

2) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

3) $g_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{\ \alpha'} A_{\beta}^{\ \beta'} g_{\alpha'\beta'}$

$\{e^{\alpha}\}_{\alpha=1}^{n} \qquad \{e^{\alpha'}\}_{\alpha'=1}^{n}$

$\underline{V} = V_{\alpha} e^{\alpha} \qquad \underline{V} = V_{\alpha'} e^{\alpha'}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} V_{\alpha} = A_{\alpha}^{\ \alpha'} V_{\alpha'} \\ e^{\alpha} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} e^{\alpha'} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\ \alpha} V_{\alpha} \\ e^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha} e^{\alpha}. \end{cases}$$

$g^{\alpha\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta}$

1) $\det g^{\alpha\beta} \neq 0$

2) $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$

3) $g^{\alpha\beta} = A^{\alpha}_{\ \alpha'} A^{\beta}_{\ \beta'} g^{\alpha'\beta'}$

LA CONNESSIONE TRA COMPONENTI "COVARIANTI", "CONTROVARIANTI"

VETTORI $\{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$, VETTORI DUALI $\{e^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ E' DATA

DALLE RELAZIONI:

$$\begin{cases} u_\alpha = g_{\alpha\beta}\, u^\beta \\ e_\alpha = g_{\alpha\beta}\, e^\beta \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u^\alpha = g^{\alpha\beta}\, u_\beta \\ e^\alpha = g^{\alpha\beta}\, \underline{e}_\beta \end{cases}$$

ESSENDO

$$\begin{cases} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha{}_\beta \\ g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha{}^\beta \end{cases}$$

IN REALTA' "SENZA DIRLO" IN MODO RIGOROSO (COSA CHE CERCHEREMO DI FARE ADESSO) CON QUESTA PROCEDURA "COSTRUTTIVA" (CIOE' DEFINENDO MATEMATICAMENTE CERTE QUANTITA' E FACENDO DEI CALCOLI) ABBIAMO INTRODOTTO UN NUOVO SPAZIO E^* DETTO "SPAZIO DUALE" DI E E ABBIAMO INTRODOTTO UN "ISOMORFISMO CANONICO" TRA QUESTI DUE SPAZI.

IN QUESTO MODO POTREMO IDENTIFICARE COMPLETAMENTE I DUE SPAZI INTRODOTTI PER CUI

$\forall\, \underline{v} \in E \quad : \underline{v} = v^\alpha \underline{e}_\alpha$ POTRA' ESSERE INTESO COME UN ELEMENTO DI E^* (E VICEVERSA) PERCUI ~~[illegible]~~

$$\underline{v} = v_\alpha e^\alpha$$

ESSENDO $\{e^\alpha\}$ I VETTORI DUALI DI E^*.

LA CONNESSIONE TRA GLI ELEMENTI DI E E DI E^* AVVIENE TRAMITE LA MATRICE DELLA METRICA INTRODOTTA.

"FORME LINEARI"

SIA E UNO SPAZ. VETT. TALECHE $\dim E = n$

DEFINIAMO L'APPLICAZIONE

$$f : E \to R \qquad \text{LINEARE SU } E$$

CIOÈ $\forall \underline{v}, \underline{u} \in E \quad \forall \alpha, \beta \in R$

$$f(\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}) = \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{u})$$

f SI DICE "FORMA LINEARE" O "**1**-FORMA".

INTRODUCIAMO L'INSIEME E^* (SPAZIO DUALE DI E)

$$E^* = \{ \forall f : E \to R \quad \text{LINEARI SU } E \}$$

SI PROVA CHE:

1) E^* E' UNO SPAZIO VETTORIALE

INTRODUCENDO LE DUE USUALI OPERAZIONI

A) $(f + g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v}) \in E^*$

B) $(\alpha f)(\underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) \in E^*$

DOVE SI VERIFICA CHE VALGONO TUTTE LE PROPRIETA' INTRODOTTE RELATIVE A QUESTE DUE OPERAZIONI. (VEDI PAG. 2

2) SI PROVA CHE: $\dim E^* = \dim E = n$

DEFINIAMO LE FORME LINEARI (FORME DUALI) e^α

ASSUMENDO CHE:

$$e^\alpha(\underline{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

COME AGISCONO QUESTE "FORME DUALI" SU UN GENERICO $\underline{v} \in E$?

$$e^\alpha(\underline{v}) = e^\alpha(v^\beta \underline{e}_\beta) = v^\beta\, e^\alpha(\underline{e}_\beta) = v^\beta\, \delta^\alpha_\beta = v^\alpha$$

QUINDI LE FORME LINEARI $\{e^\alpha\}$ SONO TALI CHE APPLICATE AD UN $\forall\, \underline{v} \in E$ MI FANNO OTTENERE LE SUE COMPONENTI CONTROVARIANTI (NELLA BASE e_α)

$$e^\alpha(\underline{v}) = v^\alpha$$

PROVIAMO CHE LE FORME $\{e^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

CONSIDERIAMO LA "FORMA" NULLA E CALCOLIAMO LA QUANTITA'

$$c_\alpha\, e^\alpha = 0 \qquad \text{APPLICANDOLA AI VETTORI } \underline{e}_\beta$$

$$c_\alpha\, e^\alpha(e_\beta) = c_\alpha\, \delta^\alpha_\beta = c_\beta = 0$$

QUINDI $c_\alpha e^\alpha = 0 \iff c_\alpha = 0$

IN QUESTO CASO QUINDI $\dim E^* \geq n$

(IN QUANTO AVREMO ALMENO n FORME $\{e^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI).

PROVIAMO ADESSO CHE:

$\forall\, f \in E^*$ POTRA' SCRIVERSI COME

(1) $f = f_\alpha\, e^\alpha$ PURCHE' I COEFFICIENTI $f_\alpha = f(\underline{e}_\alpha)$ (2)

E INFATTI CONSIDERO LA (2)

$$\underbrace{f_\beta}_{} = f(\underline{e}_\beta) = \underbrace{f_\alpha \,\delta^\alpha_\beta}_{} = f_\alpha \, e^\alpha(\underline{e}_\beta)$$

QUINDI $\forall f \in E^*$: $f(\underline{e}_\beta) = f_\alpha \, e^\alpha(\underline{e}_\beta)$

IN MODO PIÙ GENERALE AVREMO:

$$\forall f \in E^* \quad f(\underline{v}) = f(v^\beta \underline{e}_\beta) = v^\beta f(\underline{e}_\beta) = v^\beta f_\alpha \, e^\alpha(\underline{e}_\beta) =$$

$$= f_\alpha \, e^\alpha(v^\beta \underline{e}_\beta) = f_\alpha \, e^\alpha(\underline{v})$$

CIOÈ $\boxed{\forall f \in E^* \quad f(\underline{v}) = f_\alpha \, e^\alpha(\underline{v})}$ PURCHÉ $\boxed{f_\alpha = f(\underline{e}_\alpha)}$

IN QUESTO MODO ABBIAMO PROVATO CHE $\dim E^* = n$.

3) PROVIAMO ADESSO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONI

$$\begin{cases} f_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'} f_{\alpha'} \\ e^\alpha = A^\alpha{}_{\alpha'} \, e^{\alpha'} \end{cases}$$

DALLA DEFINIZIONE

$$f_\alpha = f(\underline{e}_\alpha) = f(A_\alpha{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}) = A_\alpha{}^{\alpha'} \underbrace{f(\underline{e}_{\alpha'})}_{f_{\alpha'}} = A_\alpha{}^{\alpha'} f_{\alpha'}$$

CIOÈ $\boxed{f_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'} f_{\alpha'}}$

ABBIAMO VISTO CHE

$$\forall f \in E^* \quad f = f_\alpha e^\alpha \quad \text{PURCHE'} \quad f_\alpha = f(\underline{e}_\alpha)$$

IN PARTICOLARE CONSIDERIAMO COME "FORME" f PROPRIO LE FORME $\{e^{\alpha'}\}_{\alpha'=1}^{n}$

QUINDI PER OGNI VALORE α' POTREMO SCRIVERE

$$(*) \quad e^{\alpha'} = f_\alpha^{\alpha'} e^\alpha \qquad \text{CON} \quad f_\alpha^{\alpha'} = e^{\alpha'}(\underline{e}_\alpha)$$

MA $f_\alpha^{\alpha'} = e^{\alpha'}(\underline{e}_\alpha) = e^{\alpha'}(A_\alpha^{\gamma'}\underline{e}_{\gamma'}) = A_\alpha^{\gamma'} \underbrace{e^{\alpha'}(\underline{e}_{\gamma'})}_{\delta^{\alpha'}_{\gamma'}} = A_\alpha^{\alpha'}$

QUINDI OTTENIAMO CHE $f_\alpha^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'}$

DA CUI PER LA $(*)$ AVREMO

$$\boxed{e^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'} e^\alpha} \qquad \text{C.V.D}$$

4) PROVIAMO ADESSO CHE POSSIAMO INTRODURRE UN "ISOMORFISMO CANONICO" INDOTTO DALLA MATRICE DELLA METRICA $g_{\alpha\beta}$ TRA I DUE SPAZI VETT. E ED E^*.

DEFINIAMO QUINDI L'ISOMORFISMO DESCRITTO DALLA APPLICAZIONE

$$\tau : E \rightarrow E^* \quad \text{TALE CHE} \quad \forall \underline{v} \in E \quad \tau(\underline{v}) \in E^*$$

DEFINITO COME

$$\forall \underline{v} \in E \left(\text{NELLA BASE } \{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}\right) \underline{v} = v^\alpha \underline{e}_\alpha \Rightarrow \tau(\underline{v}) = v^\alpha \varepsilon_\alpha$$

$$\text{CON} \quad \varepsilon_\alpha = g_{\alpha\beta} e^\beta$$

DOVE I COEFFICIENTI DELLA APPLICAZIONE $\tau(\underline{v})$ SONO PROPRIO LE COMPONENTI CONTROVARIANTI DI $\underline{v}$ NELLA BASE $\{\underline{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$.

1) OSSERVIAMO CHE $\varepsilon_\alpha \in E^* \ \forall \alpha$ IN QUANTO ESPRESSI COME COMBINAZIONI LINEARI DELLE FORME $\{e^\beta\}_{\beta=1}^{n}$ (CHE COSTITUISCONO UNA BASE DI E^*).

SI PROVA CHE LE QUANTITÀ ε_α SONO FORME LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLO SPAZIO E^*

INFATTI CONSIDERANDO LA FORMA NULLA AVREMO CHE

$$c^\alpha \varepsilon_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad (c^\alpha g_{\alpha\beta}) e^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad c^\alpha g_{\alpha\beta} = 0$$

DA CUI ESSENDO $\det g_{\alpha\beta} \neq 0 \Rightarrow c^\alpha = 0$

QUINDI LE n FORME $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ POSSONO ESSERE CONSIDERATE COME UNA BASE DI E^*.

VEDIAMO COME SI TRASFORMANO GLI ELEMENTI ε_α IN CORRISPONDENZA DI UN CAMBIAMENTO DI BASE:

$$\varepsilon_{\alpha'} = g_{\alpha'\beta'} e^{\beta'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \underbrace{\underbrace{A_{\beta'}{}^{\beta}}\, g_{\alpha\beta}\, \underbrace{A^{\beta'}{}_{\gamma}}}_{\delta^\beta_\gamma} e^\gamma = A_{\alpha'}{}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \underbrace{\delta^\beta_\gamma e^\gamma}_{e^\beta} =$$

$$= A_{\alpha'}{}^{\alpha} \underbrace{g_{\alpha\beta} e^\beta}_{\varepsilon_\alpha} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \varepsilon_\alpha$$

QUINDI

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \varepsilon_\alpha}$$

PROVIAMO CHE L'ISOMORFISMO $\tau(\underline{v})$ E' "CANONICO" CIOE' NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE.

INFATTI CAMBIANDO BASE AVREMO PER COSTRUZIONE:

$\forall\, \underline{v} \in E$ CON $\underline{v} = v^\alpha \underline{e}_\alpha \Rightarrow \tau(\underline{v}) = v^\alpha \varepsilon_\alpha$ CON $\varepsilon_\alpha = g_{\alpha\beta} e^\beta$

$\forall\, \underline{v} \in E$ CON $\underline{v} = v^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} \Rightarrow \tau(\underline{v}) = v^{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'}$ CON $\varepsilon_{\alpha'} = g_{\alpha'\beta'} e^{\beta'}$

SE ADESSO PROVIAMO CHE $v^\alpha \varepsilon_\alpha = v^{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'}$ ALLORA L'ISOMORFISMO NON DIPENDERA' DALLA SCELTA DELLA BASE E SI DIRA' CANONICO.

$$V^{\alpha'}\varepsilon_{\alpha'} = \underbrace{A^{\alpha'}{}_{\alpha}\, V^{\alpha}\, A_{\alpha'}{}^{\beta}}_{\delta_\alpha{}^\beta}\, \underline{e}_{\beta} = V^{\alpha} e_{\beta}\, \delta^{\beta}{}_{\alpha} = V^{\alpha}\, \varepsilon_{\alpha}$$

ESSENDO L'ISOMORFISMO "CANONICO" AVREMO QUINDI UNA COMPLETA "IDENTIFICAZIONE" DEI DUE SPAZI VETT. E ED E*.

IN ALTRE PAROLE:

$\forall\ \underline{v}$ PUO' ESSERE CONSIDERATO COME UN ELEMENTO DELLO SPAZIO VETTORIALE E, OPPURE COME UNA FORMA LINEARE DI E^*, E QUESTO NON DIPENDERA' DALLA SCELTA DELLA BASE

ESSENDO
$$\underline{V} = V^{\alpha}\, \underline{e}_{\alpha} = V_{\alpha}\, e^{\alpha}$$

QUESTO ISOMORFISMO E' INDOTTO DALLA MATRICE DELLA METRICA $g_{\alpha\beta}$ PER IL TRAMITE DELLE RELAZIONI:

$$\begin{cases} e_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, e^{\beta} & \qquad V_{\alpha} = g_{\alpha\beta} V^{\beta} \\ e^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\, \underline{e}_{\beta} & \qquad V^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\, V_{\beta} \end{cases}$$

ESSENDO
$$\begin{cases} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \ ; \quad g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma} \\ g^{\alpha}{}_{\gamma} = g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \quad (\text{SEMPRE}). \end{cases}$$

—o—

TENSORI

SIA E UNO SPAZIO VETTORIALE TALE CHE $\dim E = n$

SIA E^* LO SPAZIO DUALE DI E TALE CHE $\dim E^* = n$

SI CHIAMA "TENSORE DI RANGO 1" OGNI APPLICAZIONE "LINEARE"

$$T : E \to \mathbb{R} \quad \text{O ANALOGAMENTE} \quad T : E^* \to \mathbb{R}$$

TENSORI DI RANGO 1:

SIA DATA UNA APPLICAZIONE LINEARE

$$T : E \to \mathbb{R}$$

(LINEARE $\Rightarrow$ $T(\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}) = \alpha T(\underline{v}) + \beta T(\underline{u})$)

ALLORA $\forall \underline{v} \in E$ $\quad T(\underline{v}) = T(v^\alpha \underline{e}_\alpha) = v^\alpha \underbrace{T(\underline{e}_\alpha)}_{T_\alpha} = v^\alpha T_\alpha$

CHIAMIAMO $\boxed{T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha)}$ "TENSORE COVARIANTE DI RANGO 1" (OPPURE "COMPONENTI COVARIANTI DI UN TENSORE DI RANGO 1")

ANALOGAMENTE CONSIDERIAMO UNA APPLICAZIONE

$$T : E^* \to \mathbb{R} \quad \text{(LINEARE)}$$

(LINEARE $\Rightarrow$ $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$)

$\forall f \in E^*$ AVREMO $T(f) = T(f_\alpha e^\alpha) = f_\alpha \underbrace{T(e^\alpha)}_{T^\alpha} = f_\alpha T^\alpha$

CHIAMIAMO $\boxed{T^\alpha = T(e^\alpha)}$ "TENSORE CONTROVARIANTE DI RANGO 1" (OPPURE "COMPONENTI CONTROVARIANTI" DI UN TENSORE DI RANGO 1")

"TENSORI DI RANGO 2"

DEF. DEFINIAMO "TENSORE DI RANGO 2" OGNI APPLICAZIONE BILINEARE: $T : E \times E \to \mathbb{R}$; $T : E^* \times E^* \to \mathbb{R}$; $T : E^* \times E \to \mathbb{R}$; $T : E \times E^* \to \mathbb{R}$

SIA DATA UNA APPLICAZIONE BILINEARE

$$T : E \times E \to \mathbb{R}$$

$\forall \underline{v}, \underline{u} \in E \qquad (\underline{v}, \underline{u}) \in E \times E \quad \Rightarrow \quad T(\underline{v}, \underline{u}) \in \mathbb{R}$

"BILINEARE" SIGNIFICA LINEARE SU ENTRAMBE LE VARIABILI

$$T(\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}, \underline{w}) = \alpha T(\underline{v}, \underline{w}) + \beta T(\underline{u}, \underline{w})$$

$$T(v, \alpha \underline{u} + \beta \underline{w}) = \alpha T(v, u) + \beta T(\underline{v}, w)$$

ALLORA $\forall\ \underline{v}, \underline{u} \in E$

$$T(\underline{v}, \underline{u}) = T(v^\alpha \underline{e}_\alpha, u^\beta \underline{e}_\beta) = v^\alpha u^\beta \underbrace{T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)}_{T_{\alpha\beta}} = v^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}$$

CHIAMIAMO

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)}$$

"TENSORE COVARIANTE DI RANGO 2"
("COMPONENTI COVARIANTI" DI UN TENSORE DI RANGO 2)

-o-

ANALOGAMENTE SIA DATA:

$T : E^* \times E^* \to \mathbb{R}$ BILINEARE (CIOÈ LINEARE SU ENTRAMBE LE VARIABILI $f, g \in E^*$)

$$\forall\ f, g \in E^* \quad (f, g) \to T(f, g) \in \mathbb{R}$$

ALLORA $\forall\ f, g \in E^*$

$$T(f, g) = T(f_\alpha e^\alpha, g_\beta e^\beta) = f_\alpha g_\beta \underbrace{T(e^\alpha, e^\beta)}_{T^{\alpha\beta}} = f_\alpha g_\beta T^{\alpha\beta}$$

CHIAMIAMO:

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = T(e^\alpha, e^\beta)}$$

"TENSORE CONTROVARIANTE DI RANGO 2"
("COMPONENTI CONTROVARIANTI" DI UN TENSORE DI RANGO 2)

INFINE CONSIDERIAMO:

$T : E^* \times E \to \mathbb{R}$ BILINEARE (CIOÈ LINEARE RISPETTO AD ENTRAMBE LE VARIABILI $f \in E^*$ ED $\underline{v} \in E$)

$\forall f \in E^* \; \forall \underline{v} \in E \quad (f, \underline{v}) \to T(f, v) \in \mathbb{R}$

QUINDI $\forall f \in E^* \; \forall \underline{v} \in E$

$$T(f, \underline{v}) = T(f_\alpha e^\alpha, v^\beta \underline{e}_\beta) = f_\alpha v^\beta \underbrace{T(e^\alpha, \underline{e}_\beta)}_{T^\alpha_{\ \beta}} = f_\alpha v^\beta T^\alpha_{\ \beta}$$

CHIAMIAMO "TENSORE MISTO DI RANGO 2 UNA VOLTA CONTROVARIANTE ED UNA VOLTA COVARIANTE"

$$\boxed{T^\alpha_{\ \beta} = T(e^\alpha, \underline{e}_\beta)}$$

(OPPURE) ("COMPONENTI MISTE DI UN TENSORE DI RANGO 2 UNA VOLTA CONTROVARIANTE ED UNA VOLTA COVARIANTE")

$$\boxed{\text{QUALI SONO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE DELLE } T_\alpha, \; T^\alpha, \; T_{\alpha\beta}, \; T^{\alpha\beta}, \; T^\alpha_{\ \beta}}$$

IN CORRISPONDENZA DI UN CAMBIAMENTO DI BASE:

1) $T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha) = T(A_\alpha^{\ \alpha'} \underline{e}_{\alpha'}) = A_\alpha^{\ \alpha'} T(\underline{e}_{\alpha'}) = A_\alpha^{\ \alpha'} T_{\alpha'}$

2) $T^\alpha = T(e^\alpha) = T(A^\alpha_{\ \alpha'} e^{\alpha'}) = A^\alpha_{\ \alpha'} T(e^{\alpha'}) = A^\alpha_{\ \alpha'} T^{\alpha'}$

3) $T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = T(A_\alpha^{\ \alpha'} \underline{e}_{\alpha'}, A_\beta^{\ \beta'} \underline{e}_{\beta'}) = A_\alpha^{\ \alpha'} A_\beta^{\ \beta'} T(\underline{e}_{\alpha'}, \underline{e}_{\beta'})$
$= A_\alpha^{\ \alpha'} A_\beta^{\ \beta'} T_{\alpha'\beta'}$

4) $T^{\alpha\beta} = T(e^\alpha, e^\beta) = T(A^\alpha_{\ \alpha'} e^{\alpha'}, A^\beta_{\ \beta'} e^{\beta'}) = A^\alpha_{\ \alpha'} A^\beta_{\ \beta'} T(e^{\alpha'}, e^{\beta'})$
$= A^\alpha_{\ \alpha'} A^\beta_{\ \beta'} T^{\alpha'\beta'}$

5) $T^\alpha_{\ \beta} = T(e^\alpha, \underline{e}_\beta) = T(A^\alpha_{\ \alpha'} e^{\alpha'}, A_\beta^{\ \beta'} \underline{e}_{\beta'}) = A^\alpha_{\ \alpha'} A_\beta^{\ \beta'} T(e^{\alpha'}, \underline{e}_{\beta'})$
$= A^\alpha_{\ \alpha'} A_\beta^{\ \beta'} T^{\alpha'}_{\ \beta'}$

QUINDI BANALMENTE

$$\begin{cases} T_\alpha = A_\alpha{}^{\alpha'} T_{\alpha'} \\ T^\alpha = A^\alpha{}_{\alpha'} T^{\alpha'} \\ T_{\alpha\beta} = A_\alpha{}^{\alpha'} A_\beta{}^{\beta'} T_{\alpha'\beta'} \\ T^{\alpha\beta} = A^\alpha{}_{\alpha'} A^\beta{}_{\beta'} T^{\alpha'\beta'} \\ T^\alpha{}_\beta = A^\alpha{}_{\alpha'} A_\beta{}^{\beta'} T^{\alpha'}{}_{\beta'} \end{cases}$$

← "LEGGI DI TRASFORMAZIONI" IN CORRISPONDENZA DI UN CAMBIAMENTO DI BASE.

COME SONO CONNESSE TRA LORO QUESTE QUANTITÀ:

$$\begin{cases} T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha) = T(g_{\alpha\beta} e^\beta) = g_{\alpha\beta} T(e^\beta) = g_{\alpha\beta} T^\beta \\ T^\alpha = T(e^\alpha) = T(g^{\alpha\beta} \underline{e}_\beta) = g^{\alpha\beta} T(\underline{e}_\beta) = g^{\alpha\beta} T_\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = T(g_{\alpha\gamma} e^\gamma, g_{\beta\mu} e^\mu) = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} T^{\gamma\mu} \\ T^{\alpha\beta} = T(e^\alpha, e^\beta) = T(g^{\alpha\gamma} \underline{e}_\gamma, g^{\beta\mu} \underline{e}_\mu) = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} T_{\gamma\mu} \end{cases}$$

OPPURE

$$T^{\alpha\beta} = T(e^\alpha, e^\beta) = T(e^\alpha, g^{\beta\mu} \underline{e}_\mu) = g^{\beta\mu} T(e^\alpha, \underline{e}_\mu) =$$
$$= g^{\beta\mu} T^\alpha{}_\mu$$

$$T^\alpha{}_\beta = T(e^\alpha, \underline{e}_\beta) = T(g^{\alpha\mu} \underline{e}_\mu, \underline{e}_\beta) = g^{\alpha\mu} T(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\beta) = g^{\alpha\mu} T_{\mu\beta}$$

CIOÈ PER OGNI INDICE CHE SI ABBASSA (O SI ALZA) INTERVERRÀ LA "MATRICE DELLA METRICA" O LA SUA "INVERSA".

UN PARTICOLARE ESEMPIO DI TENSORE DOPPIO È IL TENSORE METRICO.

$$g : E \times E \to R \qquad \text{bilineare}$$

$$g(\underline{u}, \underline{v}) = g(u^\alpha \underline{e}_\alpha, v^\beta \underline{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta \underbrace{g(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)}_{g_{\alpha\beta}} =$$

$$= u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$$

COMPONENTI COVARIANTI DEL TENSORE METRICO

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = g(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta}$$

ANALOGAMENTE:

$$g : E^* \times E^* \to R \qquad \text{bilineare}$$

$$g(f, h) = g(f_\alpha e^\alpha, h_\beta e^\beta) = f_\alpha h_\beta \underbrace{g(e^\alpha, e^\beta)}_{g^{\alpha\beta}}$$

$$= f_\alpha h_\beta g^{\alpha\beta}$$

COMPONENTI CONTROVARIANTI DEL TENSORE METRICO

$$\boxed{g^{\alpha\beta} = g(e^\alpha, e^\beta) = e^\alpha \cdot e^\beta}$$

OSSERVIAMO CHE POSSIAMO DEFINIRE LE COMPONENTI MISTE UTILIZZANDO LA REGOLA PRECEDENTEMENTE INTRODOTTA PER "ALZARE" O "ABBASSARE" UN INDICE.

$$\begin{cases} g^{\alpha}{}_{\beta} = g_{\beta\kappa}\, g^{\kappa\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta} \\ \\ g_{\beta}{}^{\alpha} = g^{\alpha\kappa}\, g_{\kappa\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \end{cases}$$

LE COMPONENTI "MISTE" DEL TENSORE METRICO "SONO SEMPRE UGUALI ALLA DELTA DI KRONECKER"

— o —

SE GENERALIZZIAMO POSSIAMO DEFINIRE:

TENSORE DI RANGO $K = r + s$ — r VOLTE CONTROVARIANTE, s VOLTE COVARIANTE

TRAMITE L'APPLICAZIONE

$$T : \underbrace{E^* \times E^* \times \cdots E^*}_{r \text{ VOLTE}} \times \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{s \text{ VOLTE}} \rightarrow R$$

"MULTILINEARE" (CIOE' LINEARE SU TUTTE LE VARIABILI)

QUINDI DATE LE FORME $f_1, f_2 \,..\, f_r$ (FORME DI E^*)

DATI I VETTORI $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \,..\, v_s$ (VETTORI DI E)

$$T(f_1, f_2, \ldots f_r, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots v_s) =$$

$$= T(f_{1 i_1} e^{i_1}, f_{2 i_2} e^{i_2}, \ldots f_{r i_r} e^{i_r}, V_1^{j_1} \underline{e}_{j_1}, V_2^{j_2} \underline{e}_{j_2}, \ldots V_s^{j_s} \underline{e}_{j_s})$$

$$= f_{1 i_1} f_{2 i_2} \cdots f_{r i_r} V_1^{j_1} V_2^{j_2} \ldots V_s^{j_s} \underbrace{T(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots e^{i_r}, \underline{e}_{j_1}, \ldots \underline{e}_{j_s})}_{T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}}$$

$$\boxed{T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = T(e^{i_1}, \ldots e^{i_r}, \underline{e}_{j_1}, \ldots \underline{e}_{j_s})}$$

TENSORE DI RANGO $K = r + s$

r-VOLTE CONTROVARIANTE E s-VOLTE COVARIANTE

LEGGE DI TRASFORMAZIONI

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \dots A^{i_r}_{i'_r} A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{j'_s}_{j_s} T^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s}$$

OGNI VOLTA CHE SI ALZA O ABBASSA UN INDICE INTERVIENE LA MATRICE DELLA METRICA O LA SUA INVERSA

$$T_{\alpha}{}^{i_2 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} = g_{\alpha k} T^{k i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$$

$$T^{\alpha i_1 \dots i_r}{}_{j_2 \dots j_s} = g^{\alpha k} T^{i_1 \dots i_r}_{k j_2 \dots j_s}$$

VEDIAMO COME POSSONO ESSERE VISTI I TENSORI DI VARIO RANGO

NOTA: QUANDO ABBIAMO INTRODOTTO LO SPAZIO DUALE E^*

$E^* \equiv \{ \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ LINEARE} \}$

ABBIAMO INTRODOTTO: "BASE DUALE" $\{e^\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$: $e^\alpha(\underline{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$

INOLTRE $\forall \underline{v} \in E$ $e^\alpha(\underline{v}) = v^\alpha$

QUANDO ABBIAMO DEFINITO LE "COMPONENTI COVARIANTI" DI UN TENSORE DI RANGO 1 ABBIAMO INTRODOTTO L'APPLICAZIONE

(1) $T : E \to \mathbb{R}$ LINEARE, DEFINENDO

$T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha)$ CON $T(\underline{v}) = v^\alpha T_\alpha$

MA DALLA (1) T E' UN ELEMENTO DI E^* DA CUI ESSENDO

$v^\alpha = e^\alpha(\underline{v})$ SCRIVEREMO

(2) $T(\underline{v}) = T_\alpha e^\alpha(\underline{v})$ CON $T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha)$

ALLORA LE COMPONENTI "COVARIANTI" T_α DI UN TENSORE DI RANGO 1 POSSONO, PER LA (2), ESSERE VISTE COME LE COMPONENTI COVARIANTI DI UN VETTORE DELLO SPAZIO E^* ESSENDO

$$\boxed{T(\underline{v}) = T_\alpha\, e^\alpha(\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in E \quad \text{CON } T_\alpha = T(\underline{e}_\alpha)}$$

GENERALIZZIAMO QUESTA PROCEDURA:

DEFINIAMO UN NUOVO SPAZIO ("PRODOTTO TENSORIALE" DEI DUE SPAZI E^* PER E^*)

$$E^* \otimes E^* \equiv \{\forall\, f : E \times E \to \mathbb{R} \quad \text{BILINEARI}\}$$

POSSIAMO INTRODURRE LE DUE OPERAZIONI

1) $$(f+g)(\underline{v}, \underline{u}) = f(\underline{v}, \underline{u}) + g(\underline{v}, \underline{u}) \in E^* \otimes E^*$$

2) $$(\alpha f)(\underline{v}, \underline{u}) = \alpha f(\underline{v}, \underline{u}) \in E^* \otimes E^*$$

CON LE RELATIVE PROPRIETA' ASSOCIATE ALLE DUE OPERAZIONI APPENA INTRODOTTE.
ALLORA LO SPAZIO $E^* \otimes E^*$ E' UNO SPAZIO VETTORIALE

(SPAZIO VETTORIALE DELLE 2-FORME)

DEFINIAMO COME ELEMENTI DELLO SPAZIO $E^* \otimes E^*$

LE 2-FORME $$e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) = \delta^\alpha_\mu\, \delta^\beta_\rho$$

VEDIAMO COME AGISCONO SU UNA QUALSIASI COPPIA $(\underline{v}, \underline{u})$

$$e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{v}, \underline{u}) = e^\alpha \otimes e^\beta(v^\mu \underline{e}_\mu, u^\rho \underline{e}_\rho) = v^\mu u^\rho \underbrace{e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho)}_{\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\rho}$$

QUINDI

$$\boxed{e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{v}, \underline{u}) = v^\alpha u^\beta.}$$

E' POSSIBILE PROVARE CHE

1) $\{ e^\alpha \otimes e^\beta \}_{\alpha, \beta = 1}^{n}$ SONO n^2 ~~FORME~~ FORME DI $E^* \otimes E^*$, LINEARMENTE INDIPENDENTI

2) SE $\dim E = n$ ALLORA LA DIMENSIONE DI $E^* \otimes E^*$ E' n^2

3) $\forall$ 2-FORMA DI $E^* \otimes E^*$ f POTRA' ESPRIMERSI COME

$$\boxed{f = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta}$$ PURCHE' $$\boxed{f_{\alpha\beta} = f(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)}$$

INOLTRE VARRANNO LE SEGUENTI LEGGI DI TRASFORMAZIONE ASSOCIATE AD UN CAMBIAMENTO DI BASE NELLO SPAZIO $E^* \otimes E^*$

4) $$\begin{cases} f_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} f_{\alpha'\beta'} \\ e^\alpha \otimes e^\beta = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'}\, e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'} \end{cases}$$

[PROPRIETA' 1) - 4) ESERCIZIO ~~DA~~ SVOLGERE A CASA (VEDI APPENDICE)]

RIPRENDIAMO LA DEF. DI COMPONENTI COVARIANTI DI UN TENSORE DI RANGO 2.

(3) $T : E \times E \to \mathbb{R}$ BILINEARE

$$T(\underline{v}, \underline{u}) = v^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta} \qquad \text{CON } T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)$$

ALLORA LA (3) POTRA ESSE VISTA COME UN ELEMENTO DELLO SPAZIO $E^* \otimes E^* = \{ \forall f : E \times E \to \mathbb{R} \text{ BILINEARE} \}$

RICORDIAMO CHE LA BASE DUALE

$$e^\alpha \otimes e^\beta (\underline{v}, \underline{u}) = v^\alpha u^\beta$$

ALLORA BANALMENTE

$$T(\underline{v}, \underline{u}) = T_{\alpha\beta} v^\alpha u^\beta = T_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta (\underline{v}, \underline{u}) \quad \forall \underline{v}, \underline{u} \in E.$$

CON $T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)$

CONCLUSIONE:

LE "COMPONENTI COVARIANTI DI UN TENSORE DI RANGO 2" $T_{\alpha\beta}$ POSSONO ESSERE VISTE COME LE COMPONENTI COVARIANTI DI UN ELEMENTO $T \in E^* \otimes E^*$ (TENSORE DOPPIO COVARIANTE) ESSENDO:

$$\boxed{\forall \underline{v}, \underline{u} \in E \qquad T(\underline{v}, \underline{u}) = T_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta (\underline{v}, \underline{u})}$$

CON

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = T(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)}$$

ESSENDO LE n^2 2-FORME $\{e^\alpha \otimes e^\beta\}_{\alpha,\beta=1}^{n}$ UNA BASE DI $E^* \otimes E^*$.

ALCUNI TESTI CHIAMANO LO SPAZIO VETTORIALE $E^* \otimes E^*$ "SPAZIO PRODOTTO TENSORIALE" (ALCUNI TESTI LO CHIAMANO "SPAZIO PRODOTTO ESTERNO") DELLO SPAZIO E^* PER E^*.

DI DIMENSIONE n^2, CIOE' $\dim(E^* \otimes E^*) = n^2$.

CONCLUSIONE:

LE COMPONENTI COVARIANTI, CONTROVARIANTI, MISTE DI UN GENERICO TENSORE DI RANGO K POSSONO QUINDI ESSERE VISTE COME LE COMPONENTI DI ELEMENTI APPARTENENTI A SPAZI VETTORIALI PIU' GENERALI COSTRUITI OPPORTUNAMENTE TRAMITE IL "PRODOTTO TENSORIALE DI SPAZI VETTORIALI".

PRODOTTO SCALARE - PRODOTTO VETTORIALE - PRODOTTO MISTO - DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE - TENSORE DI LEVI-CIVITA (O TENSORE DI RICCI).

"PRODOTTO SCALARE"

ABBIAMO DEFINITO IL PRODOTTO SCALARE

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = v^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = v^\alpha u_\alpha = v_\alpha u^\alpha$$

OVVIAMENTE E' UN INVARIANTE PER CAMBIAMENTO DI BASE

INFATTI:

$$v^\alpha u_\alpha = \underbrace{\underbrace{A^\alpha{}_{\alpha'}}\, v^{\alpha'}\, \underbrace{A_\alpha{}^{\beta'}}}_{\delta_{\alpha'}{}^{\beta'}}\, u_{\beta'} = \delta_{\alpha'}{}^{\beta'} v^{\alpha'} u_{\beta'} = v^{\alpha'} u_{\alpha'}$$

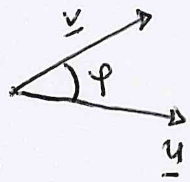
OVVIAMENTE SE $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ AVREMO

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = v^1 u^1 + \dots + v^n u^n.$$

(QUINDI NON VI E', IN QUESTO CASO, DIFFERENZA TRA COMP. COVARIANTI E COMP. CONTROVARIANTI)

UN ALTRO MODO PER DEFINIRE IL PRODOTTO SCALARE

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = |\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\varphi$$



ESSENDO $\cos\varphi$ IL COSENO DELL'ANGOLO TRA $\underline{u}$ E $\underline{v}$

QUINDI DA UN PUNTO DI VISTA "**SQUISITAMENTE GEOMETRICO**" POSSIAMO USARE QUESTA DEFINIZIONE PER DEFINIRE IL $\cos\varphi$ CIOE'

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{|\underline{u}|\,|\underline{v}|}}$$

OVVIAMENTE

$$\begin{cases} \underline{v}\cdot\underline{u} > 0 \\ \underline{v}\cdot\underline{u} < 0 \\ \underline{v}\cdot\underline{u} = 0 \end{cases}$$

"PRODOTTO VETTORIALE"

$$\underline{v}\wedge\underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (u_3 v_2 - u_2 v_3)\,\underline{e}_1 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\,\underline{e}_2 \, (u_2 v_1 - u_1 v_2)\,\underline{e}_3$$

OSSERVIAMO CHE $\underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{u}$ "NON È UN VETTORE" MA UN "PSEUDOVETTORE"

CIOÈ SI TRASFORMA SEMPRE COME UN VETTORE TRANNE CHE PER INVERSIONE DEGLI ASSI, NEL QUAL CASO AVREMO

$$w^{\alpha} = -A^{\alpha}{}_{\alpha'} w^{\alpha'} \quad (\text{E NON } w^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\alpha'} w^{\alpha'})$$

ESEMPIO ESPLICATIVO:

CONSIDERIAMO UNA TRASFORMAZIONE CORRISPONDENTE ALLA INVERSIONE DI UN ASSE (AD ESEMPIO DEL 1° ASSE $\underline{e}_1$)

ALLORA QUESTA SARÀ DESCRITTA DALLA MATRICE

$$A^{\alpha}{}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

INFATTI

$$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \underline{e}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_{1'} = -\underline{e}_1 \\ \underline{e}_{2'} = \underline{e}_2 \\ \underline{e}_{3'} = \underline{e}_3 \end{cases}$$

SE QUINDI CONSIDERIAMO UN GENERICO VETTORE

$\underline{z} = z^{\alpha} \underline{e}_{\alpha}$ AVREMO COME CI SI PUÒ ASPETTARE

CHE $\begin{cases} z^{1'} = -z_1 \\ z^{2'} = z^2 \\ z^{3'} = z^3 \end{cases}$ (CIOÈ CAMBIA IL SEGNO DELLA 1ª COMPONENTE MA NON DELLE ALTRE)

SE QUINDI $\underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{u}$ FOSSE UN VETTORE DOVREBBE ACCADERE

CHE $\{ w^{1'} = -w^1 ,\quad w^{2'} = w^2 ,\quad w^{3'} = w^3 \}$ (*)

VEDIAMO SE È VERO

$$\begin{aligned} w^1 &= u^3 v^2 - u^2 v^3 \Rightarrow \\ w^2 &= u^1 v^3 - u^3 v^1 \Rightarrow \\ w^3 &= u^2 v^1 - u^1 v^2 \Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{cases} w^{1'} = w^1 \\ w^{2'} = -w^2 \\ w^{3'} = -w^3 \end{cases}$$

QUINDI LE (*) NON VALGONO MA $\boxed{w^{\alpha'} = -A^{\alpha'}{}_{\alpha} w^{\alpha}}$

ALLORA IL PRODOTTO VETTORIALE É UN PSEUDOVETTORE

SE QUINDI $\underline{W}$ É UNO PSEUDOVETTORE ED $\underline{V}$ É UN VETTORE

$\underline{W}\cdot\underline{W}$ É UNO SCALARE

$\underline{W}\cdot\underline{V}$ É UNO PSEUDOSCALARE

$(\underline{W}\cdot\underline{V})^2$ É UNO SCALARE.

UN ALTRO MODO DI DEFINIRE IL "PRODOTTO VETTORIALE" É QUELLO SPESSO UTILIZZATO DAI FISICI

$\underline{W} = \underline{V} \wedge \underline{U} \Rightarrow$

- MODULO: $|W|^2 = |V|^2 |U|^2 \operatorname{sen}^2\varphi$
- DIREZIONE: ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DAI VETTORI $\underline{V}$ e $\underline{U}$
- VERSO: "REGOLA DELLA MANO DESTRA"

INFATTI SE CALCOLIAMO (PER IL MODULO QUADRO):

$$(\underline{W})^2 = (\underline{V}\wedge\underline{U})^2 = (\underline{V}\wedge\underline{U})\cdot(\underline{V}\wedge\underline{U}) = |V|^2|U|^2 - \underbrace{(\underline{V}\cdot\underline{U})^2}_{|V|^2|U|^2\cos^2\varphi} =$$

$$= |V|^2|U|^2(1-\cos^2\varphi) = |V|^2|U|^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

"ESEMPI DI PRODOTTI VETTORIALI"

INTRODUCIAMO IL VETTORE "GRADIENTE" CHE DA UN PUNTO DI VISTA FORMALE (É UN OPERATORE DIFFERENZIALE)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\underline{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\underline{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\underline{e}_3$$

CHE OVVIAMENTE POTRA' ESSERE APPLICATO A FUNZIONI DI VARIO TIPO

ESEMPIO: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\underline{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\underline{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\underline{e}_3$

POSSIAMO COSTRUIRE ALCUNI OPERATORI DIFFERENZIALI

1) $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \mathrm{rot}(\underline{V})$ (ROTORE DI $\underline{V}$)

CHE POTRA' ESSERE INTESO COME IL "PRODOTTO VETTORIALE" DI DUE VETTORI

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{V}} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \mathrm{div}(\underline{V})$ (DIVERGENZA DI $\underline{V}$)

CHE POTRA' ESSERE INTESO COME UN "PRODOTTO SCALARE" DI DUE VETTORI (I VETTORI $\vec{\nabla}$, $\vec{V}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$ (LAPLACIANO)

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) f.$$

ESEMPI DI PRODOTTI VETTORIALI:

CAMPO MAGNETICO:

DATO IL "POTENZIALE VETTORE" $\vec{A}$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{H}$ E' UNO "PSEUDO VETTORE" (O VETTORE ASSIALE)

FORZA DI LORENTZ $\underline{F}_L = \frac{q}{c} \underline{V} \wedge \underline{H}$
DOMANDA: { E' UN VETTORE ?? / E' UNO PSEUDOVETTORE ??

(q "CARICA ELEMENTARE"; c "VELOCITA' LUCE") RISPOSTA: E' UN VETTORE

PERCHÉ NASCE DA UN "DOPPIO" PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{F}_L = \frac{q}{c}\ \underline{v} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A})$$

IL SEGNO CAMBIA DUE VOLTE PERCUI $F_L^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha} F_L^{\alpha}$

"PRODOTTO MISTO"

DATI 3 VETTORI $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ DEFINIAMO "PRODOTTO MISTO"

$$\boxed{(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

OVVIAMENTE IN GENERALE È UNO PSEUDOSCALARE.

SI VEDE CHE È SODDISFATTA LA PROPRIETÀ DI "CICLICITÀ"

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{w} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{u} \qquad (1*)$$

"DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE"

DATI 3 VETTORI $\underline{v}$, $\underline{u}$, $\underline{w}$

$$\boxed{(\underline{v} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{w}}$$

"IN "GENERALE" È UN VETTORE"
(SI CAMBIA IL SEGNO DUE VOLTE PER INVERSIONE DEGLI ASSI)

SI PROVA CHE VALE LA SEGUENTE PROPRIETÀ (CHE SARÀ MOLTO UTILIZZATA IN SEGUITO)

$$\boxed{(\underline{v} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{w} = \left[(\underline{v} \cdot \underline{w})\underline{u} - (\underline{u} \cdot \underline{w})\underline{v}\right]}$$

SI PUÒ PROVARE IN MODO DIRETTO (CIOÈ VERIFICANDO CON IL CALCOLO TALE PROPRIETÀ) OPPURE INTRODUCENDO IL "TENSORE DI LEVI-CIVITA" (O "TENSORE DI RICCI").

MATRICI SIMMETRICHE, ANTISIMMETRICHE, SIMMETRICHE A TRACCIA NULLA:

DEF. DATA UNA MATRICE A_{ij} ESSA SI DICE

"SIMMETRICA" SE $A_{ij} = A_{ji}$

"ANTISIMMETRICA" SE $A_{ij} = -A_{ji}$

UNA MATRICE A_{ij} IN GENERALE POTRA' ESSERE DECOMPOSTA NELLA SOMMA DELLA SUA PARTE SIMMETRICA E DELLA SUA PARTE ANTISIMMETRICA

$$A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]} \qquad (1)$$

ESSENDO:

$$\begin{cases} A_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) \\ A_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) \end{cases}$$

DA CUI BANALMENTE LA (1)

SI DEFINISCE LA TRACCIA DI UNA MATRICE A_{ij}

$$A_{ij}\,\delta_{ij} = A_{ee} = A_{11} + A_{22} + \dots A_{nn} = tr(A)$$

DATA UNA MATRICE SIMMETRICA A_{ij} DEFINIAMO LA SUA PARTE SIMMETRICA A TRACCIA NULLA

$$A_{\langle ij\rangle} = A_{ij} - \frac{1}{D} A_{kk}\,\delta_{ij}$$

(D = "DIMENSIONE DELLA MATRICE")

VERIFICHIAMO CHE LA SUA TRACCIA E' NULLA

$$A_{\langle ij\rangle}\,\delta_{ji} = A_{ii} - \frac{1}{D} A_{kk}\,(\underbrace{\delta_{ij}\,\delta_{ji}}_{\delta_{ii} = D}) =$$

$$= A_{ii} - \frac{1}{\cancel{D}}\,\cancel{D}\,A_{kk} = 0$$

"TENSORE DI LEVI-CIVITA"

DEFINIAMO IL TENSORE "COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICO" (RISPETTO A TUTTI I SUOI INDICI)

$\boxed{\varepsilon_{ijk}}$ ASSUMENDO CHE $\varepsilon_{123} = 1$ AVREMO:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i=j \;,\; i=k \;,\; j=k \\ 1 & \text{SE } ijk \text{ E' UNA CONFIGURAZIONE OTTENUTA CON UN NUMERO PARI DI PERMUTAZIONI A PARTIRE DA "123"} \\ -1 & \text{SE } ijk \text{ E' UNA CONFIGURAZIONE OTTENUTA CON UN NUMERO DISPARI DI PERMUTAZIONI A PARTIRE DA "123".} \end{cases}$$

ESEMPI: SE $\varepsilon_{123} = 1$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{(1 PERMUTAZIONE)}}{\varepsilon_{213} = -1}$, $\underset{\text{(2 PERMUTAZIONI)}}{\varepsilon_{231} = 1}$, $\underset{\text{(3 PERMUTAZIONI)}}{\varepsilon_{321} = -1}$

$\Rightarrow$ $\underset{\text{(1 PERMUTAZIONE)}}{\varepsilon_{132} = -1}$, $\underset{\text{(2 PERMUTAZIONI)}}{\varepsilon_{312} = 1}$

E' POSSIBILE VERIFICARE CHE VALE LA PROPRIETA'

(PARTE ANTISIMMETRICA RISPETTO AGLI INDICI ℓ E s)

$$(*) \quad \boxed{\varepsilon_{pij}\,\varepsilon_{p\ell s}} = 2\,\delta_{i[\ell}\,\delta_{s]j} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\delta_{i\ell}\,\delta_{sj} - \delta_{is}\,\delta_{\ell j}\right)$$

$$\boxed{= \delta_{i\ell}\,\delta_{sj} - \delta_{is}\,\delta_{\ell j}}$$

INOLTRE SE CONTRAIAMO LA $(*)$ CON $\delta_{i\ell}$ AVREMO BANALMENTE

$$\varepsilon_{pij}\,\varepsilon_{p\ell s}\,\delta_{i\ell} = \varepsilon_{p\ell j}\varepsilon_{p\ell s} = \left(\delta_{i\ell}\,\delta_{sj} - \delta_{is}\,\delta_{\ell j}\right)\delta_{i\ell}$$

$$= \underbrace{\delta_{ii}}_{3}\,\delta_{sj} - \delta_{sj} = 2\,\delta_{js} \quad \text{QUINDI}$$

$$(**) \quad \boxed{\varepsilon_{p\ell j}\,\varepsilon_{p\ell s} = 2\,\delta_{js}}$$

QUINDI LE DUE PROPRIETÀ

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_{pij}\,\varepsilon_{pks} = \delta_{ik}\,\delta_{sj} - \delta_{is}\,\delta_{kj} \\ \varepsilon_{pki}\,\varepsilon_{pkj} = 2\,\delta_{ij} \end{cases}}$$

VEDIAMO ADESSO COME SIA POSSIBILE ESPRIMERE IL "PRODOTTO VETTORIALE" TRAMITE IL TENSORE DI LEVI-CIVITA.

DATO IL PRODOTTO VETTORIALE

$$\underline{v} \wedge \underline{u} = \underline{w} = w_i\,\underline{e}_i = \underbrace{(\varepsilon_{ijh}\,v_j\,u_h)}_{w_i}\,\underline{e}_i$$

INFATTI:

$$w_1 = \varepsilon_{1jh}\,v_j\,u_h = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{1}\,v_2\,u_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}\,v_3\,u_2 =$$

$$= (v_2\,u_3 - v_3\,u_2)$$

$$w_2 = \varepsilon_{2jh}\,v_j\,u_h = \underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1}\,v_1\,u_3 + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{+1\ (\text{DUE PERMUTAZIONI})}\,v_3\,u_1$$

$$= v_3\,u_1 - v_1\,u_3$$

$$w_3 = \varepsilon_{3jh}\,v_j\,u_h = \underbrace{\varepsilon_{312}}_{1\ (2\ \text{PERMUTAZIONI})}\,v_1\,u_2 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1\ (3\ \text{PERMUTAZIONI})}\,v_2\,u_1$$

$$= v_1\,u_2 - v_2\,u_1$$

MA

$$\underline{v} \wedge \underline{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \overbrace{(v_2\,u_3 - v_3\,u_2)}^{w_1}\,\underline{e}_1 + \overbrace{(v_3 u_1 - v_1 u_3)}^{w_2}\,\underline{e}_2 + \overbrace{(v_1\,u_2 - v_2\,u_1)}^{w_3}\,e_3$$

ESERCIZIO:

1) UTILIZZANDO IL TENSORE DI LEVI-CIVITA VERIFICARE CHE VALE LA PROPRIETA' DEL "DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE"

$$(\underline{v} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{w} = (\underline{v} \cdot \underline{w})\, \underline{u} - (\underline{u} \cdot \underline{w})\, \underline{v}$$

SE UTILIZZIAMO IL TENSORE DI LEVI-CIVITA

$$(\underline{v} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{w} = \left[\varepsilon_{ijk} \underbrace{(v \wedge u)_j}_{\varepsilon_{jzs} v_z u_s} w_k \right] \underline{e}_i =$$

$$= \left(\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{jik}} \varepsilon_{jzs} v_z u_s w_k \right) \underline{e}_i =$$

$$= - \left(\underbrace{\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jzs}}_{2 \delta_{i[z} \delta_{s]k} = (\delta_{iz}\delta_{sk} - \delta_{is}\delta_{zk})} v_z u_s w_k \right) \underline{e}_i =$$

$$= \left(\delta_{is} \delta_{zk} - \delta_{iz} \delta_{sk} \right) v_z u_s w_k \underline{e}_i =$$

$$= \underbrace{(v_k w_k)}_{(\underline{v} \cdot \underline{w})} \underbrace{u_i \underline{e}_i}_{\underline{u}} - \underbrace{(u_k w_k)}_{(\underline{u} \cdot \underline{w})} \underbrace{v_i \underline{e}_i}_{\underline{v}} = (\underline{v} \cdot \underline{w})\, \underline{u} - (\underline{u} \cdot \underline{w})\, \underline{v}$$

— o —

1) UTILIZZIAMO IL TENSORE DI LEVI-CIVITA PER VERIFICARE LA PROPRIETA' DEL "PRODOTTO MISTO"

$$(\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot w = (\underline{w} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{u} = (\underline{u} \wedge w) \cdot \underline{v}$$

SE CALCOLIAMO I TRE TERMINI

(ABBIAMO UTILIZZATO LA PROPRIETÀ $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_p = \delta_{ip}$)

$$(\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{w} = (\varepsilon_{ijk} v_j u_k \underline{e}_i) \cdot w_p \underline{e}_p = \varepsilon_{pjk} v_j u_k w_p \quad (*)$$

$$(\underline{w} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{u} = \varepsilon_{pjk} w_j v_k u_p \quad (**)$$

$$(\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v} = \varepsilon_{pjk} u_j w_k v_p \quad (***)$$

TUTTI GLI INDICI SONO SATURATI (QUINDI POSSIAMO CHIAMARLI COME VOGLIAMO)

NELLA (**) CAMBIAMO NOME AGLI INDICI

$p \to k$

$k \to j$

$j \to p$

$$(**) = \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{kpj}}_{-\varepsilon_{pkj}}}_{\varepsilon_{pjk}} w_p v_j u_k =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{pjk} v_j u_k w_p}_{(*)} = (\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{w}$$

ANALOGAMENTE NELLA (***) CAMBIAMO NOME AGLI INDICI

$p \to j$

$k \to p$

$j \to k$

$$\Rightarrow (***) = (\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v} = \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{jkp}}_{-\varepsilon_{jpk}}}_{\varepsilon_{pjk}} u_k w_p v_j =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{pjk} v_j u_k w_p}_{(*)} = (\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{w}$$

ESERCIZIO **APPENDICE DEI RISULTATI DI PAG. 35**

$\{e^\alpha \otimes e^\beta\}_{\alpha,\beta=1}^{n}$ SONO LINEARM. INDIPENDENTI

1) $$c_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta = 0$$

$$c_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) = c_{\alpha\beta}\, \delta^\alpha_\mu\, \delta^\beta_\rho = c_{\mu\rho} = 0 \qquad \forall \mu, \rho$$

ALLORA $\dim E^* \otimes E^* \geq n^2$ (PERCHÉ ALMENO n^2 ELEMENTI DELLO SPAZIO VETTORIALE $E^* \otimes E^*$ LI ABBIAMO TROVATI $\{e^\alpha \otimes e^\beta\}_{\alpha,\beta}^{n}$

2) PROVIAMO ADESSO CHE $\forall\, f \in E^* \otimes E^*$ POTRÀ ESSERE

ESPRESSO $$f = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta$$ PERCHÉ $f_{\alpha\beta} = f(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)$

INFATTI

$$f_{\mu\rho} = f(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) = f_{\alpha\beta}\, \underbrace{\delta^\alpha_\mu\, \delta^\beta_\rho}_{\text{PER COSTRUZIONE}} = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho)$$

QUINDI:

$$f(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho)$$

OVVIAMENTE PIÙ IN GENERALE AVREMO

$$f(\underline{v}, \underline{u}) = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{v}, \underline{u})$$

INFATTI

$$f(\underline{v}, \underline{u}) = f(v^\mu \underline{e}_\mu, u^\rho \underline{e}_\rho) = v^\mu u^\rho f(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) =$$

$$= v^\mu u^\rho f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{e}_\mu, \underline{e}_\rho) = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(v^\mu \underline{e}_\mu, u^\rho \underline{e}_\rho)$$

$$= f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta(\underline{v}, u)$$

ALLORA ABBIAMO PROVATO CHE $\dim E^* \otimes E^* = n^2$

PROVIAMO INFINE:

3) A) $f_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} f_{\alpha'\beta'}$

B) $e^\alpha \otimes e^\beta = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'}$

INFATTI:

A) $f_{\alpha\beta} = f(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = f(A_\alpha^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}, A_\beta^{\beta'} \underline{e}_{\beta'}) =$

$$= A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} \underbrace{f(\underline{e}_{\alpha'}, \underline{e}_{\beta'})}_{f_{\alpha'\beta'}} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} f_{\alpha'\beta'}$$

B) SAPPIAMO CHE $\forall f \in E^* \otimes E^*$ POTRA' ESSERE ESPRESSA

$$f = f_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta \qquad \text{PERCHE'} \qquad f_{\alpha\beta} = f(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)$$

CONSIDERIAMO COME FORMA $f = e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'}$

$$e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'} = f^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta \qquad \text{CON} \qquad f^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'}(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) =$$

$$= e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'}(A_\alpha^{\mu'} \underline{e}_{\mu'}, A_\beta^{\rho'} \underline{e}_{\rho'}) = A_\alpha^{\mu'} A_\beta^{\rho'} \underbrace{e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'}(\underline{e}_{\mu'}, \underline{e}_{\rho'})}_{\delta^{\alpha'}_{\mu'} \delta^{\beta'}_{\rho'}}$$

$$= A_\alpha^{\mu'} A_\beta^{\rho'} \delta_{\mu'}^{\alpha'} \delta_{\rho'}^{\beta'} = A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'}$$

QUINDI: ABBIAMO PROVATO CHE

$$f_{\alpha\beta}^{\ \ \alpha'\beta'} = A_{\alpha}^{\ \alpha'} A_{\beta}^{\ \beta'}$$

$$e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'} = f_{\alpha\beta}^{\ \ \alpha'\beta'} \, e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\alpha'} \otimes e^{\beta'} = A_{\alpha}^{\ \alpha'} A_{\beta}^{\ \beta'} \, e^{\alpha} \otimes e^{\beta}}$$