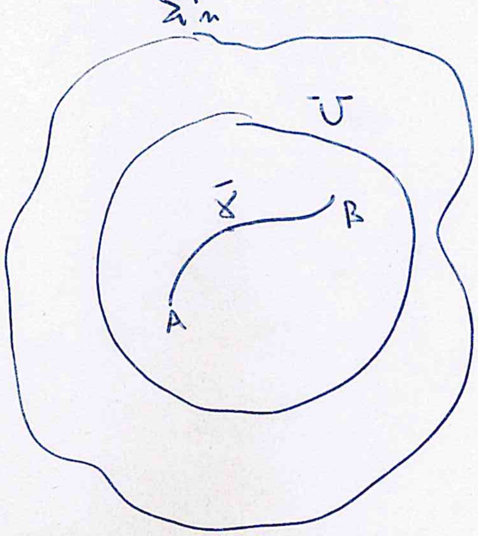
"Sistema lagrangiano"

Consideriamo un sistema fisico caratterizzato da n gradi libertà, associamo a tale sistema uno spazio delle configurazioni Σ_n. Allora fissato un punto $P \in \Sigma_n$ è sempre possibile determinare un intorno $U(P)$ in cui possiamo introdurre le coordinate lagrangiane

$$\{q_1, q_2, \dots q_n\} \qquad q_\alpha = \bar{q}_\alpha(t) \qquad \text{(mappa locale)}$$



Definiamo allora nell'aperto U una curva regolare $\bar{\gamma}$ di estremi A e B e di equazioni parametriche

$$q^\alpha = \bar{q}^\alpha(t) \qquad t \in [t_0, t_1]$$

$$A \equiv \{q^\alpha(t_0)\} \qquad B \equiv \{q^\alpha(t_1)\}$$

$\bar{\gamma}$ si può interpretare come il moto di un punto $P \in \Sigma_n$ che a sua volta descriverà l'evoluzione temporale del sistema fisico.

Consideriamo il vettore di componenti $\{\dot{q}^\alpha(t)\}$ che sarà un vettore tangente a $\bar{\gamma}$ in $P \equiv \{q_\alpha(t)\}$

Allora possiamo pensare di "incollare" punto per punto un vettore dello "spazio tangente" Σ_t e definire la funzione lagrangiana associata al sistema.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

definita in un aperto $A \equiv \Sigma_n \times \Sigma_t \times I$

$$q^\alpha \in \Sigma_n \qquad \dot{q}^\alpha \in \Sigma_t^{(P)} \qquad t \in I$$

Σ_n aperto di R^n $\quad$ $\Sigma_t^{(P)}$ aperto di R^n $\quad$ I aperto di R.

ESSENDO $\mathcal{L}$ "INFINITAMENTE DIFFERENZIABILE" IN A

ASSOCIAMO ALLA LAGRANGIANA IL SISTEMA DELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE (O EULERO LAGRANGE)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, \dots n$$

NELLE FUNZIONI INCOGNITE $q_\alpha(t)$.

L'INSIEME COSTITUITO DA:

APERTO A , LAGRANGIANA L , EQUAZIONI DI LAGRANGE

SI DICE "SISTEMA LAGRANGIANO"

DEFORMAZIONE DI UNA CURVA IN Σ_n

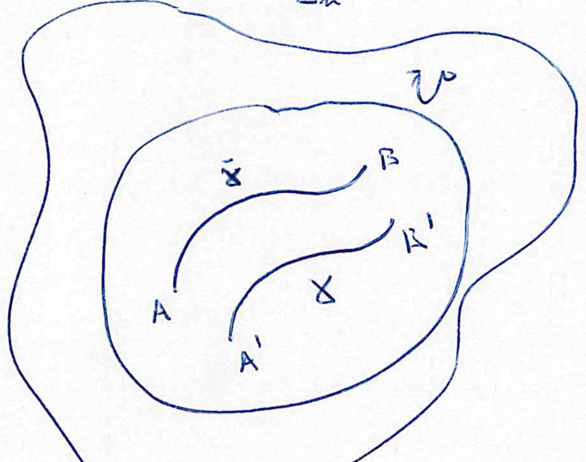
DATO UN SISTEMA FISICO DESCRITTO DA UNA LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

CONSIDERIAMO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI UN INTORNO $U(P)$ DI UN PUNTO $P \in \Sigma_n$ ARBITRARIAMENTE SCELTO. IN QUESTO INTORNO POSSIAMO CONSIDERARE UNA MAPPATURA LOCALE

$$q_\alpha = \{ q_1, \dots q_n \}$$

ED INTRODURRE LA CURVA "REGOLARE" $\bar{\gamma} \equiv \begin{cases} q^\alpha = \bar{q}^\alpha(t) & t \in [t_0, t_1] \\ A \equiv \{ \bar{q}^\alpha(t_0) \} \\ B \equiv \{ \bar{q}^\alpha(t_1) \} \end{cases}$



SIA γ LA "DEFORMAZIONE" DI $\bar{\gamma}$ DI EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\gamma \equiv \begin{cases} q^\alpha = \bar{q}^\alpha(t) + \lambda \eta^\alpha(t) \\ \qquad t \in [t_0 + \lambda \delta t_0, t_1 + \lambda \delta t_1] \\ A' \equiv \{ \bar{q}^\alpha(t_0 + \lambda \delta t_0) + \lambda \eta^\alpha(t_0 + \lambda \delta t_0) \} \\ B' \equiv \{ \bar{q}^\alpha(t_1 + \lambda \delta t_1) + \lambda \eta^\alpha(t_1 + \lambda \delta t_1) \} \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (PARAMETRO CHE IN SEGUITO ASSUMEREMO "INFINITESIMO")

$\eta_\alpha(t)$ FUNZIONI "REGOLARI" IN MODO CHE γ SIA REGOLARE,

SE QUINDI DEFINIAMO {L'INSIEME (DI TUTTE LE CURVE REGOLARI γ)} $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} \equiv \{ \forall \gamma \in \Sigma_n \text{ DI ESTREMI } A, B \text{ ASSEGNATI, INFINITAMENTE DIFFERENZIABILI} \}$$

DEFINIAMO IL FUNZIONALE

$$S(\gamma)_{A,B} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

DEFINITO COME

$$S(\gamma)_{A,B} = \int_A^B \mathcal{L}\left[q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t \right] dt$$

NEL NOSTRO CASO AVREMO:

$$S(\bar{\gamma})_{A,B} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\left[\bar{q}_\alpha(t), \dot{\bar{q}}_\alpha(t), t \right] dt$$

$$S(\gamma)_{A',B'} = \int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_1+\lambda\delta t_1} \mathcal{L}\left[\bar{q}_\alpha(t) + \lambda \eta_\alpha(t) ; \dot{\bar{q}}_\alpha(t) + \lambda \dot{\eta}_\alpha(t), t \right] dt$$

<u>DEFINIAMO:</u> "<u>VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE SULLA CURVA $\bar{\gamma}$</u>"

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{S(\gamma) - S(\bar{\gamma})}{\lambda} \qquad (*)$$

IN QUESTO CASO AVREMO CHE QUANDO

$\lambda \to 0$ LA CURVA DEFORMATA $\gamma \to \bar{\gamma}$

E' LA VARIAZIONE (*) SARA' EQUIVALENTE ALLA

SCRITTURA FORMALE.

$$\boxed{S(\gamma) - S(\bar{\gamma}) = \lambda\, \delta S + o(\lambda^2)}$$

CALCOLIAMO LA QUANTITÀ

$$S(\gamma)-S(\bar{\gamma})=\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_1+\lambda\delta t_1} L(\bar{q}_\alpha+\lambda\eta_\alpha,\dot{\bar{q}}_\alpha+\lambda\dot{\eta}_\alpha,t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1} L(\bar{q}^\alpha,\dot{\bar{q}}^\alpha,t)\,dt$$

OSSERVO CHE:

$$\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_1+\lambda\delta t_1} L\,dt=\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_0} L\,dt+\int_{t_0}^{t_1} L\,dt+\int_{t_1}^{t_1+\lambda\delta t_1} L\,dt$$

DA CUI PER IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

$$\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_0} L(\bar{q}_\alpha+\lambda\eta_\alpha,\dot{\bar{q}}_\alpha+\lambda\dot{\eta}_\alpha,t)\,dt=-\lambda\delta t_0\,L\left(\bar{q}_\alpha(t^*)+\lambda\eta_\alpha(t^*),\dot{\bar{q}}^\alpha(t^*)+\lambda\dot{\eta}^\alpha(t^*),t^*\right)$$

$$t_0+\lambda\delta t_0\leq t^*\leq t_0$$

ESSENDO LA FUNZIONE "L" REGOLARE POSSIAMO SVILUPPARE IN SERIE DI TAYLOR IN UN INTORNO DI $\lambda=0$ $\quad\left(f(\lambda)=f(0)+o(\lambda)\right)$

DA CUI:

$$L\Big|_{\lambda=0}=L\left(\bar{q}_\alpha(t^*)+\lambda\eta_\alpha(t^*),\dot{\bar{q}}_\alpha(t^*)+\lambda\dot{\eta}_\alpha(t^*),t^*\right)\Big|_{\lambda=0}=L\left(\bar{q}_\alpha(t_0),\dot{\bar{q}}^\alpha(t_0),t_0\right)$$

PERCHE' PER $\lambda\to 0$ $\quad t_0+\lambda\delta t_0\leq t^*\leq t_0\Rightarrow t_0\leq t^*\leq t_0\Rightarrow t^*=t_0$

$$\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_0} L(\bar{q}_\alpha+\lambda\eta_\alpha,\dot{\bar{q}}_\alpha+\lambda\dot{\eta}_\alpha,t)\,dt=-\lambda\delta t_0\,L\left(\bar{q}_\alpha(t_0),\dot{\bar{q}}^\alpha(t_0),t_0\right)+o(\lambda^2)$$

ANALOGAMENTE AVREMO:

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(\bar{q}_\alpha+\lambda\eta^\alpha,\dot{\bar{q}}_\alpha+\lambda\dot{\eta}_\alpha,t)\,dt=\lambda\delta t_1\,L\left(\bar{q}_\alpha(t_1),\dot{\bar{q}}_\alpha(t_1),t_1\right)+o(\lambda^2)$$

DA CUI:

$$S(\gamma) - S(\bar\gamma) = -\lambda\,\delta t_0 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t=t_0} + \lambda\,\delta t_1 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t=t_1} + o(\lambda^2) +$$

$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(\bar q_\alpha + \lambda \eta_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha + \lambda \dot\eta_\alpha, t) - L(\bar q_\alpha + \dot{\bar q}_\alpha, t) \right\} dt}_{G(t,\lambda)}$$

SVILUPPIAMO IN SERIE DI TAYLOR LA $G(\lambda)$ IN UN INTORNO DI $\lambda = 0$

$$G(\lambda) = G(0) + \lambda\, G'(\lambda)\Big|_{\lambda=0} + o(\lambda^2)$$

$$G(t,\lambda) = \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\Big|_{\lambda=0} \eta^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big|_{\lambda=0} \dot\eta_\alpha \right] \lambda + R(t,\lambda) \qquad : \lim_{\lambda\to 0} \frac{R(t,\lambda)}{\lambda} = 0$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big|_{\lambda=0} \dot\eta_\alpha = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \eta^\alpha \right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big|_{\lambda=0} \right) \eta^\alpha$$

DA CUI:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(\bar q_\alpha + \lambda \eta_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha + \lambda \dot\eta_\alpha, t) - L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t) \right\} dt =$$

$$= \lambda \left\{ \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \eta^\alpha + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \eta^\alpha \right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \right) \eta^\alpha \right\} dt}_{} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{R(t,\lambda)}{\lambda} dt \right.$$

DOVE SI SOTTOINTENDE IL CALCOLO PER $\lambda = 0$, QUINDI SI CALCOLA QUESTA QUANTITA' SULLA CURVA $\bar\gamma$

$$\lambda \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \eta_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \right\}_{\bar\gamma} \eta_\alpha \, dt + Q(\lambda) \right\}$$

DOVE $Q(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{R(t,\lambda)}{\lambda} dt$ SI PROVA CHE $\lim_{\lambda\to 0} Q(\lambda) = 0 \Rightarrow$ RETRO

$\Rightarrow$ SAPPIAMO CHE $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{R(t,\lambda)}{\lambda} = 0$

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists\, I(\lambda = 0) = \{ |\lambda - 0| < \delta \}$ TALE CHE $\left| \dfrac{R(t,\lambda)}{\lambda} \right| < \hat{\varepsilon}$

POSSIAMO DEFINIRE $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{t_1 - t_0}$ E SCRIVERE.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad |\lambda| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \dfrac{R(t,\lambda)}{\lambda} \right| < \dfrac{\varepsilon}{(t_1 - t_0)}$

$\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{R(t,\lambda)}{\lambda}\, dt$ DIRE CHE $\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad |\lambda| < \delta \quad |\varphi(\lambda)| < \varepsilon$

$$|\varphi(\lambda)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \frac{R(t,\lambda)}{\lambda}\, dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{R(t,\lambda)}{\lambda} \right| dt$$

$$< \int_{t_0}^{t_1} \frac{\varepsilon}{(t_1 - t_0)}\, dt = \frac{\varepsilon}{\cancel{(t_1 - t_0)}} \cancel{(t_1 - t_0)}$$

DA CUI: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad |\lambda| < \delta \quad |\varphi(\lambda)| < \varepsilon$

DA CUI:

$$\frac{S(\gamma)-S(\bar\gamma)}{\lambda} = \delta t_1 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t=t_1} - \delta t_0 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t=t_0} +$$

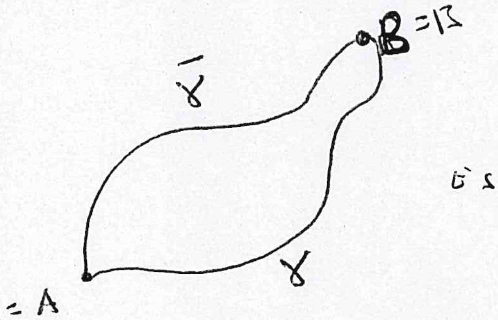
$$+ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\eta^\alpha\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right]_{\bar\gamma}\eta^\alpha dt + \frac{o(\lambda^2)}{\lambda}$$

FACENDO IL LIMITE $\lambda \to 0$

$$\boxed{(\delta S)_{\bar\gamma} = \delta t_1 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t_1} - \delta t_0 \cdot L(\bar q_\alpha, \dot{\bar q}_\alpha, t)\Big|_{t_0} + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\eta_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right]_{\bar\gamma} dt \qquad (1)}$$

<u>PRINCIPIO DI HAMILTON:</u>

SE $\bar\gamma$ SODDISFA LE EQUAZIONI DI LAGRANGE E γ E' UNA ~~sua~~ DEFORMAZIONE (VARIAZIONE) DI $\bar\gamma$ "SINCRONA" ($\delta t_0 = \delta t_1 = 0$) ED AD "ESTREMI FISSI" ($\eta_\alpha(t_0) = \eta_\alpha(t_1) = 0$) ALLORA LA VARIAZIONE DEL FUNZIONALE S VALE ZERO $(\delta S)_{\bar\gamma} = 0$ E VICEVERSA



SINCRONA $\Rightarrow$ $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$

ESTREMI FISSI $\Rightarrow$ $\eta_\alpha(t_0) = \eta^\alpha(t_1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$

CN. SE $\bar\gamma$ SODDISFA LE EQUAZ. DI LAGRANGE E' PER IPOTESI $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$, $\eta_\alpha(t_0) = \eta_\alpha(t_1) = 0$

DALLA (1) $\Rightarrow$ $(\delta S)_{\bar\gamma} = 0$

VICEVERSA: C.S.

PER IPOTESI $(\delta S)_{\bar\gamma}=0$ DA CUI:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right] dt = 0 \qquad \forall \eta_\alpha(t)$$

ALLORA PER L'ARBITRARIETA' DELLE $\eta_\alpha(t)$ LA FUNZ. INTEGRANDA DEVE ESSERE NULLA.

PROCEDIAMO PER ASSURDO SUPPONENDO CHE $\exists\, t^*$ PER CUI NON VALGANO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

CIOE'

$$\exists\, t^* \in [t_0, t_1] \; : \; \left.\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right|_{t^*} > 0 \qquad (1*)$$

ALLORA $\exists\, I(t^*) = U$ DOVE LA $(1*)$ E' POSITIVA. ~~...~~

ALLORA DATA L'ARBITRARIETA DELLE η_α POSSIAMO SCEGLIERE

$$\eta^\alpha = \begin{cases} 0 & t \notin I(t^*) \\ >0 & t \in I(t^*) \end{cases}$$

($\eta_\alpha = 0$ SULLA FRONTIERA PER LA REGOLARITA' DELLE $\eta_\alpha(t)$)

ALLORA $\exists\, I(t^*) = U$:

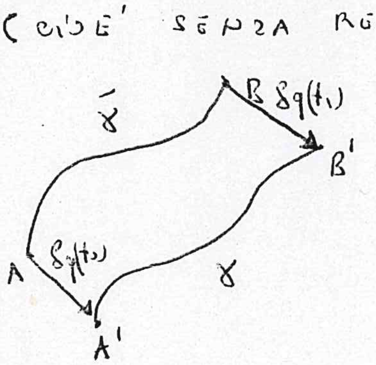
$$\int_{t_0}^{t} \eta^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right] dt = (\delta S)_{\bar\gamma} =$$

$$= \int_U \eta^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right] dt > 0$$

IL CHE E' ASSURDO IN QUANTO PER IPOTESI $(\delta S)_{\bar\gamma} = 0$.

$\Longleftrightarrow$

CONSIDERIAMO NUOVAMENTE L'ESPRESSIONE GENERALE (1)
(CIOE' SENZA RESTRINGERCI A VARIAZIONI SINCRONE E AD ESTREMI FISSI)



SIANO (A, B) GLI ESTREMI DI $\bar\gamma$

$A \equiv \bar q_\alpha(t_0)$ $\qquad B \equiv \bar q_\alpha(t_1)$

SIANO (A', B') GLI ESTREMI DI γ

$A' = \bar q^\alpha(t_0 + \lambda\,\delta t_0) + \lambda\,\eta^\alpha(t_0 + \lambda\,\delta t_0)$; $\qquad B' \equiv \bar q^\alpha_*(t_1 + \lambda\,\delta t_1) + \lambda\,\eta_\alpha(t_1 + \lambda\,\delta t_1)$

CALCOLIAMO I DUE VETTORI $\delta q_\alpha(t_0)$, $\delta q_\alpha(t_1)$ CHE RAPPRESENTANO LA SEPARAZIONE INFINITESIMA TRA GLI ESTREMI DELLE DUE CURVE $\bar{\gamma}$ e γ.

$$\delta q_\alpha(t_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{A' - A}{\lambda} \qquad \delta q_\alpha(t_1) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{B' - B}{\lambda}$$

VALUTIAMO

$$A' - A = \bar{q}_\alpha(t_0 + \lambda \delta t_0) + \lambda \eta_\alpha(t_0 + \lambda \delta t_0) - \bar{q}_\alpha(t_0)$$

CONSIDERIAMO UNO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR INTORNO A $\lambda = 0$ TRASCURANDO TERMINI DI ORDINE SUPERIORE AL 1º.

$$A' - A = \left[\dot{\bar{q}}_\alpha(t_0)\, \delta t_0 + \eta_\alpha(t_0)\right] \cdot \lambda + o(\lambda^2)$$

ANALOGAMENTE

$$B' - B = \left[\dot{\bar{q}}_\alpha(t_1)\, \delta t_1 + \eta_\alpha(t_1)\right] \cdot \lambda + o(\lambda^2)$$

DA cui:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{A' - A}{\lambda} = \delta q_\alpha(t_0) = \dot{\bar{q}}_\alpha(t_0)\, \delta t_0 + \eta_\alpha(t_0) \qquad (2)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{B' - B}{\lambda} = \delta q_\alpha(t_1) = \dot{\bar{q}}_\alpha(t_1)\, \delta t_1 + \eta_\alpha(t_1)$$

SE ADESSO INDICHIAMO CON IL SIMBOLO

$$\delta t\big|_{t_0} = \delta t_0 \quad \text{ed} \quad \delta t\big|_{t_1} = \delta t_1$$

POSSIAMO RISCRIVERE LA (1) COME SEGUE:

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \left[\delta t\, L(\bar{q}_\alpha, \dot{\bar{q}}_\alpha, t) + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha}\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \eta_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha}\right] dt \qquad (3)$$

DALLE (2) RICAVIAMO:

$$\eta_\alpha(t_0) = \delta q_\alpha(t_0) - \dot{q}_\alpha(t_0)\,\delta t_0$$

$$\eta_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_1) - \dot{q}_\alpha(t_1)\,\delta t_1$$

CHE SOSTITUITE NELLA **(3)** CI PERMETTONO DI SCRIVERE

$$(\delta S)_{\bar\gamma} = \left[\delta t\left(L - \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right]_{t_0}^{t_1} + \left[\delta q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \eta_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]_{\bar\gamma} dt$$

SE DEFINIAMO LA FUNZIONE

$$\boxed{E = -L + \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \qquad (4)$$

$$(5)\quad \boxed{(\delta S)_{\bar\gamma} = -\left[E\,\delta t\right]_{t_0}^{t_1} + \left[\delta q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \eta_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]_{\bar\gamma} dt}$$

NATURALMENTE PER VARIAZIONI SINCRONE E A ESTREMI FISSI AVREMO IL PRECEDENTE RISULTATO PERCHÉ $\delta t\big|_{t_0}^{t_1} = 0$ $\delta q_\alpha\big|_{t_0}^{t_1} = 0$

VEDREMO CHE E È L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA FISICO.

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

CONSIDERIAMO IL SET DI COORDINATE LAGRANGIANE

$$q_\alpha = \{q^1, \dots q^n\}$$

E SCRIVIAMO LE EQUAZ. DI LAGRANGE CORRISPONDENTI

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

SE ADESSO INTRODUCIAMO IL NUOVO SET DI VARIABILI LAGRANGIANE $Q^\alpha \equiv \{Q^1, \dots Q^N\}$

ESSENDO LE $\{q_\alpha\}$ ed $\{Q_\alpha\}$ RECIPROCAMENTE CONNESSE DA TRASFORMAZIONI REGOLARI

$$(G) \qquad q^\alpha = f^\alpha (Q^1 \dots Q^N) \qquad\qquad Q^\alpha = g^\alpha (q^1 \dots q^N)$$

DA CUI:

$$L (q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L \left[f^\alpha (Q^1 \dots Q^N), \frac{\partial f_\alpha}{\partial Q_\beta} (\dot{Q}_\beta \dots), t \right] =$$

$$= L^* (Q_\beta , \dot{Q}_\beta, t)$$

OVVIAMENTE LE L ed L^* SONO FUNZIONI DI DIVERSE VARIABILI MA HANNO LO STESSO VALORE NUMERICO.

PROVIAMO CHE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE SONO INVARIANTI IN FORMA PER TRASFORMAZIONI (G) DI COORDINATE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L^*}{\partial Q_\alpha} = 0$$

OSSERVIAMO CHE UNA VARIAZIONE SINCRONA AD ESTREMI FISSI PER LE COORDINATE $\{q_\alpha\}$ È SINCRONA ED A ESTREMI FISSI PER LE $\{Q^\alpha\}$ INFATTI SE ERA È SINCRONA $\Rightarrow \delta t_0 = \delta t_1 = 0$ ED INOLTRE

$$\delta Q^\alpha = \frac{\partial g^\alpha}{\partial q_\beta} \delta q_\beta \qquad \text{PER CUI SE} \quad \delta q^\beta(t_0) = \delta q^\beta(t_1) = 0$$

AVREMO CHE $\delta Q^\alpha(t_0) = \delta Q^\alpha(t_1) = 0$

DAL MOMENTO CHE L ED L^* ASSUMONO LO STESSO VALORE NUMERICO.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L (q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \, dt = S^* = \int_{t_0}^{t_1} L^*(Q^\alpha, \dot{Q}^\alpha, t) \, dt$$

DA CUI AVREMO:

$$(\delta S)_\gamma = (\delta S^*)_{\bar\gamma}$$

SE QUINDI $(\delta S)_\gamma = 0 \iff (\delta S^*)_\gamma = 0$

OSSERVIAMO QUINDI CHE SE VALGONO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \overset{\text{PER IL PRINCIPIO DI HAMILTON}}{\iff} \quad (\delta S)_\gamma = 0$$

CONSEGUENTEMENTE $(\delta S^*)_{\bar\gamma} = 0$ E ANCORA PER IL PRINC. DI HAMILTON

$$\iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot Q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial Q_\alpha} = 0$$

CIOÈ LE EQUAZ. DI LAGRANGE SONO LE STESSE NELLE NUOVE COORDINATE Q_α. (OVVIAMENTE VALE IL VICEVERSA)

$$\boxed{\text{"CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA GENERALIZZATA"}}$$

$$E(q_\alpha, \dot q_\alpha, t) = \dot q_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} - \mathcal{L}(q_\alpha, \dot q_\alpha, t)$$

VALUTIAMO LA SUA DERIVATA TOTALE NEL TEMPO:

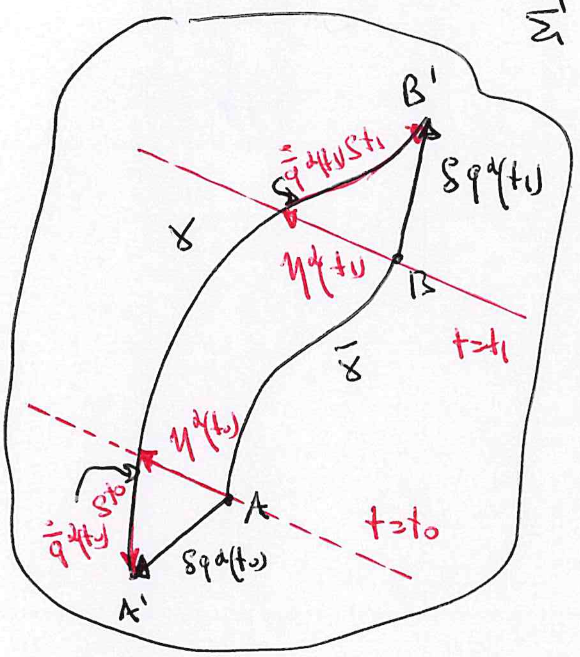
$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\ddot q_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha}} + \dot q_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha}\ddot q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \dot q_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

SE CALCOLIAMO ~~DA~~ dE/dt SULLA TRAIETTORIA EVOLUTIVA DEL MOTO VARRANNO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

DA CUI:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_\gamma = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_\gamma$$



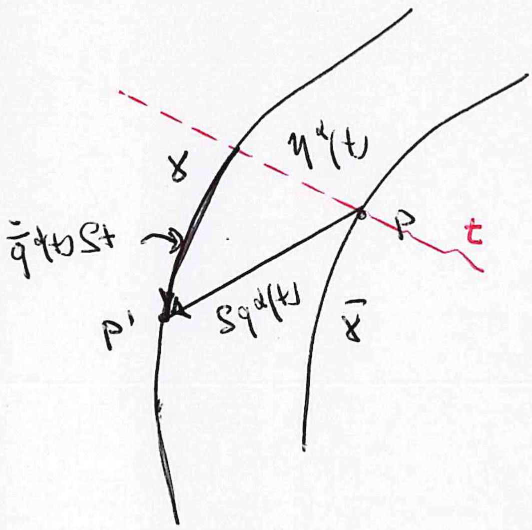
ABBIAMO VISTO CHE

$$\delta q^\alpha(t_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{A' - A}{\lambda} = \dot{q}^\alpha(t_0)\,\delta t_0 + \eta^\alpha(t_0)$$

$$\delta q^\alpha(t_1) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{B' - B}{\lambda} = \dot{q}^\alpha(t_1)\,\delta t_1 + \eta^\alpha(t_1)$$

$\eta^\alpha(t_0)$ RAPPRESENTA UNO "SPOSTAMENTO VIRTUALE" "CONGELATO A t_0"

$\eta^\alpha(t_1)$ " " " " " " t_1"



$$P \equiv \{ q^\alpha(t) \}$$

$$P' \equiv \{ q^\alpha(t + \lambda \delta t) + \lambda \eta^\alpha(t + \lambda \delta t) \}$$

$$\delta q^\alpha(t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{P' - P}{\lambda} = \dot{q}^\alpha(t)\,\delta t + \eta^\alpha(t)$$

"GAUGE INVARIANZA DELLA VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE DI HAMILTON"

SIA DATA $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ ED $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\, dt$

CONSIDERIAMO LA NUOVA LAGRANGIANA

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \frac{d f(q^\alpha, t)}{dt} \qquad \text{CON } f \text{ "ARBITRARIA"}$$

CONSIDERIAMO IL CORRISPONDENTE FUNZIONALE

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} \hat{\mathcal{L}}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt}\, dt$$

$$= S + \int_{t_0}^{t_1} df$$

CALCOLIAMO LA SUA VARIAZIONE PRIMA:

$$\delta \tilde{S} = \delta S + \delta f \Big|_{t_0}^{t_1}$$

DOVE $\quad \delta f \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\Big|_{\lambda=0} \delta q^\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\lambda=0} \delta t \Big|_{t_0}^{t_1}$

SE CONSIDERIAMO VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONI

$$\delta q^\alpha(t_0) = \delta q^\alpha(t_1) = 0 \qquad \delta t_0 = \delta t_1 = 0$$

DA CUI "PER VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONI LA VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE DI HAMILTON È GAUGE INVARIANTE"

$$\delta \hat{S} = \delta S$$

PUR ESSENDO $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)\, dt$ ED $\hat{S} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) + \frac{df}{dt} \right\} dt$

ALLORA SE VALE IL "PRINCIPIO DI HAMILTON"

C.N.S AFFINCHÉ $\delta S|_{\gamma} = 0$ DOVRANNO VALERE (PER VARIAZIONI SINCRONE E AD ESTREMI FISSI)

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\alpha}} = 0$

QUINDI IN PARTICOLARE "PER VARIAZIONI AD ESTREMI FISSI E SINCRONE"

$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\alpha}} = 0 \iff \delta S = 0$ MA ESSENDO VALIDA LA

GAUGE INVARIANZA $\delta S = \delta \tilde{S} = 0$ DA CUI NUOVAMENTE PER

IL PRINCIPIO DI HAMILTON AVREMO

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q^{\alpha}} = 0$ ESSENDO $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t) + \frac{d f(q^{\alpha}, t)}{dt}$

CIOÈ LA $\mathcal{L}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t)$ E LA $\hat{\mathcal{L}}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t)$ DOVRANNO NECESSARIAMENTE

DESCRIVERE LA STESSA FISICA

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\alpha}} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q^{\alpha}} = 0$$

O ANALOGAMENTE LA PIÙ GENERALE LAGRANGIANA ASSUMERÀ

LA FORMA $\tilde{\mathcal{L}}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t) = \mathcal{L}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t) + \frac{df}{dt}$

"APPLICAZIONE ALLE FORZE APPARENTI:"

NOI ABBIAMO GIÀ PROVATO CHE SE $U^{(APP)}$ È IL POTENZIALE

GENERALIZZATO ASSOCIATO ALLE FORZE APPARENTI SI HA

$$U^{APP} = T_a - T_R + \frac{df}{dt}$$

$\begin{cases} T_a = \text{ENERGIA CINETICA NEL RIFERIMENTO "ASSOLUTO" INERZIALE} \\ T_R = \text{" " " "RELATIVO" NON INERZIALE} \end{cases}$

RIOTTENIAMO QUESTO RISULTATO A PARTIRE DALLA GAUGE INVARIANZA DELLA VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE DI HAMILTON.

NEL RIF. ASSOLUTO PER UN SISTEMA SOGGETTO A SOLE FORZE CONSERVATIVE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(c)} = \frac{\partial U^{(c)}}{\partial q^\alpha} \qquad (1)$$

DA CUI DEFINENDO $\mathcal{L}_a = T_a + U^{(c)}$ LA (1) POTRA' SCRIVERSI

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial q^\alpha} = 0} \qquad (1\ bis)$$

ANALOGAMENTE NEL RIFERIMENTO RELATIVO NON INERZIALE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_R}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial T_R}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^{(c)} + Q_\alpha^{(APP)} \quad (2) \qquad \begin{cases} Q_\alpha^{(c)} = \dfrac{\partial U^{(c)}}{\partial q^\alpha} \\ Q_\alpha^{(APP)} = -\left\{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U^{APP}}{\partial \dot q^\alpha} - \dfrac{\partial U^{(APP)}}{\partial q^\alpha}\right\} \end{cases}$$

DA CUI DEFINENDO FORMALMENTE

$$\mathcal{L}_R = T_R + U^{(c)} + U^{(APP)}$$

LA (2) POTRA' SCRIVERSI

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q^\alpha} = 0} \qquad (2\ bis)$$

DOVENDO DESCRIVERE LA STESSA FISICA PER LA "GAUGE INVARIANZA DELLA VARIAZIONE PRIMA DEL ~~FUNZIONALE~~ DI HAMILTON

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_A + \frac{d f(q^\alpha, t)}{dt}$$

DA CUI

$$T_R + \cancel{U^{(c)}} + U^{(APP)} = T_a + \cancel{U^{(c)}} + \frac{df}{dt}$$

DA CUI

$$\boxed{U^{APP} = (T_a - T_R) + \frac{df}{dt}}$$

C. V. A

SE QUINDI LA LAGRANGIANA NON DIPENDE ESPLICITAMENTE DA t.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{COSTANTE}.$$

FACCIAMO VEDERE COME PER UN SISTEMA MECCANICO SOGGETTO A VINCOLI OLONOMI, LISCI E BILATERI ED AD UNA SOLLECITAZIONE ATTIVA CONSERVATIVA

$$L = T + U$$

INOLTRE ABBIAMO CHE $T = \frac{1}{2} a_{iJ} \dot{q}_i \dot{q}_J$ (DOVE ABBIAMO ASSUNTO CHE I VINCOLI SONO INDIPENDENTI DA t)

DA CUI $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = a_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = 2T$$

$$E = \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = 2T - T - U = T - U$$

CHE E' PROPRIO L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA.

PRINCIPIO DELL'AZIONE STAZIONARIA
(MAUPERTIUS)

SE RICORDIAMO IN GENERALE SCRIVEREMO:

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - \left[E\, \delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \eta_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right]_{\bar{\gamma}} dt$$

CONSIDERIAMO TRA TUTTE LE VARIAZIONI POSSIBILI QUELLE TRA UN CURVA $\bar{\gamma}$ ED UN CURVA γ TALE DA MANTENERE COSTANTE L'ENERGIA. DA CUI

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - E \cdot \left[\delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \eta_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right]_{\bar{\gamma}} dt \quad (1$$

DEFINIAMO UN NUOVO FUNZIONALE DOVE E È COSTANTE

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (L + E)\, dt \qquad \text{"AZIONE"}$$

CALCOLIAMO LA VARIAZIONE PRIMA DELL'AZIONE

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} E\, dt = \delta S + E\, \delta \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$= \delta S + E \left[\delta t \right]_{t_0}^{t_1}$$

DAL MOMENTO CHE STIAMO CONSIDERANDO VARIAZIONI ISOENERGETICHE PER LA (16) AVREMO

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \eta \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right]_{t_0}^{t_1}$$

SE QUINDI CONSIDERIAMO "VARIAZIONI ISOENERGETICHE" E AD "ESTREMI FISSI" $(\delta q_\alpha(t_0) = \delta q_\alpha(t_1) = 0)$

AVREMO:

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \eta^\alpha \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} dt \qquad (17)$$

"PRINCIPIO DI AZIONE STAZIONARIA":

PER VARIAZIONI ISOENERGETICHE E AD ESTREMI FISSI, LE EQUAZIONI DI LAGRANGE SONO EQUIVALENTI ALL'ANNULLARSI DELLA VARIAZIONE PRIMA DELL'AZIONE

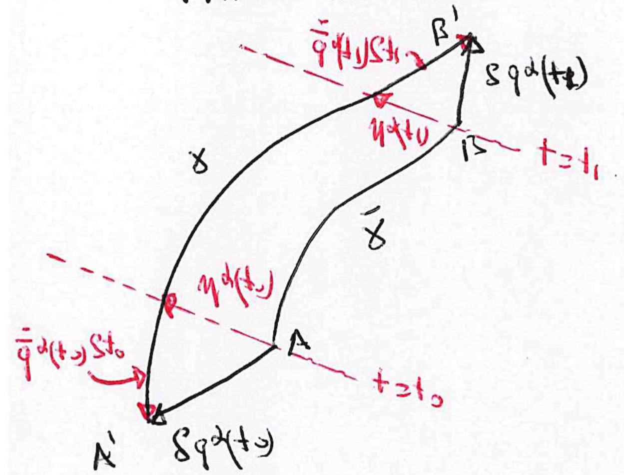
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \iff \delta A = 0$$

(LA DIMOSTRAZIONE È FORMALMENTE ANALOGA

CONSIDERIAMO QUINDI TRE CASI

CASO GENERALE

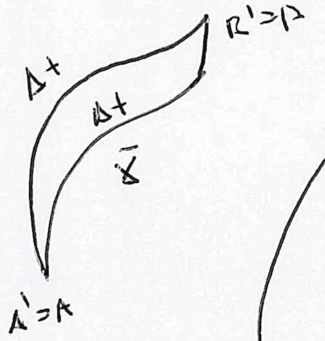
TRASF. GENERALE



$$\delta q^\alpha(t_0) = \dot{\bar q}^\alpha(t_0)\,\delta t_0 + \eta^\alpha(t_0)$$

$$\delta q^\alpha(t_1) = \dot{\bar q}^\alpha(t_1)\,\delta t_1 + \eta^\alpha(t_1)$$

"PRINCIPIO DI HAMILTON"



DEFORMAZIONI DA

ESTREMI FISSI → $\delta q^\alpha(t_0) = \delta q^\alpha(t_1) = 0$

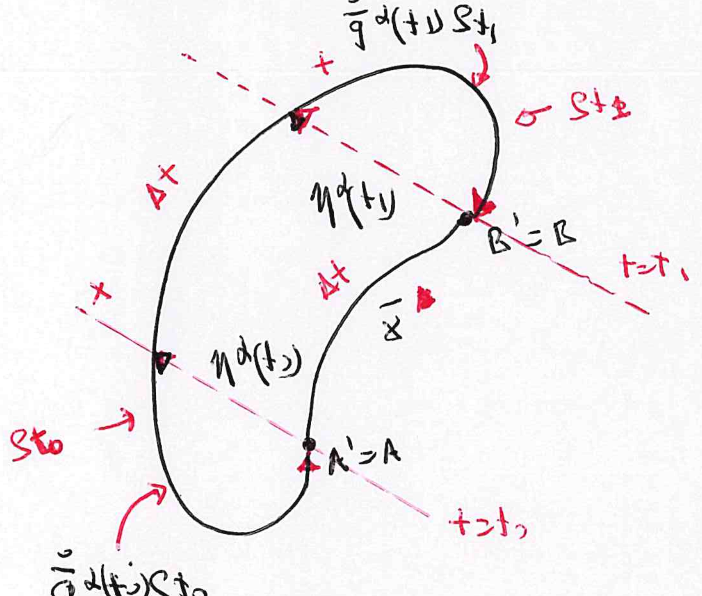
E

SINCRONE ⇒ $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$

DA CUI $\begin{cases} \eta^\alpha(t_0) = 0 \\ \eta^\alpha(t_1) = 0 \end{cases}$

"IN GENERALE NON ISOENERGETICHE"

"PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE"



DEFORMAZIONI DA ESTREMI FISSI "SU CURVE ISOENERGETICHE" MA NON SINCRONE.

$$\delta q^\alpha(t_0) = \delta q^\alpha(t_1)$$

$$\dot{\bar q}^\alpha(t_0)\,\delta t_0 + \eta^\alpha(t_0) = 0$$

$$\dot{\bar q}^\alpha(t_1)\,\delta t_1 + \eta^\alpha(t_1) = 0$$

MA: $\delta t_0 \neq 0 \quad \delta t_1 \neq 0$

$\eta^\alpha(t_0) \neq 0 \quad \eta^\alpha(t_1) \neq 0$

$\boxed{\text{CURVA } \gamma: \ \Delta t + \delta t_0 + \delta t_1}$ $\quad$ $\boxed{\text{CURVA } \bar\gamma: \ \Delta t}$

"INTERPRETAZIONE GEOMETRICA"

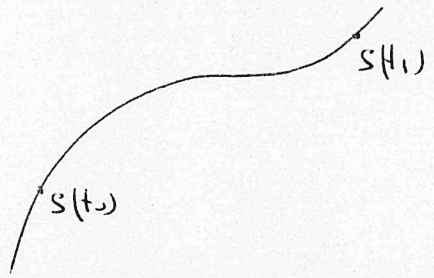
RICORDANDO CHE $L = T + U$ $\quad E = T - U \Rightarrow L + E = 2T$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (L+E)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt$$

CONSIDERIAMO IL CASO DI UN PUNTO MATERIALE

$T = \frac{1}{2} m v^2$ DA CUI

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2T}\,\sqrt{2T}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(E+U)}\,\sqrt{m}\,|v|\,dt$$



SE QUINDI INTRODUCIAMO A POSTO DEL PARAMETRO t IL PARAMETRO ASCISSA CURVILINEA s.

RICORDANDO CHE $\left|\frac{dP}{ds}\right| = 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{dP}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right| = 1 \qquad \left|\frac{dP}{dt}\right| = |v| = \frac{ds}{dt}$$

DA CUI

8) $$A = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{2m(E+U)}\,ds$$ $\Leftarrow$ AZIONE CALCOLATA SULLA TRAIETTORIA DEL PUNTO.

ED E' INDIPENDENTE DALLA LEGGE ORARIA.

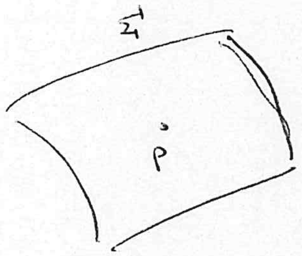
QUINDI: "IL PUNTO MATERIALE SI MUOVERA' NELLO SPAZIO LUNGO UNA TRAIETTORIA TALE DA RENDERE STAZIONARIA L'AZIONE "A""

ANALOGIA CON I PRINCIPIO DI FERMAT IN OTTICA:

"LA LUCE SI PROPAGA IN UN MEZZO CON INDICE DI RIFRAZIONE n VARIABILE LUNGO UN PERCORSO TALE DA CORRISPONDERE AD UN MINIMO CAMMINO OTTICO "G""

$$G = \int^{s_1} n\,ds \qquad (19)$$

ESEMPIO: SE CONSIDERIAMO UN PUNTO, NON SOGGETTO A FORZA, MA IN GENERALE VINCOLATO SU UNA SUPERFICIE Σ



ALLORA $U=0$ DA CUI

$$A=\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{2mE}\,ds=\sqrt{2mE}\int_{s_0}^{s_1}ds=\sqrt{2mE}\;\ell \qquad (20$$

DOVE ℓ È LA **LUNGHEZZA** DELL'ARCO DI CURVA CHE VA DA s_0 a s_1

LE CURVE CHE HANNO "LUNGHEZZA STAZIONARIA" (MINIMA O MASSIMA) SU UNA SUPERFICIE SONO LE GEODETICHE. (IN MECCANICA: "MINIMA")

IL MOTO SI SVOLGE SU UNA GEODETICA DELLA SUPERFICIE.

QUINDI:
SE IL PUNTO **MATERIALE** LIBERO (NON VINCOLATO) É ISOLATO (NON SOGGETTO A FORZE) ALLORA LA GEODETICA É LA RETTA CHE CONGIUNGE I DUE PUNTI INIZIALE E FINALE P' e P''.

SE IL PUNTO MATERIALE (ISOLATO) E' COSTRETTO A MUOVERSI SULLA SUPERFICIE DI UNA SFERA. LA CURVA SEGUITA APPARTERRÁ AL CERCHIO MASSIMO PASSANTE PER I DUE PUNTI.

~~FORMALISMO HAMILTONIANO~~

~~INTRODUCIAMO ADESSO LE VARIABILI~~

$$\cancel{(21)\quad p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}} \quad \text{~~"MOMENTI CINETICI"~~}$$

~~QUESTE SONO N RELAZIONI DEL TIPO:~~

$$\cancel{(22)\quad \begin{cases} p_1=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_1}(q_1\ldots q_N,\dot q_1\ldots \dot q_N,t)\\ \vdots\\ p_N=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_N}(q_1\ldots q_N,\dot q_1,\ldots \dot q_N\,t)\end{cases}}$$

~~SOTTO QUALI CONDIZIONI E' POSSIBILE~~ ESPRIMERE LE $\dot q_\alpha$ ~~IN FUNZIONE~~

APPLICAZIONE: CALCOLIAMO LA DISTANZA MINIMA TRA DUE PUNTI NEL PIANO:

NEL PIANO LA LUNGHEZZA DI ELEMENTO DI LINEA

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

LA LUNGHEZZA TOTALE DI UN ARCO DI CURVA TRA $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ E' DATA DA:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

A) SE SUPPONIAMO CHE $x_1 \neq x_2$ POSSIAMO PORRE

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad \text{CON} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

LA CONDIZIONE NECESSARIA PERCHE' LA CURVA TRA P_1 E P_2 SIA MINIMA E' CHE I SIA STAZIONARIO ALLORA, ESSENDO x LA VARIABILE INDIPENDENTE, PER LA FUNZIONE

$$f = \sqrt{1 + (y')^2} \quad \Rightarrow \quad \left(f = f(y(x), \dot{y}(x), x) \right)$$

DEVONO VALERE LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

POICHE' $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c$ (ESSENDO y' E c COSTANTI)

$$(y')^2 = c^2 \left(1 + (y')^2\right) \Rightarrow (y')^2 \left[1 - c^2\right] = c^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = a \Leftarrow \text{COSTANTE DA CUI}$$

$$y = ax + b \qquad \text{(EQUAZIONE DI UNA RETTA)}$$

QUINDI L'EQUAZIONE DI UNA RETTA E' "ESTREMALE" PER I. LE COSTANTI a E b SONO OTTENUTE IMPONENDO CHE P_1, P_2 APPARTENGONO ALLA RETTA

$$y_1 = a x_1 + b \qquad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_2 = a x_2 + b \qquad b = y_2 - a x_2 = y_2 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot x_2 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{(x_2 - x_1)}$$

SE $y_1 = y_2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow y = y_1$

SE $x_1 = x_2$ (E OVVIAMENTE $y_1 \neq y_2$) SI RIPETE LO STESSO RAGIONAMENTO

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (x')^2}\, dy \qquad x' = \frac{dx}{dy}$$

IN QUESTO CASO AVREMO $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(y), \dot{x}(y), y)$

E SI CERCANO LE SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ay + b \\ a = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0 \\ b = x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_1 \text{ - EQUAZ}}$$

APPLICAZIONE: "DETERMINARE LA CURVA TRA DUE PUNTI P_1, P_2 TALE CHE SIA DI MINIMA DISTANZA SULLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO"

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -R\sin\alpha\, d\alpha \\ dy = R\cos\alpha\, d\alpha \\ dz = dz \end{cases}$$

QUINDI L'ELEMENTO DI LINEA ds SARA' DATO

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\alpha^2 + dz^2 = g_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta =$$

$$= g_{11}\, d\alpha^2 + g_{22}\, dz \qquad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ TENSORE METRICO

SE SUPPONIAMO CHE $\varphi_1 \neq \varphi_2$ LA LUNGHEZZA DELLA CURVA SARÀ DATA

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{R^2 d\varphi^2 + dz^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{R^2 + (z')^2}\, d\varphi \qquad z' = \frac{dz}{d\varphi}$$

DA CUI CERCARE IL MINIMO DEL FUNZIONALE I SIGNIFICA ASSUMERE COME VARIABILE INDIPENDENTE φ, DEFINIRE LA FUNZIONE

$$f = f\left(z(\varphi), \dot{z}(\varphi), \varphi\right) = \sqrt{R^2 + (z')^2}$$

E TROVARE LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE.

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial f}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + (z')^2}} = c$$

(ESSENDO c E z' CONCORDI) $|c| < 1$

$$(z')^2 = c^2 \left[R^2 + (z')^2\right] \quad \Rightarrow \quad (z')^2 \left[1 - c^2\right] = c^2 R^2$$

$$z' = \frac{dz}{d\varphi} = \frac{cR}{\sqrt{1 - c^2}} = a \quad \Rightarrow \quad z = a\varphi + b$$

CIOÈ LA CURVA DI "CAMMINO MINIMO" CHE CONGIUNGE DUE PUNTI P_1, P_2 È UN'ELICA CILINDRICA CHE È LA GEODETICA SULLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO. OVVIAMENTE

$$a = \frac{z_2 - z_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \qquad b = \frac{\varphi_2 z_1 - \varphi_1 z_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

PER $z_1 = z_2$ SI OTTIENE LA CIRCONFERENZA $z = z_1$ (L'ELICA DEGENERA IN UNA CIRCONFERENZA)

CASO 2: $\varphi_1 = \varphi_2$ MA $z_2 \neq z_1$ SI PRENDE z COME VARIABILE INDIPENDENTE

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{R^2 \varphi'^2 + 1}\, dz \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$f = f(\varphi(z), \dot{\varphi}(z), z) = \sqrt{R^2\varphi'^2+1}$$

DOBBIAMO TROVARE LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \frac{R^2\varphi'}{\sqrt{R^2\varphi'^2+1}} = c$$

(φ' e c sono concordi)

$$(R^2\varphi')^2 = c^2(R^2\varphi'^2+1)$$

$$R^2\varphi'^2[R^2 - c^2] = c^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \frac{c}{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-c^2}} = a$$

$$\varphi^* = a z + b \qquad a = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{z_2 - z_1} = 0. \qquad \varphi = \varphi_1$$

CIOÈ L'ELICA DEGENERA IN UNA DIRETTRICE DEL CILINDRO.

APPLICAZIONE 3:

DETERMINARE LA CURVA PASSANTE DA DUE PUNTI P_1 E P_2, SULLA SUPERFICIE DI UNA SFERA, DI MINIMA DISTANZA.

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\psi \\ y = R\sin\varphi\sin\psi \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= R^2(d\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi\,(d\psi)^2 \end{aligned}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} dx = R\cos\varphi\cos\psi\, d\varphi - R\sin\varphi\sin\psi\, d\psi \\ dy = R\cos\varphi\sin\psi\, d\varphi + R\sin\varphi\cos\psi\, d\psi \\ dz = -R\sin\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

Da cui, assumendo però $\theta_1 \neq \theta_2$ considero θ come variab. indipendente (26)

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{R^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right]} =$$

$$= R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1+\sin^2\theta\,(\varphi')^2}\; d\theta \qquad \text{con } \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$$

Da cui affinché I sia minimo la funzione

$$f = \sqrt{1+\sin^2\theta\,(\varphi')^2} = f\left[\varphi(\theta), \varphi'(\theta), \theta\right]$$

dovrà soddisfare le equaz. di Eulero-Lagrange.

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

Da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \frac{\sin^2\theta\,\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot(\varphi')^2}} = c \qquad (*)$$

Essendo φ' e c concordi. Si prova che la geodetica cercata è il cerchio massimo passante per P_1 P_2. Ma dal momento che la (*) è di non facile soluzione proviamo che i punti nel cerchio massimo, che nasce dalla intersezione di un piano passante per l'origine e la sfera, soddisfano la (*)

Sia $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ si ottiene allora

$$R\left\{\sin\theta\,(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) + \gamma\cos\theta\right\} = 0$$

Supponiamo $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ (cioè non contemporaneamente nulli)

ALTRIMENTI $\quad \beta\gamma\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi/2$ $\quad$ (DA CUI $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$) IL CHE E' ESCLUSO PERCHE' $\theta_1 \neq \theta_2$ PER IPOTESI

PONIAMO

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\varphi_* \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sin\varphi_*$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\cos\varphi_* \qquad \beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sin\varphi_*$$

$$\sin\theta\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\underbrace{\left[\cos\varphi\cos\varphi_* + \sin\varphi\sin\varphi_*\right]}_{\cos(\varphi-\varphi_*)}\right\} + \gamma\cos\theta = 0$$

DA CUI:

$$\cos(\varphi-\varphi_*) = -\underbrace{\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}_{\delta}\cot\theta. \qquad (1)$$

DERIVANDO RISPETTO A θ

$$-\sin(\varphi-\varphi_*)\cdot\varphi' = -\delta\frac{1}{\sin^2\theta} \qquad (2)$$

MOLTIPLICANDO LA (1) PER φ' E QUADRANDO AMBO I MEMBRI

$$\begin{cases}(\varphi')^2\cos^2(\varphi-\varphi_*) = \delta^2(\varphi')^2\cot^2\theta\\[4pt] (\varphi')^2\sin^2(\varphi-\varphi_*) = \delta^2\dfrac{1}{\sin^4\theta}\end{cases}$$

SOMMANDO AVREMO:

$$(\varphi')^2 = \delta^2\left\{(\varphi')^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right] + \frac{1}{\sin^4\theta}\right\}$$

$$= \delta^2\left\{(\varphi')^2\left[\sin^2\theta - \sin^4\theta\right] + 1\right\}/\sin^4\theta$$

$$(\varphi')^2\sin^4\theta + \delta^2(\varphi')^2\sin^4\theta = \delta^2\left[1 + \sin^2\theta(\varphi')^2\right]$$

$$(\varphi')^2\sin^4\theta\,(1+\delta^2) = \delta^2\left[1 + \sin^2\theta\cdot(\varphi')^2\right]$$

$$\frac{\varphi' \cdot \sin^2\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta \cdot (\varphi')^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} = c.$$

CHE E' PROPRIO LA (*).

<u>CASO B</u>:

SIA $\theta_1 = \theta_2$ MA $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ALLORA CONSIDERO COME INDIPENDENTE LA φ DA CUI:

$$I = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}\, d\varphi \qquad \theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$$

ALLORA AFFINCHÉ I SIA MINIMO. AVREMO: CHE LA

$$f = f\,[\theta(\varphi), \theta'(\varphi), \varphi]$$

DOVRÀ SODDISFARE L'EQUAZ. DIFF.

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta'} - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}} \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial \theta'} = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta'} = \frac{\theta''}{\sqrt{}} - \frac{\theta' \cdot (2\theta'\theta'' + 2\sin\theta\cos\theta \cdot \theta')}{\left(\sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}\right)^3}$$

$$= \frac{\theta''(\cancel{\theta'^2} + \sin^2\theta) - \cancel{(\theta')^2\theta''} - (\theta')^2 \sin\theta\cos\theta}{\left(\sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}\right)^3} =$$

$$= \frac{\theta'' \sin^2\theta - (\theta')^2 \sin\theta\cos\theta}{\left(\sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}\right)^3}$$

$$\frac{\alpha''\sin^2\alpha-(\alpha')^2\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\sqrt{(\alpha')^2+\sin^2\alpha}\right)^3}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{(\alpha')^2+\sin^2\alpha}}=0$$

$$\alpha''\sin^2\alpha-(\alpha')^2\sin\alpha\cos\alpha-(\alpha')^2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=0$$

$$\boxed{\alpha''\sin^2\alpha-2(\alpha')^2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=0} \qquad (*)$$

ESSENDO $\alpha'\neq 0$ LA (*) EQUIVARRÀ (ASSUMENDO $\sin^2\alpha\neq 0$)
($\Leftarrow$ ALTRIMENTI AVREMO DALLE EQ. DI LAGRANGE $\cos\alpha=0$ $\alpha=\pi/2$ EQUAZ. P_1P_2 SULLA CIRCONF. NEL PIANO) (PERCHÉ LO SAPEVAMO $\rho^2\sin^2\alpha\neq 0$)

$$2\alpha'\left[\frac{\alpha''}{\sin^4\alpha}-2(\alpha')^2\frac{\cos\alpha}{\sin^5\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right]=0$$

CHE EQUIVALE ALLA RELAZIONE

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\alpha'^2}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha'^2}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=C^2$$

"EQUAZIONE DIFF. CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA"

$$\boxed{(\alpha')^2=C^2\sin^4\alpha-\sin^2\alpha} \qquad (**)$$

RICORDIAMO CHE $\varphi'=\dfrac{d\varphi}{d\alpha}=\dfrac{1}{\frac{d\alpha}{d\varphi}}=\dfrac{1}{\alpha'}$

DALLA (2) DI PAG. (21)

$$\sin(\varphi-\varphi^*)=\frac{\rho\alpha'}{\sin^2\alpha} \qquad (3)$$

DA CUI QUADRANDO E SOMMANDO LE (1) E (3)

$$\rho^2\cot g^2\alpha+\frac{\rho^2(\alpha')^2}{\sin^4\alpha}=1$$

Da cui:

$$\delta^2(\alpha')^2 + \delta^2 \frac{\cos^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}} \sin^4(\alpha) = \sin^4(\alpha)$$

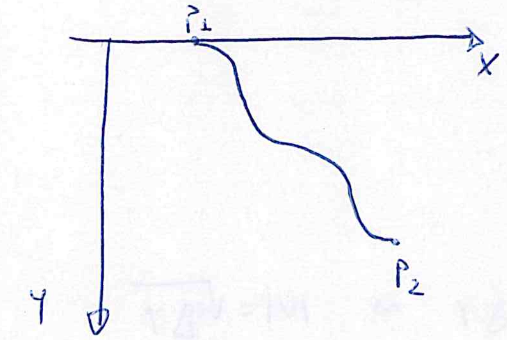
$$(\alpha')^2 = \frac{1}{\delta^2}\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\,\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\delta} + 1\right)}_{c}\sin^4\alpha - \sin^2\alpha$$

$$(\alpha')^2 = c\sin^4\alpha - \sin^2\alpha.$$

cioè soddisfa la (**) di pag. (23)

APPLICAZIONE: "PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA"



VOGLIAMO DETERMINARE LA CURVA CONGIUNGENTE DUE PUNTI P_1, P_2 PERCORSA NEL PIÙ BREVE TEMPO POSSIBILE DA UNA PARTICELLA CHE, INIZIALMENTE IN QUIETE, CADE SOTTO L'AZIONE DELLA GRAVITA' $\underline{g}$ DAL PUNTO PIU' ALTO VERSO QUELLO PIU BASSO.

DETTA $\underline{v}$ LA VELOCITA' DEL PUNTO LUNGO LA CURVA IL TEMPO NECESSARIO PER PERCORRERE LA LUNGHEZZA DI UN ELEMENTO D'ARCO ds E' DATA DA

$$dt = ds/v$$

ALLORA IL PROBLEMA SI RIDUCE NEL TROVARE IL VALORE MINIMO DELL'INTEGRALE

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{|v|}$$

DALLA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA $\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g y$ ⇒ RETRO

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{2gy}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$$

POICHE $y_1 \neq y_2$ ESSENDO P_1 E P_2 A QUOTE DIVERSE CONSIDERO COME VARIABILE INDIPENDENTE LA y DA CUI

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+x'^2}{y}}\, dy \qquad x' = \frac{dx}{dy}$$

L'ESTREMALE DI QUESTO FUNZIONALE È DATO DALLA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE.

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{DOVE} \quad f = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{y}}$$

POICHÉ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} = c$

(DAL MOMENTO CHE x' E c SONO CONCORDI) AVREMO:

$$(x')^2 = c^2 y\left[1+(x')^2\right] \Rightarrow (x')^2\left[1-c^2y\right] = c^2 y$$

DA CUI:

$$\frac{dx}{dy} = x' = \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{1-c^2y}} \Rightarrow x = \int \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{1-c^2y}}\,dy + b$$

PONIAMO $u = c\sqrt{y} \Rightarrow u^2 = c^2 y \Rightarrow 2u\,du = c^2 dy$

E RISOLVIAMO L'INTEGRALE

$$x = \frac{2}{c^2}\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du + b$$

PONIAMO $u = \operatorname{sen}\alpha$ DA CUI $du = \cos\alpha\, d\alpha$

SOSTITUENDO AVREMO

$$x = \frac{2}{c^2}\int \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cancel{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}}\cancel{\cos\alpha}\,d\alpha = \frac{2}{c^2}\int \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha + b =$$

$$= \frac{1}{c^2}\int\left[1-\cos(2\alpha)\right]d\alpha = \frac{1}{c^2}\left\{\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)\right\} + b =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right\} + b =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{\operatorname{arcsen}(u) - u\sqrt{1-u^2}\right\} + b$$

Quindi

$$X = \frac{1}{c^2}\left\{ \arcsin u - u\sqrt{1-u^2} \right\} + b$$

(1)

$$= \frac{1}{c^2}\left\{ \arcsin(c\sqrt{y}) - c\sqrt{y(1-c^2y)} \right\} + b$$

per $y_0 = 0$ AVREMO. $X = X_0 = b$ (PER SEMPLICITÀ PONIAMO $X_0 = 0$)

LA (1) E' L'EQUAZIONE DELLA CICLOIDE

SE INFATTI PONIAMO $y = R(1-\cos\omega t) = 2R\sin^2 \omega t/2$

CON $2R = \frac{1}{c^2}$ DA CUI $c^2 y = \sin^2(\omega t/2)$

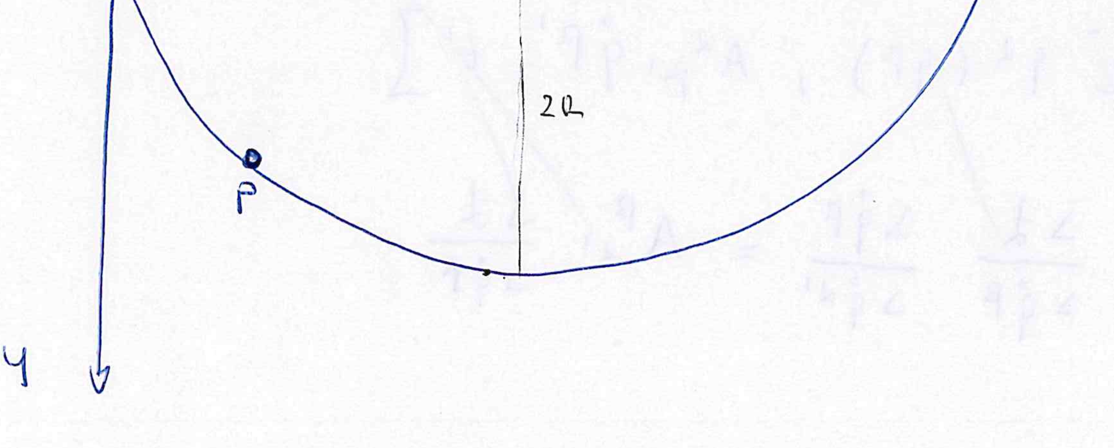
$$X(t) = 2R\left\{ \arcsin\left[\sin(\omega t/2)\right] - \sin(\omega/2 t)\sqrt{1-\sin^2(\omega/2 t)} \right\} =$$

$$= \cancel{2}R\omega \frac{t}{\cancel{2}} - 2R\sin\omega t/2 \cos\omega t/2 = R\omega t - R\sin\omega t$$

$$= R(\omega t - \sin\omega t)$$

cioè L'EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\begin{cases} X = R(\omega t - \sin\omega t) = R[\alpha - \sin\alpha] \\ y = R(1-\cos\omega t) = R[1-\cos\alpha] \end{cases}$$

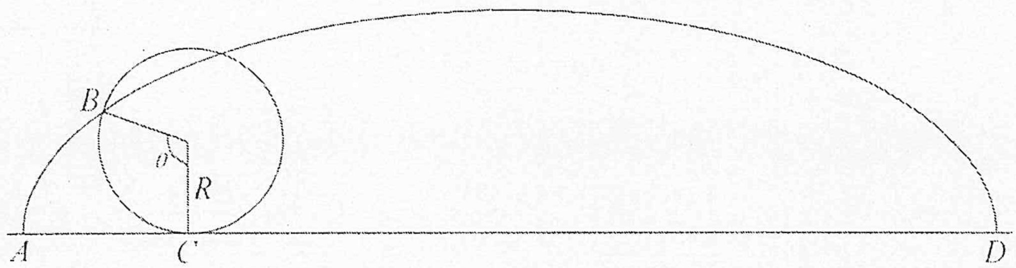


La cicloide.

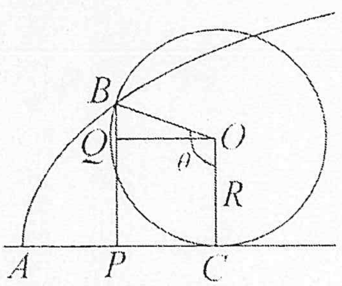
La curva nota oggi come cicloide fu considerata per primo da Galileo, che in un primo momento congetturò che l'area della figura racchiusa fosse tre volte quella del cerchio che la genera. Più tardi, forse a causa di qualche esperimento mal riuscito, si convinse che questo non era vero, a torto perché poco dopo la sua morte questo risultato fu dimostrato indipendentemente da numerosi studiosi: Torricelli, Roberval, Fermat e Pascal. Torricelli e Roberval ne determinarono la tangente in un punto arbitrario, mediante la composizione dei movimenti.

1. *Descrizione della cicloide.*

Consideriamo un cerchio di raggio R che partendo dal punto A rotoli senza strisciare sulla retta AD. Il punto B, che all'inizio del moto coincide con A, descrive una curva ABD detta cicloide. In un giro, la ruota avrà percorso un cammino pari alla sua circonferenza, e quindi la base AD della cicloide misura $2\pi R$.



Calcoliamo le coordinate di un punto generico B sulla cicloide. Sia θ l'angolo che corrisponde a questo punto; l'arco BC ha lunghezza $R\theta$ e il segmento AC, che per la definizione della cicloide è uguale all'arco BC, avrà anch'esso lunghezza $R\theta$.



Per trovare le coordinate di B consideriamo la figura qui accanto. Si ha $BQ = R$ sen $(\theta-\pi/2) = -\cos\theta$ e $PC = QO = R\cos(\theta-\pi/2) = R$ sen θ; pertanto

$x = AP = AC - PC = R\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$
$y = PB = PQ + BQ = R\,(1 - \cos\theta)$.

Se pensiamo che l'angolo θ cresca con velocità uniforme $v=1$, risulta $\theta = t$. La cicloide si può allora immaginare descritta da due movimenti, uno traslatorio uniforme lungo l'asse x, di equazioni $x = Rt$, $y = 0$, l'altro da un moto rotatorio uniforme in senso antiorario attorno al punto (0,1), di equazioni $x = -R$ sen t, $y = R(1-\cos t)$. La composizione dei due moti genera la cicloide.

2. *L'area della cicloide con il metodo degli indivisibili (secondo Torricelli)*