Capitolo 1

ALGEBRA TENSORIALE

1.1 Richiami sugli spazi vettoriali

Definizione 1.1.1 *Uno* **spazio vettoriale** *sul corpo $\Re$ dei reali, è un gruppo additivo abeliano E, sul quale è definita un'operazione di moltiplicazione che ad ogni $\alpha \in \Re$ e $\mathbf{v} \in E$ associa un elemento $\alpha\mathbf{v} \in E$, che gode delle seguenti proprietà:*

1. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
2. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
4. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

$\forall\alpha, \beta \in \Re$ *e* $\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$.

Gli elementi di E verranno chiamati **vettori**.

Definizione 1.1.2 *Si dice che n elementi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ di E sono* **linearmente indipendenti**, *quando $\lambda^i\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^i = 0$* [1].

Definizione 1.1.3 *Si dice che uno spazio vettoriale E ha dimensione $n \in \mathcal{N}$ e si indica con E_n, se ogni insieme di vettori linearmente indipendenti ha al più n elementi. Un insieme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di n vettori linearmente indipententi si chiama* **base** *di E_n.*

Proposizione 1.1.1 *Una n-upla $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n$ di vettori è una base di E_n se e solo se ogni vettore $\mathbf{v} \in E_n$ si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare dei vettori dati: $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$.*

Gli elementi della n-upla v^i univocamente individuata da $\mathbf{v}$, si chiamano **componenti** di $\mathbf{v}$.

Proposizione 1.1.2 *Assegnata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed una n-upla di vettori $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, che per la Proposizione 1.1.1 possone essere espressi da:*

$$\mathbf{e}'_i = A^j{}_i\mathbf{e}_j \tag{1.1}$$

la seconda n-upla è una base se e solo se la matrice $A = \|A^i{}_j\|$ è regolare. Ed in questo caso l'equazione inversa della (1.1) è:

$$\mathbf{e}_i = B^j{}_i\mathbf{e}'_j \tag{1.2}$$

essendo $B = \|B^i{}_j\|$ la matrice inversa di A.

Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ sono due basi di E_n, e $\mathbf{v} \in E_n$, allora possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v'^i\mathbf{e}'_i$$

dalle quali per la (1.2) si ha:

$$v'^j\mathbf{e}'_j = v^i\mathbf{e}_i = v^iB^j{}_i\mathbf{e}'_j \tag{1.3}$$

da cui per la Proposizione 1.1.1 si ricava:

$$v'^j = B^j{}_iv^i \tag{1.4}$$

[1] Si sta usando la *convenzione di Einstein* secondo cui due indici ripetuti di cui uno in alto ed uno in basso (indici muti o legati) sottintendono una sommatoria, mentre ogni altro indice (libero) i sottindente che l'espressione in cui compare va considerata per $i = 1, 2, \ldots, n$

e analogamente

$$v^j = A^j{}_i v'^i. \tag{1.5}$$

Confrontando la (1.1) con la (1.4) e la (1.2) con la (1.5), si deduce che le componenti di un vettore si trasformano con la matrice inversa della matrice che determina la trasformazione delle basi, per questo motivo le componenti di un vettore si chiamano anche **componenti controvarianti**.

1.2 Forme lineari

Definizione 1.2.1 *Una* **forma lineare** *o* **1-forma** *ϕ su uno spazio vettoriale E_n è un'applicazione da E_n in $\Re$ lineare, cioè:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \text{ and } \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \qquad \phi(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}) = \alpha \phi(\mathbf{v}) + \beta \phi(\mathbf{u}). \tag{1.6}$$

Definizione 1.2.2 *Assegnato uno spazio vettoriale E_n si chiama* **spazio duale** *di E_n e si indica con il simbolo E_n^*, l'insieme di tutte le forma lineari su E_n.*

Proposizione 1.2.1 *E_n^* è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in E_n^* \qquad (\phi_1 + \phi_2)(\mathbf{v}) = \phi_1(\mathbf{v}) + \phi_2(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in E_n$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall \phi \in E_n^* \qquad (\alpha\phi)(\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in E_n$$

danno come risultato elementi di E_n^* e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. □

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, consideriamo le applicazioni $e^1, e^2, \ldots, e^n$ definite da:

$$\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e_i} \in E_n \qquad e^i(\mathbf{v}) = v^i \in \Re \tag{1.7}$$

si dimostra immediatamente che queste applicazioni sono lineari, quindi sono elementi di E_n^*. Inoltre se $\phi \in E_n^*$, per la (1.7)

$$\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e_i} \in E_n \qquad \phi(\mathbf{v}) = v^i \phi(\mathbf{e_i}) = \phi_i e^i(\mathbf{v}) \quad \text{dove} \quad \phi_i = \phi(\mathbf{e_i}) \tag{1.8}$$

quindi ϕ può essere espressa come una combinazione lineare degli elementi $e^1, e^2, \ldots, e^n$:

$$\phi = \phi_i e^i. \tag{1.9}$$

Si può dimostrare che la rappresentazione (1.9) è unica. Infatti supponendo che ne esista un'altra: $\phi = \phi'_i e^i$, sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.9), si ottiene: $(\phi_i - \phi'_i)e^i = 0$, quindi tenendo conto che per la (1.7)

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i{}_j \tag{1.10}$$

essendo $\delta^i{}_j$ il **simbolo di Kronecker** definito da:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{1.11}$$

si ha:

$$0 = (\phi_i - \phi'_i)e^i(\mathbf{e}_j) = (\phi_i - \phi'_i)\delta^i{}_j = \phi_j - \phi'_j.$$

Resta così dimostrato che $e^1, e^2, \ldots, e^n$ è una base di E_n^* che si chiama **base duale** di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, e quindi

Proposizione 1.2.2 *E_n^* è uno spazio vettoriale di dimensione n.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i$ un qualunque vettore di E_n, allora per la (1.4) si ha:

$$e'^i(\mathbf{v}) = v'^i = B^i{}_j v^j = B^i{}_j e^j(\mathbf{v}) \tag{1.12}$$

quindi

$$e'^i = B^i{}_j e^j \tag{1.13}$$

e analogamente

$$e^i = A^i{}_j e'^j. \tag{1.14}$$

Confrontando le (1.13), (1.14) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le basi duali si trasformano con la matrice inversa rispetto alle basi di E_n a cui sono legate.

Ora, se $\phi = \phi_i e^i = \phi'_i e'^i$ è un elemento di E_n^*, allora

$$\phi'_i = \phi(\mathbf{e'}_i) = \phi(A^j{}_i \mathbf{e}_j) = A^j{}_i \phi(\mathbf{e}_j)) = A^j{}_i \phi_j \tag{1.15}$$

analogamente

$$\phi_i = B^j{}_i \phi'_j. \tag{1.16}$$

Confrontando le (1.15), (1.16) con (1.1), (1.2), si deduce che le componenti di una forma lineare si trasformano con la stessa matrice delle basi di E_n, per questo motivo si chiamano **componenti covarianti**.

Per la Proposizione 1.2.2, il duale E_n^{**} di E_n^* è uno spazio vettoriale di dimensione n. Però questa operazione di iterazione del duale non produce una struttura algebrica nuova, come dimostra il seguente

Teorema 1.2.1 *Esiste un isomorfismo [2] canonico [3] tra E_n e E_n^{**}*

Prima di dimostrare questo teorema conviene dimostrare il seguente

Lemma 1.2.1 *Se $\tau : E_n \to E'_n$ è un'applicazione lineare e iniettiva tra spazi vettoriali di egual dimensione, allora essa è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che τ è surgettiva. Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n consideriamo i vettori $\tau(\mathbf{e}_1), \tau(\mathbf{e}_2), \ldots, \tau(\mathbf{e}_n) \in E'_n$. Essi costituiscono una base di E'_n, infatti per la linearità e inettività di τ

$$\lambda^i \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tau(\lambda^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^i = 0.$$

Quindi se $\mathbf{v} \in E'_n$ allora $\mathbf{v} = v^i \tau(\mathbf{e}_i) = \tau(v^i \mathbf{e}_i)$. □

Dimostrazione Teorema 1. Sia τ l'applicazione definita dalla seguente legge:

$$\forall \mathbf{v} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) : E_n^* \to \Re \quad \text{con} \quad \tau(\mathbf{v})(\phi) = \phi(\mathbf{v}) \in \Re \quad \forall \phi \in E_n^*. \tag{1.17}$$

$\tau(\mathbf{v})$ è lineare, infatti:

$$\tau(\mathbf{v})(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(\mathbf{v}) = \alpha\phi_1(\mathbf{v}) + \beta\phi_2(\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{v})(\phi_1) + \beta\tau(\mathbf{v})(\phi_2)$$

quindi $\tau(\mathbf{v}) \in E_n^{**}$ e $\tau : E_n \to E_n^{**}$.

τ è lineare, infatti se $\alpha, \beta \in \Re$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$ allora

$$\forall \phi \in E_n^* \quad \tau(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\phi) = \phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{u})(\phi) + \beta\tau(\mathbf{v})(\phi) = (\alpha\tau(\mathbf{u}) + \beta\tau(\mathbf{v}))(\phi)$$

quindi

$$\tau(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{u}) + \beta\tau(\mathbf{v}).$$

τ è iniettiva, infatti se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E_n$ sono tali che $\tau(\mathbf{v}_1) = \tau(\mathbf{v}_2)$ allora

$$\forall \phi \in E_n^* \quad \tau(\mathbf{v}_1)(\phi) = \tau(\mathbf{v}_2)(\phi) \Rightarrow \phi(\mathbf{v}_1) = \phi(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \phi(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

Assegnata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n e la sua duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (v_1^i - v_2^i)\mathbf{e}_i$, allora per l'equazione precedente

$$0 = e^i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (v_1^i - v_2^i) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

Da quanto dimostrato fino ad ora e dal Lemma 1.2.1 segue l'asserto. □

---

[2] Un isomorfismo tra due spazi vettoriali é un'applicazione lineare e iniettiva da uno spazio vettoriale su tutto l'altro.

[3] Indipendente dalla base. Tra due spazi vettoriali di ugual dimensione si puó sempre trovare un isomorfismo dipendente dalla base, infatti fissando una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ nel primo spazio vettoriale ed una base $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ nel secondo, si dimostra facilmente che l'applicazione $\tau(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \mathbf{e'}_i$ è un isomorfismo.

1.3 Tensori doppi covarianti

Definizione 1.3.1 *Assegnato uno spazio vettoriale E_n, si chiama* **tensore di rango 2 covariante** *o* **tensore doppio covariante**, *un'applicazione $T : E_n \times E_n \to \Re$ bilineare, cioè lineare rispetto ad entrambe le variabili:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_n$$

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta T(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad T(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \tag{1.18}$$

L'insieme di tutti i tensori doppi covarianti verrà indicato con uno dei simboli $\mathbf{E}^0{}_2 = E_n^* \otimes E_n^*$

Proposizione 1.3.1 *$E_n^* \otimes E_n^*$ è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in E_n^* \otimes E_n^* \qquad (T_1 + T_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + T_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in E_n^* \otimes E_n^* \qquad (\alpha T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$$

danno come risultato elementi di $E_n^* \otimes E_n^*$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. □

Definizione 1.3.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di due forme lineari $\phi_1, \phi_2 \in E_n^*$ e si indica con il simbolo $\phi_1 \otimes \phi_2$ l'applicazione da $E_n \times E_n$ e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad \phi_1 \otimes \phi_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi_1(\mathbf{u})\phi_2(\mathbf{v}). \tag{1.19}$$

È immediato verificare che la (1.19) verifica la condizione (1.18), quindi $\phi_1 \otimes \phi_2 \in E_n^* \otimes E_n^*$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in E_n^* \otimes E_n^*$, per le (1.7), (1.18), (1.19) possiamo scrivere:

$$\forall \mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i, \mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(u^i\mathbf{e}_i, v^j\mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)u^iv^j = T_{ij}e^i(\mathbf{u})e^j(\mathbf{v}) = T_{ij}e^i \otimes e^j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

dove si è posto $T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $e^i \otimes e^j$:

$$T = T_{ij}e^i \otimes e^j. \tag{1.20}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra $T = T'_{ij}e^i \otimes e^j$ allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.20), si otterrebbe $(T_{ij} - T'_{ij})e^i \otimes e^j = 0$ e quindi per (1.10) e (1.19)

$$0 = (T_{ij} - T'_{ij})e^i \otimes e^j(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = (T_{ij} - T'_{ij})e^i(\mathbf{e}_h)e^j(\mathbf{e}_k) = (T_{ij} - T'_{ij})\delta^i{}_h\delta^j{}_k = T_{hk} - T'_{hk}.$$

Poiche ogni $T \in E_n^* \otimes E_n^*$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $e^i \otimes e^j$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $E_n^* \otimes E_n^*$, quindi resta provato che

Proposizione 1.3.2 *$E_n^* \otimes E_n^*$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^2.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T_{ij}e^i \otimes e^j = T'_{ij}e'^i \otimes e'^j$ un elemento di $E_n^* \otimes E_n^*$, allora

$$T'_{ij} = T(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e'}_j) = T(A^h{}_i\mathbf{e}_h, A^k{}_j\mathbf{e}_k) = A^h{}_iA^k{}_jT(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = A^h{}_iA^k{}_jT_{hk} \tag{1.21}$$

e analogamente

$$T_{ij} = B^h{}_iB^k{}_jT'_{hk}. \tag{1.22}$$

Confrontando le (1.21), (1.22) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le componenti di un tensore doppio covariante si trasformano con la stessa matrice delle basi di E_n, per questo motivo tali tensori vengono chiamati *covarianti.*

Abbiamo visto che fissato un tensore doppio covariante, allora è possibile associare ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, n^2 numeri reali T_{ij} (le sue componenti) che si trasformano al variare della base mediante le leggi (1.21) e (1.22). Viceversa se ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, associamo n^2 numeri reali T_{ij}, allora la (1.20) definisce un tensore doppio covariante, se gli n^2 numeri assegnati si trasformano, al variare della base, con le leggi (1.21), (1.22).

Quindi un tensore doppio covariante T può essere introdotto sia mediante una forma bilineare o assegnando n^2 numeri reali T_{ij} in ogni base, che si trasformano al variare della base in accordo con le (1.21), (1.22). [4]

[4] Questo discorso vale ovviamente anche per i vettori e per le forme lineari. Per esempio, un vettore può essere introdotto assegnando n componenti v^i in ogni base, che si trasformano al variare della base mediante le (1.4), (1.5)

Definizione 1.3.3 *Un tensore doppio covariante si dice simmetrico se:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.23}$$

Se T_{ij} sono le componenti di un tensore doppio simmetrico T rispetto ad una qualunque base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, allora si ha:

$$T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = T_{ji}$$

Viceversa se le componenti di un tensore doppio covariante in una data base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ verificano la condizione:

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{1.24}$$

allora

$$\forall \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \in E_n$$

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = u^i v^j T_{ij} = u^i v^j T_{ji} = u^i v^j T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = T(v^j \mathbf{e}_j, u^i \mathbf{e}_i) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

quindi T è simmetrico e la (1.24) vale in ogni base. Si ha così:

Proposizione 1.3.3 *Un tensore doppio controvariante è simmetrico se e solo se in una base le sue componenti verificano la (1.24).*

Definizione 1.3.4 *Un tensore doppio covariante si dice antisimmetrico se è verificata la seguente condizione:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.25}$$

Con lo stesso procedimento usato per i tensori simmetrici si dimostra che

Proposizione 1.3.4 *Un tensore doppio controvariante è antisimmetrico se e solo se in una base le sue componenti verificano l'equazione*

$$T_{ij} = -T_{ji}. \tag{1.26}$$

Assegnato un tensore T di compnenti T_{ij} nella generica base di E_n, definiamo i seguenti n^2 numeri reali:

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}) \tag{1.27}$$

che chiameremo parte simmetrica di T_{ij}. Verifichiamo che le (1.27) definiscono un tensore, che denoteremo con il simbolo $S(T)$. [5] Infatti se T'_{ij} sono le componenti di T in un'altra base, legate alle T_{ij} dalle (1.21), (1.22), allora:

$$T'_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T'_{ij} + T'_{ji}) = \frac{1}{2!}(A^h{}_i A^k{}_j T_{hk} + A^k{}_j A^h{}_i T_{kh}) = \frac{1}{2!} A^h{}_i A^k{}_j (T_{hk} + T_{kh}) = A^h{}_i A^k{}_j T_{(hk)}.$$

Analogamente si puo definire la parte antisimmetrica di T:

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2!}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{1.28}$$

e dimostrare che le (1.28) sono le componenti di un tensore, che denoteremo con il simbolo $A(T)$. [6]

Infine dalle ovvie implicazioni:

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}, \quad T_{(ij)} = 0 \Leftrightarrow T_{ij} = -T_{ji} \quad \text{e} \quad T_{[ij]} = 0 \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}$$

segue:

Proposizione 1.3.5 *Ogni tensore 'e uguale alla somma della sua parte simmetrica e antisimetrica ed inoltre è simmetrico (antisimmetrico) se e solo la sua parte antisimmetrica (simmetrica) é nulla.*

[5] Questo è un esempio di come si può definire un tensore mediante le sue componenti. $S(T)$ poteva anche essere definito intrinsecamente dalla legge: $S(T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2!}(T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + T(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$.

[6] La definizione intrinseca di $A(T)$ è : $A(T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2!}(T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - T(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$.

1.4 Tensori doppi controvarianti

Definizione 1.4.1 *Dato uno spazio vettoriale E_n, si chiama* **tensore doppio controvariante** *o* **tensore di rango 2 controvariante**, *un'applicazione $T : E_n^* \times E_n^* \to \Re$ bilineare:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall \phi, \psi, \chi \in E_n^*$$

$$T(\alpha\phi + \beta\psi, \chi) = \alpha T(\phi, \chi) + \beta T(\psi, \chi), \quad T(\phi, \alpha\psi + \beta\chi) = \alpha T(\phi, \psi) + \beta T(\phi, \chi). \tag{1.29}$$

L'insieme di tutti i tensori doppi controvarianti verrà indicato con uno dei simboli $\mathbf{E}^2{}_0 = E_n \otimes E_n$. [7]

Proposizione 1.4.1 *$E_n \otimes E_n$ è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in E_n \otimes E_n \qquad (T_1 + T_2)(\phi, \psi) = T_1(\phi, \psi) + T_2(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in E_n^*$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in E_n \otimes E_n \qquad (\alpha T)(\phi, \psi) = \alpha T(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in E_n^*$$

danno come risultato elementi di $E_n \otimes E_n$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. □

Definizione 1.4.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di due vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in E_n$ e si indica con il simbolo $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ l'applicazione da $E_n^* \times E_n^*$ e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \phi, \psi \in E_n^* \quad \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2(\phi, \psi) = \phi(\mathbf{u}_1)\psi(\mathbf{u}_2).^8 \tag{1.30}$$

È immediato verificare che la (1.30) verifica la condizione (1.29), quindi $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \in E_n \otimes E_n$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in E_n \otimes E_n$, per le (1.29), (1.30) possiamo scrivere:

$$\forall \phi = \phi_i e^i, \psi = \psi_i e^i \in E_n^* \quad T(\phi, \psi) = T(\phi_i e^i, \psi_j e^j) = T(e^i, e^j)\phi_i\psi_j = T^{ij}\phi(\mathbf{e}_i)\psi(\mathbf{e}_j) = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j(\phi, \psi)$$

dove si è posto $T^{ij} = T(e^i, e^j)$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$:

$$T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{1.31}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra $T = T'^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.31), si otterrebbe $(T^{ij} - T'^{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = 0$ e quindi per le (1.10) e (1.30)

$$0 = (T^{ij} - T'^{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j(e^h, e^k) = (T^{ij} - T'^{ij})e^h(\mathbf{e}_i)e^k(\mathbf{e}_j) = (T^{ij} - T'^{ij})\delta^h{}_i\delta^k{}_j = T^{hk} - T'^{hk}.$$

Poiche ogni $T \in E_n \otimes E_n$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $E_n \otimes E_n$, quindi resta provato che

Proposizione 1.4.2 *$E_n \otimes E_n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^2.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T'^{ij}\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j$ un elemento di $E_n \otimes E_n$, allora per la (1.13) e (1.29)

$$T'^{ij} = T(e'^i, e'^j) = T(B^i{}_h e^h, B^j{}_k e^k) = B^i{}_h B^j{}_k T(e^h, e^k) = B^i{}_h B^j{}_k T^{hk} \tag{1.32}$$

e analogamente per la (1.14) e (1.29)

$$T^{ij} = A^i{}_h A^j{}_k T'^{hk}. \tag{1.33}$$

Confrontando le (1.32), (1.33) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le componenti di un tensore doppio controvariante si trasformano con la matrice inversa rispetto a quella del cambiamento di base di E_n, per questo motivo tali tensori vengono chiamati *controvarianti.*

Per i tensori doppi controvarianti si possono ripetere le stesse considerazioni già fatte per quelli covarianti.

In particolare, seguendo lo stesso ragionamento, si puó vedere che un tensore doppio controvariante può essere introdotto, oltre che nella forma intrinseca data dalla Definizione 1.4.1, anche assegnando, per ogni base di E_n, n^2 numeri reali T^{ij} soggetti alla condizione di trasformarsi, al variare della base, in accordo con le (1.32), (1.33).

Si possono definire i tensori doppi controvarianti simmetrici e antisimmetrici in maniera analoga a (1.23), (1.25). E, come nel caso dei tensori doppi covarianti, si può vedere che, un tensore è simmetrico (antisimmetrico) se e solo se in una data base le componenti soddisfano le equazioni $T^{ij} = T^{ji}$ $(T^{ij} = -T^{ji})$.

Analogamente, utilizzando le stesse formule del paragrafo precedente con gli indici in alto, si possono definire i tensori *parte simmetrica* $S(T)$ e *parte antisimmetrica* $A(T)$ di un tensore doppio controvariante T, e concludere che un tensore doppio controvariante si può scrivere come la somma della sua parte simmetrica e della sua parte antisimmetrica e in particolare che esso è simmetrico (antisimmetrico) se e solo se la sua parte antisimmetrica (simmetrica) è nulla.

---

[7] Tale notazione è giustificata dal Teorema 1.

[8] Questa definizione si basa sull'isomorfismo (1.17) definito nel Teorema 1

1.5 Tensori di rango k

Definizione 1.5.1 *Dato uno spazio vettoriale E_n, $r, s \in \mathcal{N}$ e $k = r + s$, si chiama* **tensore di tipo (r, s)** *o* **tensore di rango k, r-volte controvariante e s-volte covariante** *un'applicazione*

$$T : \underbrace{E_n^* \times \cdots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \cdots \times E_n}_{s-volte} \to \Re$$

multilineare, cioè lineare rispetto ad ogni variabile. L'insieme di tutti i tensori di tipo (r, s) si indica con uno dei simboli $\mathbf{E}^r{}_s = \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{r-volte} \otimes \underbrace{E_n^* \otimes \cdots \otimes E_n^*}_{s-volte}$.[9]

Proposizione 1.5.1 $\mathbf{E}^r{}_s$ *è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in \mathbf{E}^r{}_s \qquad (T_1 + T_2)(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = T_1(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) + T_2(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in \mathbf{E}^r{}_s \qquad (\alpha T)(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = \alpha T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$$

$$\forall \phi_1, \ldots, \phi_r \in E_n^* \quad \forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in E_n$$

danno come risultato elementi di $E^r{}_s$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. □

Definizione 1.5.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di r vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in E_n$ e s 1-forme $\phi_1, \ldots, \phi_s \in E_n^*$ e si indica con il simbolo $\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_s$, l'applicazione da $\underbrace{E_n^* \times \cdots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \cdots \times E_n}_{s-volte}$ e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \psi_1, \ldots, \psi_r \in E_n^*, \forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in E_n$$

$$\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_s(\psi_1, \ldots, \psi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = \psi_1(\mathbf{u}_1) \ldots \psi_r(\mathbf{u}_r)\phi_1(\mathbf{v}_1) \ldots \phi_r(\mathbf{v}_s). \tag{1.34}$$

È immediato verificare che la (1.34) è multilineare, quindi $\mathbf{u}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_s \in \mathbf{E}^r{}_s$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in \mathbf{E}^r{}_s$, per la multilinearità e la (1.34), possiamo scrivere:

$$\forall \phi_1 = \phi_{1 i_1} e^{i_1}, \ldots, \phi_r = \phi_{r i_r} e^{i_r} \in E_n^* \quad \forall \mathbf{v_1} = v_1{}^{j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v_s} = v_s{}^{j_s}\mathbf{e}_{j_s} \in E_n$$

$$T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}) = T(\phi_{1 i_1} e^{i_1}, \ldots, \phi_{r i_r} e^{i_r}, v_1{}^{j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, v_s{}^{j_s}\mathbf{e}_{j_s}) =$$

$$T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s})\phi_{1 i_1} \ldots \phi_{r i_r} v_1{}^{j_1} \ldots v_s{}^{j_s} = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \phi_1(\mathbf{e}_{i_1}) \ldots \phi_r(\mathbf{e}_{i_r}) e^{j_1}(\mathbf{v_1}) \ldots e^{j_s}(\mathbf{v_s}) =$$

$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$$

dove si è posto $T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s})$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^{r+s} prodotti tensoriali $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$:

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}. \tag{1.35}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra

$$T = T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.35), si otterrebbe

$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} = 0$$

e quindi

$$0 = (T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}(e^{h_1}, \ldots, e^{h_r}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_s}) =$$

$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) e^{h_1}(\mathbf{e}_{i_1}) \ldots e^{h_r}(\mathbf{e}_{i_r}) e^{j_1}(\mathbf{e}_{k_1}) \ldots e^{j_s}(\mathbf{e}_{k_s}) =$$

$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \delta^{h_1}{}_{i_1} \ldots \delta^{h_r}{}_{i_r} \delta^{j_1}{}_{k_1} \ldots \delta^{j_s}{}_{k_s} = T^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s} - T'^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s}.$$

Poichè ogni $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^{r+s} prodotti tensoriali $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $\mathbf{E}^r{}_s$, quindi resta provato che

[9] La definizione viene data in questa forma per semplicità di scrittura, ma l'ordine dei fattori non è vincolante, per esempio $\mathbf{E}_1{}^2{}_1 = E_n^* \otimes E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$ è l'insieme delle applicazioni multilineari da $E_n \times E_n^* \times E_n^* \times E_n$ a valori in $\Re$. Osserviamo inoltre che: $\mathbf{E}^0{}_1 = E_n^*$, $\mathbf{E}^1{}_0 = E_n^{**} \sim E_n$ (Teorema 1) e per convenzione $\mathbf{E}^0{}_0 = \Re$.

Proposizione 1.5.2 *$\mathbf{E}^r{}_s$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^{r+s}.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} = T'^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}\mathbf{e}'_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}'_{i_r} \otimes e'^{j_1} \otimes \cdots \otimes e'^{j_s}$ un elemento di $\mathbf{E}^r{}_s$, allora per (1.1) e (1.13)

$$T'^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} = T(e'^{i_1}, \ldots, e'^{i_r}, \mathbf{e}'_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}'_{j_s}) = T(B^{i_1}{}_{h_1}e^{h_1}, \ldots, B^{i_r}{}_{h_r}e^{h_r}, A^{k_1}{}_{j_1}\mathbf{e}_{k_1}, \ldots, A^{k_s}{}_{j_s}\mathbf{e}_{k_s}) =$$

$$B^{i_1}{}_{h_1}\ldots B^{i_r}{}_{h_r}A^{k_1}{}_{j_1}\ldots A^{k_s}{}_{j_s}T(e^{h_1}, \ldots, e^{h_r}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_s}) = B^{i_1}{}_{h_1}\ldots B^{i_r}{}_{h_r}A^{k_1}{}_{j_1}\ldots A^{k_s}{}_{j_s}T^{h_1\ldots h_r}{}_{k_1\ldots k_s} \tag{1.36}$$

e analogamente per (1.2) (1.14)

$$T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} = A^{i_1}{}_{h_1}\ldots A^{i_r}{}_{h_r}B^{k_1}{}_{j_1}\ldots B^{k_s}{}_{j_s}T'^{h_1\ldots h_r}{}_{k_1\ldots k_s}. \tag{1.37}$$

Confrontando le (1.36), (1.37) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che agli r indici in alto corrisponde la matrice inversa rispetto a quella del cambiamento di base (legge di controvarianza), mentre agli indici in basso corrisponde la stessa matrice (legge di covarianza), per questo motivo tali tensori vengono chiamati *r-volte controvarianti e s-volte covarianti*, gli indici in alto *indici di controvarianza* e gli indici in basso *indici di covarianza.*

Seguendo lo stesso ragionamento fatto nel caso dei tensori doppi covarianti, si può vedere che un tensore di rango $k = r + s$ può essere introdotto, oltre che nella forma intrinseca data dalla Definizione 1.5.1, anche assegnando, per ogni base di E_n, n^k numeri reali $T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}$ soggetti alla condizione di trasformarsi, al variare della base, in accordo con le (1.36), (1.37). Queste ultime equazioni rendono naturale la seguente

Definizione 1.5.3 *Un **tensore di rango zero** é uno scalare indipendente dalla base.*

Un esempio di tensore di rango zero é, come vedremo in seguito, il prodotto scalare. Infatti il prodotto scalare di due vettori é un numero indipendente dalla base in cui si calcola.

Le nozioni di simmetria, antisimmetria, parte simmetrica, parte antisimmetrica, introdotte per i tensori doppi, ammettono svariate genealizzazioni nel caso di tensori generici. In generale t indici di covarianza racchiusi da parentesi tonde indicano $\frac{1}{t!}$ per la somma su tutte le possibili permutazione su quegli indici, mentre t indici di covarianza racchiusi da parentesi quadre indicano $\frac{1}{t!}$ per la somma su tutte le possibili permutazione pari su quegli indici meno la differenza sulle permutazioni dispari. La stessa cosa vale se si trovano t indici di controvarianza racchiusi da parentesi tonde o quadre. In particolare se $T \in \mathbf{E}^0_p$, denotato con S_p il gruppo delle permutazioni dei primi p interi , e ponendo per ogni $\pi \in S_p$

$$\pi T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \mathbf{v}_{\pi(2)}, \ldots \mathbf{v}_{\pi(n)}) \quad \Leftrightarrow \quad \pi T_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = T_{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_p)}$$

si definisce la parte simmetrica di T

$$ST = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\pi T \quad \Leftrightarrow \quad T_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\pi T_{i_1, i_2, \ldots, i_p}.$$

Per definire la parte antisimmetrica di $T \in \mathbf{E}^0_p$ bisogna introdurre il simbolo

$$sign(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{se } \pi \text{ é pari} \\ -1 & \text{se } \pi \text{ é dispari} \end{cases}$$

e il simbolo di Levi Civita

$$\epsilon^{k_1, k_2, \ldots, k_p}_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = \begin{cases} 0 & \text{se } (k_1, k_2, \ldots, k_p) \text{ non é una permutazione di } (i_1, i_2, \ldots, i_p) \\ +1 & \text{se } (k_1, k_2, \ldots, k_p) \text{ é una permutazione pari di } (i_1, i_2, \ldots, i_p) \\ -1 & \text{se } (k_1, k_2, \ldots, k_p) \text{ é una permutazione dispari di } (i_1, i_2, \ldots, i_p) \end{cases},$$

$$AT = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} sign(\pi)\pi T \quad \Leftrightarrow \quad T_{[i_1, i_2, \ldots, i_p]} = \frac{1}{p!}\epsilon^{k_1, k_2, \ldots, k_p}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}T_{k_1, k_2, \ldots, k_p}$$

Di seguito, verranno fatti alcuni esempi. Sia $T \in \mathbf{E}^1{}_3$, un tensore di componenti, in una data base, $T^i{}_{jhk}$. Allora si può vedere che T è simmetrico rispetto agli ultimi due indici[10] se e solo se $T^i{}_{jhk} = T^i{}_{jkh}$, condizione che è verificata se e solo se $T^i{}_{j[hk]} = 0$, dove $T^i{}_{j[hk]} = \frac{1}{2!}(T^i{}_{jhk} - T^i{}_{jkh})$.

Possiamo, per esempio, definire, in accordo con quanto detto prima, il tensore *parte antisimmetrica* di T rispetto agli indici di covarianza:

$$T^i{}_{[jhk]} = \frac{1}{3!}(T^i{}_{jhk} + T^i{}_{hkj} + T^i{}_{kjh} - T^i{}_{jkh} - T^i{}_{khj} - T^i{}_{hjk}). \tag{1.38}$$

[10] $\forall\phi \in E^*{}_n$ and $\forall\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_n \quad T(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$

La dimostrazione della tensorialità di 1.38 è identica a quella della tensorialità di $T_{(ij)}$.

Se T è simmetrico rispetto agli ultimi due indici allora dalla (1.38) segue immediatamente che $T^i{}_{[jhk]} = 0$. Se invece T è antisimmetrico rispetto agli ultimi due indici: $T^i{}_{jhk} = -T^i{}_{jkh} \Leftrightarrow T^i{}_{j(hk)} = 0$, allora:

$$T^i{}_{[jhk]} = \frac{1}{3}(T^i{}_{jhk} + T^i{}_{hkj} + T^i{}_{kjh}). \tag{1.39}$$

Un altro esempio di simmetria è quella che si ottiene scambiamdo gli indici a coppie. Per esempio se $T \in \mathbf{E}^0{}_4$ è un tensore di componenti, in una data base, T_{ijhk}, allora

$$\forall\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in E_n \quad T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = T(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

è equivalente a $T_{ijhk} = T_{hkij}$.

1.6 Operazioni sui tensori

Definizione 1.6.1 *Assegnati due tensori $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ e $S \in \mathbf{E}^h{}_k$, si chiama* **prodotto tensoriale** *di T e S l'applicazione*

$$T \otimes S : \underbrace{E_n^* \times \cdots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \cdots \times E_n}_{s-volte} \times \underbrace{E_n^* \times \cdots \times E_n^*}_{h-volte} \times \underbrace{E_n \times \cdots \times E_n}_{k-volte} \to \Re$$

definita da

$$\forall \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k \quad \forall \phi_1, \ldots, \phi_r, \psi_1, \ldots, \psi_h \in E_n^*$$

$$T \otimes S(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \psi_1, \ldots, \psi_h, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k) = T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) S(\psi_1, \ldots, \psi_h, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k) \tag{1.40}$$

Ovviamente la definizione precedente implica che $T \otimes S$ è lineare rispetto a tutte le variabili ed inoltre se, rispetto ad una data base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in E_n$, T ha componenti $T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots j_s}$ e S ha componenti $S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots q_k}$, allora

$$(T \otimes S)^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}{}^{p_1 \ldots p_h}{}_{q_1 \ldots q_k} = T \otimes S(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s}, e^{p_1}, \ldots, e^{p_h}, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_k}) =$$

$$T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s}) S(e^{p_1}, \ldots, e^{p_h}, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_k}) = T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots j_s} S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots q_k}.$$

Si ha quindi

Proposizione 1.6.1 *Se $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ e $S \in \mathbf{E}^h{}_k$ allora $T \otimes S \in \mathbf{E}^r{}_s{}^h{}_k$ e, in un'assegnata base, le componenti di $T \otimes S$ sono i prodotti delle componenti di T per quelle di S.*

Osserviamo che il, prodotto tensoriale di due tensori non è commutativo, infatti, mantenendo la notazione della Definizione 1.6.1, $S \otimes T \in \mathbf{E}^h{}_k{}^r{}_s$ che in generale è diverso da $\mathbf{E}^r{}_s{}^h{}_k$.

Definizione 1.6.2 *Assegnato un tensore $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ con $r, s \neq 0$ avente come componenti gli n^{r+s} numeri reali $T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ rispetto ad una data base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, si chiama* **operazione di saturazione degli indici**, *l'operazione che consiste nel saturare un indice di controvarianza con uno di covarianza. Per esempio, tanto per fissare le idee e per semplicità di scrittura, i_1 e j_1:*

$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \to S^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s} = T^{i i_2 \ldots i_r}{}_{i j_2 \ldots j_s}. \tag{1.41}$$

Se $T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ sono le componenti di T in una nuova base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ di E_n, legata alla prima dalle (1.1), (1.2), allora

$$S'^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s} = T'^{i i_2 \ldots i_r}{}_{i j_2 \ldots j_s} = B^i{}_{k_1} B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_1}{}_i A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{k_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} =$$

$$\delta^{h_1}{}_{k_1} B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{k_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} = B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{h_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} =$$

$$B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} S^{k_2 \ldots k_r}{}_{h_2 \ldots h_s}$$

essendo $B^i{}_{k_1} A^{h_1}{}_i = \delta^{h_1}{}_{k_1}$. Resta così dimostrato che gli $n^{r-1+s-1}$ numeri reali $S^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s}$ si trasformano al variare della base come le componenti di un tensore. Quindi

Proposizione 1.6.2 *L'operazione di saturazione degli indici trasforma un tensore di $\mathbf{E}^r{}_s$ in un tensore di $\mathbf{E}^{r-1}{}_{s-1}$, quindi abbassa di due il rango.*[11]

Ovviamente questa operazione si può ripetere fino a quando restano sia indici di controvarianza che di covarianza.

Definizione 1.6.3 *Dati due tensori $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ e $S \in \mathbf{E}^h{}_k$, si chiama* **moltiplicazione contratta** *di T e S, l'operazione che consiste prima nel moltiplicare tensorialmente T e S e poi nel saturare un indice di controvarianza (covarianza) di T con un indice di covarianza (controvarianza) di S una o più volte.*

Il risultato di una moltiplicazione contratta é ovviamente un tensore, poichè ciascuna delle due operazioni dà come risultato un tensore. Mantenendo le notazioni della definizione precedente il tensore risultante appartiene a $\mathbf{E}^{r-p}{}_{s-q}{}^{h-q}{}_{k-p}$, essendo $p+q$ il numero delle saturazioni.

[11] Se $r = s = 1$ il risultato è un elemento di $E^0{}_0 = \Re$, cio'è un numero che non dipende dalla base: uno *scalare intrinseco*.

1.7 Criterio di tensorialità

Si è visto nei paragrafi precedenti che se si associano ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, n^{r+s} numeri reali $T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$, questi ultimi si possono considerare le componenti di un tensore di $\mathbf{E}^r{}_s$ se e solo se, al variare della base sono verificate le (1.36) (1.37). Tuttavia questa condizione non è sempre agevole da verificare e normalmente si utilizza un criterio che richiede calcoli più semplici.

Si procede nel seguente modo: si considera uno spazio tensoriale $\mathbf{E}^h{}_k$, se S è il generico tensore di $\mathbf{E}^h{}_k$, di componenti nella base assegnata $S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots,q_k}$, si esegue un'operazione di moltiplicazione contratta tra le componenti di S e le quantitá introdotte prima[12], cioè si considerano le $n^{r+h-1+s+k-1}$ quantità

$$H^{i_2,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s,}{}^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_2,\ldots,q_k} = T^{i,i_2,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{i,q_2,\ldots,q_k}; \text{[13]} \tag{1.42}$$

allora si dimostra che

Teorema 1.7.1 *$T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$ sono le componenti di un tensore se e solo se lo sono le quantità al primo membro della 1.42, per ogni $S \in \mathbf{E}^h{}_k$.*

La condizione è ovviamente necessaria perchè, per quanto visto nella sezione precedente, la moltiplicazione tensoriale contratta tra due tensori dà come risultato un tensore. Dimostriamo la sufficienza in un casi particolari, utilizzando diverse saturazioni[14]:

1. $r = 1$, $s = 2$, scegliendo $h = 1$ e $k = 0$ e saturando il primo indice di covarianza.

2. $r = 1$, $s = 2$, scegliendo $h = 2$ e $k = 1$ e saturando gli indici ordinatamente.

1. In ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, vengono assegnate n^3 quantità $T^i{}_{jk}$ tali che comunque si scelga un vettore $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, le n^2 quantità $H^i{}_k = T^i{}_{jk} v^j$ sono le componenti di un tensore. Se si considera una nuova base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ e si denotano con l'apice tutte le quantità definite nella nuova base, tenendo conto della tensorialità sia di $H^i{}_k$ che di v^j e delle (1.36), (1.37)

$$T'^r{}_{hs} v'^h = H'^r{}_s = B^r{}_i A^k{}_s H^i{}_k = B^r{}_i A^k{}_s T^i{}_{jk} v^j = B^r{}_i A^k{}_s T^i{}_{jk} A^j{}_h v'^h$$

da cui

$$(T'^r{}_{hs} - B^r{}_i A^k{}_s A^j{}_h T^i{}_{jk}) v'^h = 0.$$

Poichè il vettore $\mathbf{v}$ e quindi le sue componenti sono arbitrarie[15], si ottiene

$$T'^r{}_{ts} = B^r{}_i A^j{}_t A^k{}_s T^i{}_{jk} \tag{1.43}$$

2. In ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, vengono assegnate n^3 quantità $T^i{}_{jk}$ tali che comunque si scelga un tensore di componenti $S^{ij}{}_h$ allora $H = T^i{}_{jk} S^{jk}{}_i$ sia un tensore di $\mathbf{E}^0{}_0$, cioè uno scalare intrinseco (non dipendente dalla base). Tenendo conto di queste ipotesi e delle (1.36), (1.37), si ha

$$T'^r{}_{ts} S'^{ts}{}_r = H' = H = T^i{}_{jk} S^{jk}{}_i = T^i{}_{jk} A^j{}_t A^k{}_s B^r{}_i S'^{ts}{}_r$$

da cui

$$(T'^r{}_{ts} - T^i{}_{jk} A^j{}_t A^k{}_s B^r{}_i) S'^{jk}{}_i = 0.$$

Poichè S e quindi le sue componenti sono arbitrarie, si ottiene nuovamente la (1.43).

1.8 Tensore metrico

Definizione 1.8.1 *Assegnato uno spazio vettoriale E_n, un tensore doppio covariante g, si chiama* **tensore metrico** *o* **metrica,** *se*

1. *è simmetrico:* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;

2. *è non degenere:* $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in E_n \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

[12]ovviamente $\mathbf{E}^h{}_k$ si sceglie in maniera tale che questo sia possibile: se per esempio $r = 0$ allora deve essere almeno $h = 1$.

[13]la scelta degli indici saturati è stata fatta per semplicità di scrittura, ovviamente si poteva fare una qualunque altra scelta. Si potevano saturare anche più coppie di indici.

[14]la tecnica dimostrativa usata in questi casi è identica a quella che si adotta in tutti gli altri casi e nel caso più generale, l'unica differenza è la lunghezza delle espressioni che intervengono.

[15]basta prendere $v'^h = \delta^h{}_t$

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n e denotate con $g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ le componenti di g in tale base, allora la condizione 2 della definizione precedente è equivalente a:

$$(\forall v^j \quad g_{ij} u^i v^j = 0 \to u^i = 0) \Leftrightarrow (g_{ij} u^i = 0 \to u^i = 0) \Leftrightarrow \det \|g_{ij}\| \neq 0. \tag{1.44}$$

Quindi, tenendo conto anche di quanto specificato per i tensori simmetrici nella sezione 3, si può concludere che le componenti di un tensore metrico, formano una matrice simmetrica e non degenere. E viceversa gli elementi di ogni matrice simmetrica e non degenere possono essere considerati le componenti di un tensore metrico in una base assegnata.

Posto:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{1.45}$$

è immediato verificare che, stante la definizione 20, la (1.45) verifica gli assiomi che definiscono il prodotto scalare e quindi, in particolare, è possibile definire il quadrato del generico vettore $\mathbf{v} \in E_n$: $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, il **modulo** di $\mathbf{v}$: $|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|}$, il coseno dell'angolo ϕ formato da due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$ di modulo non nullo: $\cos(\phi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ e la condizione di ortogonalità tra due vettori: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Definizione 1.8.2 *Uno spazio vettoriale con un tensore metrico si chiame* **euclideo**.

Comunque la definizione 20 non esclude che un vettore non nullo possa avere modulo nullo e perciò essere ortogonale a se stesso, quindi non è applicabile in un contesto geometrico dove le distanze hanno la forma pitagorica. Perché questo sia possibile, la 2 della definizione 20 deve essere sostituita dalla

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{1.46}$$

Ovviamente la (1.46) è più restrittiva della 2 della definizione 20, infatti stante la (1.46) se $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{v} \in E_n$, in particolare $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. La (1.46) è equivalente ad affermare che in ogni base, le componenti g_{ij} di g, devono verificare la condizione $g_{ij} u^i u^j \geq 0 \quad \forall u^i \in \Re$ e $g_{ij} u^i u^j = 0 \Rightarrow u^i = 0$, quindi la forma quadratica $g_{ij} u^i u^j$ deve essere definita positiva, ed in particolare $\det \|g_{ij}\| > 0$.

Definizione 1.8.3 *Uno spazio vettoriale con una metrica verificante la (1.46) si chiama* **propriamente euclideo** *e la metrica* **euclidea**. *In caso contrario lo spazio vettoriale si chiama* **pseudo euclideo** *e la metrica* **pseudo euclidea**.

Tornando al caso generale, si puó dimostrare il seguente

Teorema 1.8.1 *É sempre possibile determinare una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, tale che*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \pm\delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \|g_{ij}\| = diag(\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{h-volte}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k-volte}) \tag{1.47}$$

con $h + k = n$.

Prima di dimostrare il teorama conviene dimostrare alcuni lemmi.

Lemma 1.8.1 *È sempre possibile determinare un vettore $\mathbf{e} \in E_n$ tale che $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \neq 0$.*

Dimostrazione. Infatti, se ciò non fosse vero, il quadrato di ogni vettore di E_n dovrebbe essere nullo, ma, in questo caso, per la

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \left[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right]$$

che si dimostra facilmente applicando la proprietà distributiva al secondo menbro, il prodotto scalare di due vettori qualunque di E_n dovrebbe essere nullo, il che contraddice la (2) della definizione 20. □

Lemma 1.8.2 *Se $\mathbf{e} \in E_n$ ha modulo non nullo, allora l'insieme $H = \{\mathbf{u} \in E_n \mid \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di E_n di dimensione $n - 1$.*

Dimostrazione. Se $\alpha, \beta \in \Re$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ allora $\mathbf{e} \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} + \beta\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = 0$, quindi $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in H$, questo dimostra che H è un sottospazio vettoriale di E_n. Denotata con p la dimensione di H, poichè $\mathbf{e} \notin H$, chiaramente $p < n$, e supponiamo per assurdo che sia $p < n - 1$. Sia $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ una base di H ed aggiungiamo ad essi altri $n - p$ vettori $\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ in modo che insieme costituiscano una base di E_n. Sia $\mathbf{v} = v^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \cdots + v^n\mathbf{e}_n$, poichè $\mathbf{v} \notin H$ (altrimenti i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots \mathbf{e}_n$ sarebbero linearmente dipendenti) da $\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = 0$ segue che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $v^{p+1} = \cdots = v^n = 0$. D'altra parte l'equazione $\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = v^{p+1}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{p+1} + \cdots + v^n\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_n = 0$ nelle $n - p > 1$ incognite $v^{p+1} \ldots v^n$ ed a coifficienti non nulli, ammette certamente soluzioni diverse da quella nulla. Si è così arrivati ad una contraddizione determinata dall'aver supposto $p < n - 1$, quindi deve essere $p = n - 1$. □

Dimostrazione Teorema 1.8.1. Utilizzando il lemma 1.8.1 scegliamo un vettore $\mathbf{e'}_1 \in E_n$ tale che $\mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e'}_1 \neq 0$. Denotiamo con H_{n-1} l'insieme di tutti i vettori ortogonali ad $\mathbf{e'}_1$, che per il lemma 1.8.2 è un sottospazio di E_n di dimensione $n-1$. Introdotta una base $\mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$ in H_{n-1}, allora $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$ è una base di E_n, infatti da $\lambda_1 \mathbf{e'}_1 + \lambda_2 \mathbf{e''}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e''}_n = 0$ moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{e'}_1$, si trova $\lambda_1 \mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e'}_1 = 0$ da cui $\lambda_1 = 0$, quindi $\lambda_2 \mathbf{e''}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e''}_n = 0$, da cui $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Cosí, tenendo conto che $\mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e''}_i = 0$, le conponenti di g in questa base sono:

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} g_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix}$$

quindi la matrice

$$\begin{Vmatrix} g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix} \tag{1.48}$$

ha determinante eguale a $\frac{det\,\|g_{ij}\|}{g_{11}} \neq 0$ ed essendo simmetrica, definisce un prodotto scalare su H_{n-1}. A questo punto il discorso fatto su E_n si può ripetere su H_{n-1}: per il lemma 1.8.1, si può sceglie un vettore $\mathbf{e'}_2 \in H_{n-1}$, di modulo non nullo, si introduce il sottospazio H_{n-2} dei vettori di H_{n-1} ad esso ortogonali, si fa vedere che la restrizione a H_{n-2} del prodotto scalare su H_{n-1} definisce un prodotto scalare su H_{n-2}, quindi ancora per il lemma 1.8.1 si può scegliere su H_{n-2} un vettore $\mathbf{e'}_3$ di modulo non nullo e ortogonale ai precedenti. Iterando questo ragionamento si arrivano a costruire n vettori $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ a due a due ortogonali.[16] Allora si dimostra che i vettori oltre ad essere a due a due ortogonali sono anche linearmente indipendenti, infatti se $\lambda_i \mathbf{e'}_i = 0$ allora $0 = \lambda^i \mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_j = \pm \lambda^i \delta_{ij}$ quindi $\lambda^j = 0$. È stata così costruita una base ortogonale. I vettori $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e'}_i}{|\mathbf{e'}_i|}$ sono quelli cercati, infatti se $i \neq j$ $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_j}{|\mathbf{e'}_i||\mathbf{e'}_j|} = 0$, invece $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_i}{|\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_i|} = \pm 1$. □

Definizione 1.8.4 *Una base verificante la (1.47)si chiama* **base ortonormale**.

Teorema 1.8.2 *I numeri h e k nella (1.47) non dipendono dalla particolare base ortonormale scelta.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sia una base in cui vale la (1.47) e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ u'altra base in cui

$$g'(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e'}_j) = \pm \delta^i{}_j \quad \Leftrightarrow \quad \|g'_{ij}\| = diag(\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{p-volte}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{q-volte})$$

e supponiamo per assurdo che $h \neq p$, per esempio $h < p$. Consideriamo una terza base $\mathbf{e''}_1, \mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$, legata alle prime due dalle

$$\mathbf{e''}_i = A^i{}_j \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e''}_i = C^i{}_j \mathbf{e'}_i.$$

Sia $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i = v''^i \mathbf{e''}_i \in E_n$, allora, per la (1.5), si ha:

$$v^i = A^i{}_j v''^j, \quad v'^i = C^i{}_j v''^j. \tag{1.49}$$

Se imponiamo che

$$v^1 = \cdots = v^h = 0 \quad \text{e} \quad v'^{p+1} = \ldots, v'^n = 0 \tag{1.50}$$

allora per la (1.49) si ottiene il sistema $A^1{}_j v''^j = 0, \ldots, A^h{}_j v''^j = 0$, $C^{p+1}{}_j v''^j = 0, \ldots, C^n{}_j v''^j = 0$, che è un sistema omogeneo di $h+n-p < n$ equazione nelle n incognite v''^i, che per il teorema di Rouchè-Capelli ammette soluzioni diverse da quella nulla. Così ogni soluzione non nulla delle precedenti equazioni determina le componenti nella base $\mathbf{e''}_1, \mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$ di un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ che verifica le equazioni (1.50). Ma tale vettore non può esistere perchè se calcoliamo $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ nella prima base otteniamo $v^{h+1^2} + \cdots + v^{n^2} > 0$, mentre nella seconda base $-v'^{1^2} - \cdots - v'^{p^2} < 0$, che è ovviamente assurdo perchè il valore di $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ non può dipendere dalla base. □

Definizione 1.8.5 *Si chiama* **segnatura** *di un tensore metrico, il numero $k - h$.*

Chiaramente per una metrica euclidea $h = 0$ e $k = n$ quindi la segnatura è n.

[16]la necessità di puntualizzare che la restrizione, ad ogni sottospazio H_p, del prodotto scalare su E_n definisce effettivamente un prodotto scalare, deriva dal fatto che rispetto al prodotto scalare su E_n esistono sottospazi in cui tutti i vettori hanno modulo nullo.

Definizione 1.8.6 *Un tensore metrico si chiama* **lorentziano** *o* **metrica di Lorentz** *se la segnatura è* $n-2$: $\|g_{ij}\| = diag(-1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(n-1)-volte})$.

In una metrica di Lorentz i vettori possono aver modulo positivo, negativo o nullo. Infatti se prendiamo una base ortonormale $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, allora $g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = g_{11} = -1$, per $i \neq 1$ $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = g_{ii} = 1$ e $g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + 2g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = -1 + 1 + 0 = 0$.

Definizione 1.8.7 *Se g è una metrica di Lorentz, un vettore $\mathbf{v} \in E_n$ si chiama* **vettore di tipo tempo** *se* $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$, **vettore di tipo spazio** *se* $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, **vettore di tipo luce** *o* **vettore di tipo nullo** *se* $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.

1.9 Operazioni di innalzamento e abbassamento degli indici

Teorema 1.9.1 *Sia E_n uno spazio vettoriale e g una metrica su E_n. Allora g determina un isomorfismo tra E_n e $E^*{}_n$.*

Dimostrazione. $\forall \mathbf{v} \in E_n$, consideriamo l'applicazione $\sigma(\mathbf{v}) : E_n \to \Re$ definita dalla seguente legge di corrispondenza:

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad (\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.51}$$

Dalla linearità di g rispetto alla seconda variabile segue la linearità di $\sigma(\mathbf{v})$, quindi $\sigma(\mathbf{v}) \in E^*{}_n$, di conseguenza resta definita l'applicazione $\sigma : E_n \to E^*{}_n$. Dalla linearità di g rispetto alla prima variabile segue la linearità di σ. Inoltre σ è iniettiva, infatti se $\mathbf{v} \in E_n$ è tale che $\sigma(\mathbf{v}) = 0$, allora da questa, dalla (1.51) e dalla 2 della definizione 20

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad (\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in E_n \quad g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Da quanto fino ad ora dimostrato e dal lemma 1.2.1, segue la tesi. □

Sia, ora, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ una base di E_n, e $e^1, e^2, \ldots, e^n$ la base duale, se $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \in E_n$, allora $(\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g_{ij} v^i u^j = g_{ij} v^i e^j(\mathbf{u})$, quindi

$$\sigma(\mathbf{v}) = g_{ij} v^i e^j \Rightarrow (\sigma(\mathbf{v}))_j = g_{ij} v^i. \tag{1.52}$$

Definizione 1.9.1 *Se $\mathbf{v} \in E_n$ ha componenti (controvarianti) v^i in una data base, allora*

$$v_j = g_{ij} v^i \tag{1.53}$$

si chiamano **componeti covarianti** *di* $\mathbf{v}$.

La definizione precedente è motivata dal fatto che le (1.53) sono le componenti della forma lineare associata a $\mathbf{v}$ dall'isomorfismo σ. Si dice anche che nella (1.53) le componenti del tensore metrico fanno **abbassare l'indice** delle componenti controvarianti di $\mathbf{v}$.

L'operazione di abbassamento degli indici si può estendere ai tensori. Supponiamo tanto per fissare le idee che $T \in E_n \otimes E_n$,[17] allora fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, poichè per la (1.52), $\sigma(\mathbf{e}_h) = g_{ij} \delta^i{}_h e^j = g_{hj} e^j$, possiamo considerare la corrispondenza:

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \to T^{ij} \sigma(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = T^{ij} g_{ih} e^h \otimes \mathbf{e}_j$$

che associa a T il tensore di $E^*{}_n \otimes E_n$, di componenti

$$T_h{}^j = g_{ih} T^{ij}. \tag{1.54}$$

La stessa motivazione che ha portato a considerare i primi membri delle (1.53) come componenti di $\mathbf{v}$, porta a chiamare le quantità definite dalla (1.54), componenti una volta covarianti e una volta controvarianti del tensore T. Si dice, inoltre, che nella (1.54), il tensore metrico ha abbassato il primo indice di controvarianza di T.

La stessa operazione si può fare sul secondo indice di controvarianza anzicchè sul primo: $T^i{}_j = g_{jh} T^{ih}$ o su entrambi: $T_{ij} = g_{ih} g_{jk} T^{hk}$. Nella stessa maniera si possono fare abbassare gli indici di controvarianza di un tensore qualunque.

Poiche, come si è visto nella sezione precedente, la matrice $\|g_{ij}\|$ è non degenere, possiamo considerare la matrice inversa $\|\gamma^{ij}\|$, allora per la (1.53)

$$\gamma^{ij} v_j = \gamma^{ij} g_{jh} v^h = \delta^i{}_h v^h = v^i. \tag{1.55}$$

La (1.55) è l'invera della (1.53) ed esprime le componenti controvarianti in funzione di quelle covarianti. Analogamente si può invertire la (1.54):

$$\gamma^{kh} T_h{}^j = \gamma^{kh} g_{ih} T^{ij} = \delta^k{}_i T^{ij} = T^{kj}, \tag{1.56}$$

[17] anche qui la descrizione, fatta in un caso particolare, non è limitativa, perchè ogni altro caso si tratta alla stessa maniera

così come si ottiene anche: $T^{ij} = \gamma^{ih}\gamma^{jk}T_{hk}$.

Quindi, mentre le g_{ij}, fanno abbassare gli indici di controvarianza, gli elementi della matrice inversa γ^{ij}, fanno **alzare gli indici** di covarianza.

Si vede immediatamente, applicando il criterio di tensorialità alla (1.55) o alla (1.56), che le γ^{ij} sono le componenti di un tensore doppio controvariante, ma sono qualcosa di più, come dimostra il seguente calcolo delle compomnenti controvarianti di g_{ij}:

$$g^{hk} = \gamma^{hi}\gamma^{kj}g_{ij} = \gamma^{hi}\delta^k{}_i = \gamma^{hk}. \tag{1.57}$$

Possiamo così concludere, che gli elementi della matrice inversa di g_{ij}, sono le componenti controvarianti di g. Quindi le formule (1.55) e (1.56) si possono riscrivere così:

$$v^i = g^{ij}v_j, \quad T^{ij} = g^{ih}T_h{}^j.$$

Le componenti miste del tensore metrico sono:

$$g^i{}_j = g^{ih}g_{hj} = \delta^i{}_j$$

Chiaramente le operazioni di abbassamento e di innalzamento degli indici possono essere estese a tensori arbitrari. Per esempio:

$$T_i^{\ jhk} = g_{ip}g^{jq}g^{hr}g^{ks}T^p{}_{qrs}.$$

1.10 Trasformazioni ortogonali

Ogni tensore $T \in E_n \otimes E^*{}_n$ determina una applicazione $\tau : E_n \to E_n$ nel seguente modo: $\forall \mathbf{v} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) = T \cdot \mathbf{v}$, dove $T \cdot \mathbf{v}$ è il prodotto tensoriale contratto tra T e $\mathbf{v}$, che è un tensore una volta controvariante, quindi un elemento di E_n. Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ è una base di E_n, $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ e $T = T^i{}_j\mathbf{e}_i \otimes e^j$, allora $\tau(\mathbf{v}) = T^i{}_jv^j\mathbf{e}_i$. L'applicazione così definita è ovviamente lineare:

$$\forall\alpha, \beta \in \Re \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \quad \tau(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) = T^i{}_j(\alpha v^j + \beta u^j)\mathbf{e}_i = \alpha T^i{}_jv^j\mathbf{e}_i + \beta T^i{}_ju^j\mathbf{e}_i = \alpha\tau(\mathbf{v}) + \beta\tau(\mathbf{u}).$$

Definizione 1.10.1 *Se E_n è uno spazio euclideo, l'applicazione introdotta sopra, si chiama* **trasformazione ortogonale** *o* **isometria** *se non altera il prodotto scalare:*

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) \cdot \tau(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \tag{1.58}$$

L'insieme delle trasformazioni ortogonali di E_n relativamente ad una metrica g, verrà denotato con il simbolo $O(g, n)$.

In una data base di E_n, la 1.58 si scrive: $g_{ij}T^i{}_hv^hT^j{}_ku^k = g_{hk}v^hu^k$ quindi $(g_{ij}T^i{}_hT^j{}_k - g_{hk})v^hu^k = 0$, poichè quest'ultima deve valere per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, ne segue:

$$g_{ij}T^i{}_hT^j{}_k = g_{hk}. \tag{1.59}$$

Teorema 1.10.1 *L'insieme $O(g, n)$ con l'operazione di composizione di applicazioni é un gruppo.*

Dimostrazione. Se $\tau, \tau' \in O(g, n)$, $(\tau \circ \tau')(\mathbf{v}) \cdot (\tau \circ \tau')(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v}) \cdot \tau(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ quindi $\tau \circ \tau'$ é una trasformazione ortogonale su E_n. L'elemento unità è la trasformazione identica, inoltre la (1.58) implica che ogni trasformazione ortogonale τ trasforma una base ortonormale in n vettori ortonormali e quindi in una base ortonormale, questo implica che è un isomorfismo e in quanto tale, invertibile; la sua inversa τ^{-1} moltiplicata per τ dà l'elemento unità. □

In una data base, l'operazione di prodotto é espressa da $\tau \circ \tau'(\mathbf{v}) = \tau(\tau'(v^i\mathbf{e}_i)) = \tau(T'^i{}_jv^j\mathbf{e}_i) = T^i{}_hT'^h{}_jv^j\mathbf{e}_i$, quindi è definita dal tensore

$$S^i{}_j = T^i{}_hT'^h{}_j, \tag{1.60}$$

questo significa che la moltiplicazione tra τ e τ' corrisponde ad una moltiplicazione contratta tra i tensori T e T' che le definiscono o equivalentemente al prodotto riga per colonna delle matrici che li rappresentano. Poichè $O(g, n)$ è chiuso rispetto alla motiplicazione allora il tensore definito dalla (1.60) deve verificare la (1.59) quando T e T' la verificano. Questo può anche essere dimostrato direttamente: $g_{ij}S^i{}_hS^j{}_k = g_{ij}T^i{}_pT'^p{}_hT^j{}_qT'^q{}_k = g_{pq}T'^p{}_hT'^q{}_k = g_{hk}$.

Ci sono due casi particolarmente importanti di trasformazioni ortogonali: quando g è una metrica propriamente euclidea e quando è una metrica di Lorentz. Nel primo caso, la (1.59) calcolata in una base ortogonale, diventa: $\delta_{hk} = \delta_{ij}T^i{}_hT^j{}_k = \sum_{i=1}^n T^i{}_hT^i{}_k$, questo significa che l'operazione di prodotto colonna per colonna della matrice $\|T^i{}_j\|$ per se stessa, dà come risultato la matrice identità, quindi l'inversa di $\|T^i{}_j\|$ è la sua trasposta, in questo caso $O(g, n)$ è il gruppo delle matrici ortogonali (rotazioni). Nel secondo caso , fissata una base ortonorma le e denotate con $\|\eta_{ij}\|$ le corrispondenti componenti del tensore metrico, per quanto si è visto nei paragrafi precedenti, si ha:

$$\|\eta_{ij}\| = diag(-1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(n-1)-volte}). \tag{1.61}$$

Le matrici che verificano la (1.59) sono quelle per cui: $\eta_{ij}T^i{}_hT^j{}_k = \eta_{hk}$. Il gruppo $O(g, n)$, in questo caso si chiama **gruppo di Lorentz omogeneo**, si indica con $L(n)$. Gli elementi di $L(n)$ si chiamano **trasformazioni di Lorentz**.