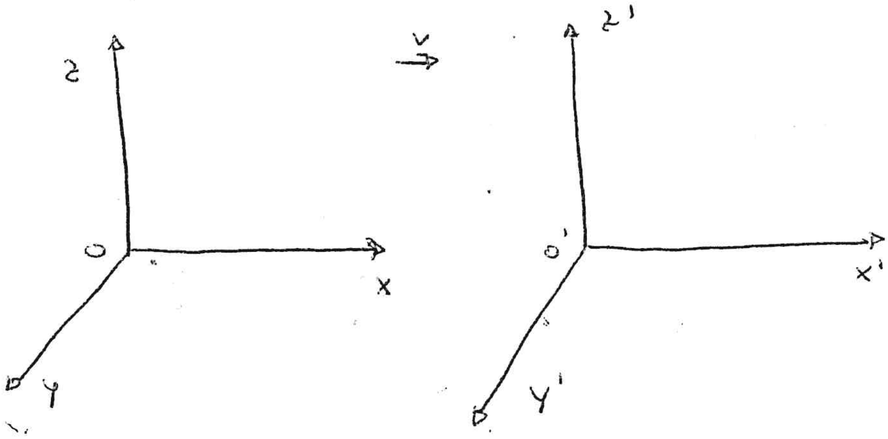
RICHIAMI DI RELATIVITA'

CONSIDERIAMO DUE SISTEMI DI RIF. INERZIALI IN MOTO L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO CON VELOCITA $\underline{V}$ = COSTANTE RISPETTIVAMENTE DI ASSI E DA ORIGINE $\{O, x_i\}$ E DA $\{O', x'_i\}$ LE TRASF. CHE PERMETTONO IL RECIPROCO "PASSAGGIO" TRA LE COORDINATE SPAZIALI E TEMPORALI DEI DUE RIFERIMENTI



SONO DATE DALLE TRASF. DI LORENTZ.

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - \beta c t) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma (ct - \beta x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma (x' + \beta c t') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma (ct' + \beta x') \end{cases}$$

ESSENDO $\beta = \frac{v}{c}$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

(QUANDO $\beta << 1$ SI PASSA DALLE TRASF. DI LORENTZ A QUELLE DI GALILEO) $\Rightarrow$ RETRO

LA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA SI BASA SU DUE POSTULATI

1) LE LEGGI FISICHE SONO FORMALMENTE "COVARIANTI" IN TUTTI I RIFERIMENTI INERZIALI.
NON ESISTE UN RIFERIMENTO INERZIALE PRIVILEGIATO

2) LA VELOCITA' DELLA LUCE NELLO SPAZIO VUOTO HA LO STESSO VALORE COSTANTE IN TUTTI I SISTEMI INERZIALI.
(DA CUI IL CONCETTO DI MISURA TEMPORALE [illegible])

Se $\beta = \frac{v}{c} << 1$ ALLORA $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

E VICEVERSA

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

EQUAZ. MAXWELL. $(\vec{A}, \Phi) \leftarrow$ 4-POTENZIALE

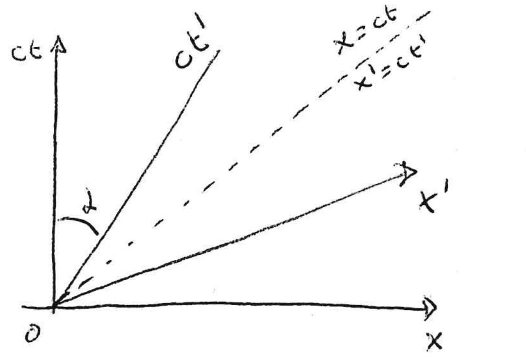
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi \qquad \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$\vec{\rho} =$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

NOTA:
SE QUINDI CONSIDERIAMO DUE OSSERVATORI O ED O' CIASCUNO DEI QUALI SI MUOVA RISPETTO ALL'ALTRO CON VELOCITA' COSTANTE $\underline{V}$. ALLORA:

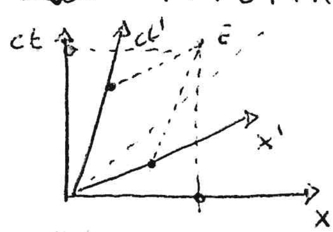
1) LA LINEA DI UNIVERSO DI O' RISPETTO AD O SARA' UNA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE PERCHE' PER $t=0$ AVREMO $O \equiv O'$



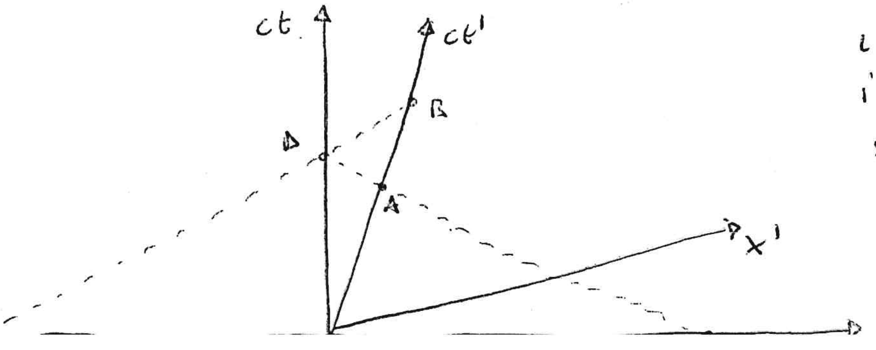
2) QUELLA CHE PER O E' LA LINEA DI UNIVERSO DI O' RAPPRESENTA INVECE PER O' IL SUO ASSE DEI TEMPI ct' PERCHE' PER O' GLI EVENTI CHE APPARTENGONO A QUESTO ASSE AVVENGONO TUTTI NELLO STESSO POSTO $x'=0$

3) SE ADESSO TRACCIAMO L'EQUAZIONE DI MOTO DI UN SEGNALE LUMINOSO $x=\pm ct$ ($\operatorname{tg}\alpha=1$) AVREMO LA BISETTRICE DEI VARI QUADRANTI. ESSENDO c COSTANTE RISPETTO A $\forall$ RIF. INERZIALE ALLORA $x=ct$ ED $x'=ct'$ DOVRA' ESSERE LA BISETTRICE PER ENTRAMBI I SISTEMI DI COORDINATE QUINDI L'ASSE x' DOVRA' ESSERE SIMMETRICO A ct' RISPETTO ALLA LINEA DI UNIVERSO $x'=ct'$.

4) PER DETERMINARE LE COORDINATE DI UN EVENTO E NEI DUE RIFERIMENTI SOLIDALI CON O ED O' BASTERA' TRACCIARE LE PARALLELE AGLI ASSI $\{x', ct'\}$ ED $\{x, ct\}$.

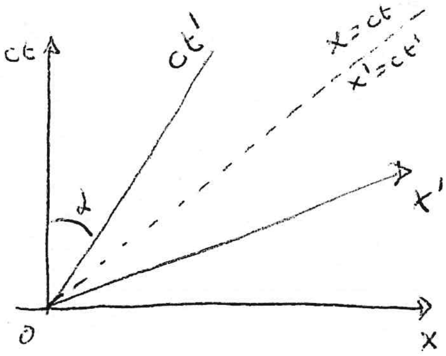


5) CONSIDERIAMO DUE SEGNALI LUMINOSI SIMULTANEI CHE VANNO DA E_1 ed E_2 VERSO O MA CHE NON SONO SIMULTANEI RISPETTO AD O'. VEDIAMO CHE L'OSSERVATORE O VEDE ACCADERE I DUE EVENTI E_1 ED E_2 NELLO STESSO ISTANTE t_A.
L'OSSERVATORE O' VEDE ACCADERE I DUE EVENTI NEI DUE ISTANTI DIVERSI $t_A \neq t_B$



SE QUINDI CONSIDERIAMO DUE OSSERVATORI O ED O' CIASCUNO DEI QUALI SI MUOVA RISPETTO ALL'ALTRO CON VELOCITA' COSTANTE $\underline{V}$. ALLORA:

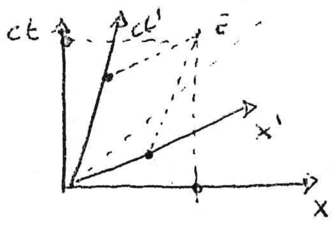
1) LA LINEA DI UNIVERSO DI O' RISPETTO AD O SARA' UNA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE PERCHE PER $t=0$ AVREMO $O \equiv O'$



2) QUELLA CHE PER O E' LA LINEA DI UNIVERSO DI O' RAPPRESENTA INVECE PER O' IL SUO ASSE DEI TEMPI ct' PERCHE PER O' GLI EVENTI CHE APPARTENGONO A QUESTO ASSE AVVENGONO TUTTI NELLO STESSO POSTO $x'=0$

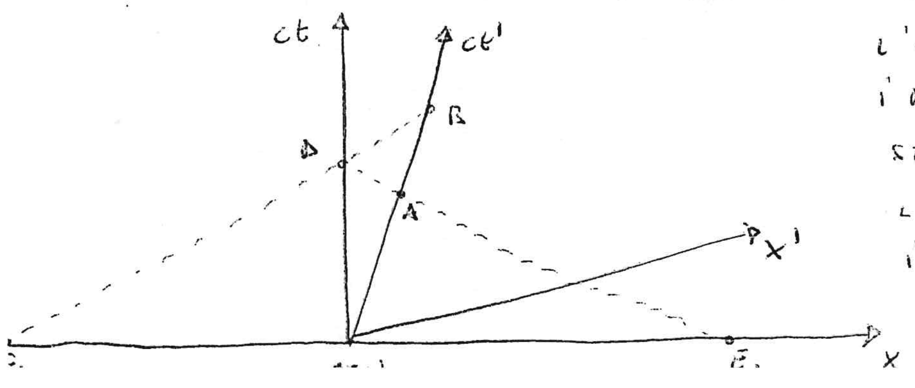
3) SE ADESSO TRACCIAMO L'EQUAZIONE DI MOTO DI UNO SEGNALE LUMINOSO $x = \pm ct$ ($\operatorname{tg}\alpha = 1$) AVREMO LA BISETTRICE DEI VARI QUADRANTI. ESSENDO c COSTANTE RISPETTO A V RIF. INERZIALE ALLORA $x=ct$ ED $x'=ct'$ DOVRA' ESSERE LA BISETTRICE PER ENTRAMBI I SISTEMI DI COORDINATE QUINDI L'ASSE x' DOVRA' ESSERE SIMMETRICO A ct' RISPETTO ALLA LINEA DI UNIVERSO $x'=ct'$.

4) PER DETERMINARE LE COORDINATE DI UN EVENTO E NEI DUE RIFERIMENTI SOLIDALI CON O ED O' BASTERA TRACCIARE LE PARALLELE AGLI ASSI $\{x', ct'\}$ ED $\{x, ct\}$.



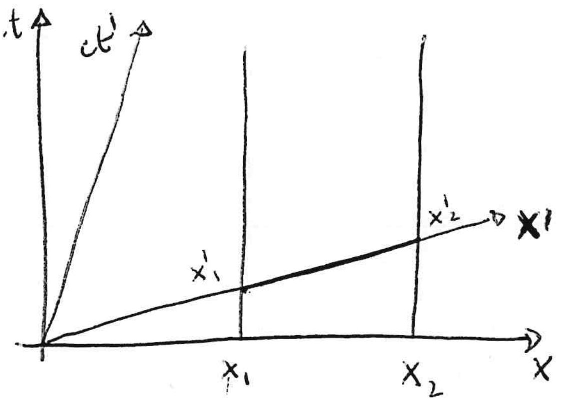
5) CONSIDERIAMO DUE SEGNALI LUMINOSI SIMULTANEI CHE VANNO DA E_1 ed E_2 VERSO O MA CHE NON SONO SIMULTANEI RISPETTO AD O'. VEDIAMO CHE L'OSSERVATORE O VEDE ACCADERE I DUE EVENTI E_1 ED E_2 NELLO STESSO ISTANTE t_A.

L'OSSERVATORE O' VEDE ACCADERE I DUE EVENTI NEI DUE ISTANTI DIVERSI $t_A \neq t_B$



LA MISURA DI UNA LUNGHEZZA DA PARTE DI UN OSSERVATORE VIENE FATTA "OPERATIVAMENTE" MISURANDO GLI ESTREMI ASSOCIATI ALLA LUNGHEZZA "SIMULTANEAMENTE" (CIOE' ALLO STESSO ISTANTE). LA LUNGHEZZA E' QUINDI LEGATA AL CONCETTO DI SIMULTANEITA' $\Rightarrow$ QUINDI DIPENDERA' DALL'OSSERVATORE.

MISURA DI UN "REGOLO":



UN REGOLO IN QUIETE SARA' INDIVIDUATO DA DUE LINEE DI UNIVERSO (CHE CORRISPONDONO AI 2 ESTREMI DEL REGOLO) PARALLELE ALL'ASSE ct. LO STESSO REGOLO OSSERVATO DA UN ALTRO OSSERVATORE O' AVRA' IN GENERALE UNA MISURA DIVERSA. AD ESEMPIO LO STESSO REGOLO POTRA' ESSERE MISURATO DA O' ALLO STESSO ISTANTE $ct'=0$, VEDIAMO SUBITO CHE LE DUE MISURE DIFFERISCONO "GRAFICAMENTE". SE USIAMO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma\beta c(t'_2 - t'_1)$$

MA LA MISURA DEGLI ESTREMI DEL REGOLO SOLIDALE CON O DEVE ESSERE FATTA DA O' "SIMULTANEAMENTE" QUINDI $t'_2 = t'_1$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

SE PONIAMO $\ell_0 = x_2 - x_1$ $\quad \ell = x'_2 - x'_1$ AVREMO

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (\ell < \ell_0)$$

CHE ESPRIME LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

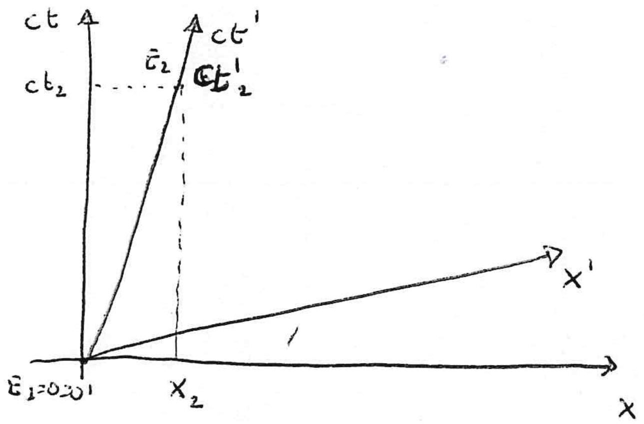
) CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA IN MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO ALL'OSSERVATORE O. SIA O' UN OSSERVATORE NEL RIFERIMENTO SOLIDALE CON LA PARTICELLA.

SIANO $E_1 = 0$ $\Rightarrow$ EVENTO ASSOCIATO ALLA CREAZIONE DELLA PARTICELLA
E_2 $\Rightarrow$ EVENTO " AL DECADIMENTO " "

Sia $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ intervallo (misurato dall'osservatore O' solidale con la particella) che descrive la vita della particella, per O' questo fenomeno si svolge sempre nello stesso luogo.

Sia $\tau = t_2 - t_1$ l'intervallo (misurato dall'osservatore O che vede muovere la particella di moto rettilineo uniforme).

Dalla trasf. di Lorentz



$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

da cui:

$$c(t_2 - t_1) = \gamma c(t'_2 - t'_2) + \gamma\beta(x'_2 - x'_1)$$

ma per O' $x'_2 = x'_2$ da cui:

$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\tau_0 \Rightarrow \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (\tau > \tau_0)$$

"Dilatazione temporale": prove sperimentali

Tra i raggi cosmici che arrivano sulla terra arriviamo i "muoni"

vita media dei muoni $\tau_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec. (per un osservatore solidale con i muoni).

i muoni dei raggi cosmici sono tali che $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}995$

Ad una altezza di 4500 m sul livello del mare si osservano 1000 muoni

quanti muoni si osservano sul livello del mare ??

Se calcoliamo il tempo

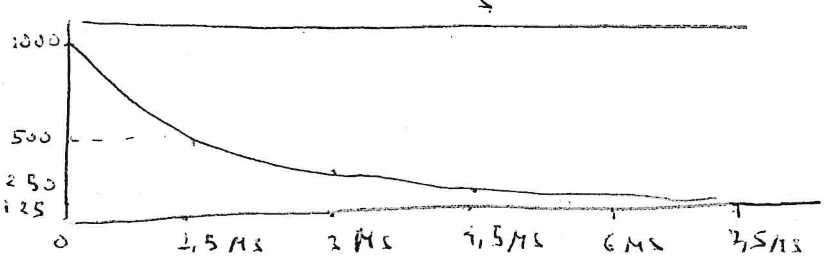
$$t = \frac{h}{v} = \frac{h}{c\beta} = \frac{4{,}5 \cdot 10^3\ m}{3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \cdot (0{,}995)} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ s$$

cioè $t = 10\,\tau_0$

quindi dopo questo tempo

ci aspetteremo di trovare

1 solo muone per m^2 $(1000/2^{10} \cong 1)$



2d

Si osservano invece 500 muoni per m^2. Osserviamo che la vita media dei muoni deve essere valutata non più rispetto all'osservatore solidale con la particella ma rispetto ad un osservatore solidale con la terra quindi

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{sec}}{\sqrt{1-(0{,}995)^2}} \approx 10\,\tau_0$$

τ = tempo valutato da un osservatore solidale con la terra

quindi nel percorrere la distanza h avremo una vita media

$\tau = 10\,\tau_0 = t$ cioè un solo decadimento, da cui

$$\frac{1000}{2} = 500 \text{ muoni} \times m^2.$$

$$I^2(E_1, E_2) = \Delta x^i \Delta x^j g_{ji}$$

$$g_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LA METRICA PUO' "FORMALMENTE" ESSERE RESA EUCLIDEA CONSIDERANDO LA 4ª COMPONENTE COME IMMAGINARIA PURA

PER CUI $E \equiv (x, y, z, ict)$

QUINDI:

$$I^2(E_1, E_2) = \Delta x^i \Delta x^j g_{ji} \quad \text{CON} \quad g_{ji} = \delta_{ij}$$

IN QUESTO MODO LE TRASF. DI LORENTZ SI SCRIVERANNO SECONDO LA NOTAZIONE

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x'_1 - i\beta x'_4) \\ x_2 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = \gamma(x'_4 + i\beta x'_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 + i\beta x_4) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = \gamma(x_4 - i\beta x_1) \end{cases}$$

VARI TIPI DI INTERVALLI

SIANO DATI 2 EVENTI $E_1 \equiv O$ ED $E_2 \equiv E$ CHE CONSIDERIAMO (PER SEMPLICITA' IL CASO DI UNA DIM. SPAZIALE)

$$I^2(O, E) = x^2 - c^2t^2$$

1) SE E È SU UNA DELLE DUE RETTE $x = \pm ct$

$$I^2(O, E) = 0$$

L'INTERVALLO SI DICE DI "TIPO LUCE".

2) SE "E" E' INTERNO AL CONO LUCE

$$I^2(0,E) < 0 \quad \text{DI "TIPO TEMPO"}$$

SE INFATTI CONSIDERIAMO UN RIFERIMENTO SOLIDALE CON E LA SUA VELOCITA $v < c$. IN PARTICOLARE NEL RIFERIMENTO IN CUI E' E' VISTO IN QUIETE AVREMO.

$$I^2(0,E) = -c^2 t'^2 < 0$$

CIOE' E' DI GENERE PURAMENTE TEMPORALE, DATA L'INVARIANZA DEL 4-INTERVALLO AVREMO CHE $I^2(0,E) < 0$ SEMPRE.

NOTA: A) $\nexists$ UN RIFERIMENTO IN CUI I 2 EVENTI SONO VISTI ACCADERE NELLO STESSO TEMPO.

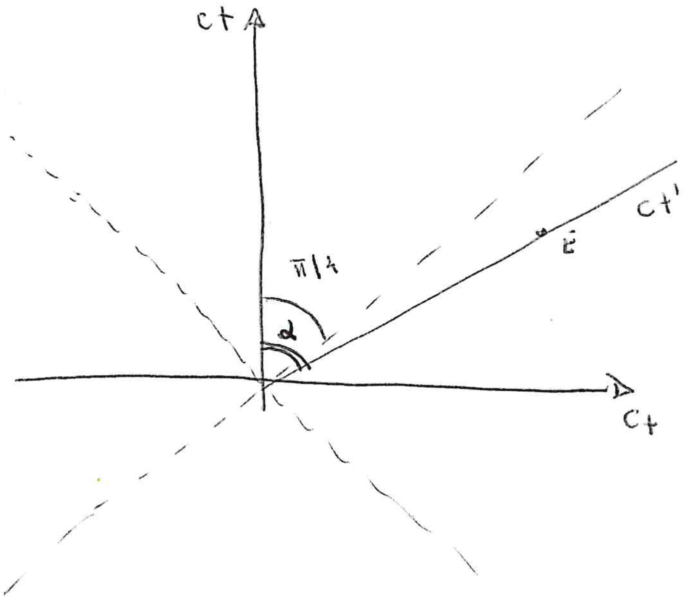
B) INOLTRE SE

$t_{E_2} - t_{E_1} > 0$ QUESTO SARA' VERO IN $\forall$ ALTRO RIFERIMENTO (L'ORDINE TEMPORALE SI CONSERVA). SE INFATI PER ASSURDO ESISTESSE UN RIF. IN CUI $t_{E_2} - t_{E_1} < 0$ ALLORA PER CONTINUITA' DOVREBBE ESISTERE UN RIF. IN CUI $t_{E_1} = t_{E_2}$ IL CHE E' ASSURDO.

C) DUE EVENTI SONO LEGATI DA UN RAPPORTO DI CAUSALITA' SOLO NEL CASO IN CUI IL LORO INTERVALLO SIA DI TIPO TEMPO. PER ESSERCI UN RAPPORTO DI CAUSA EFFETTO I DUE EVENTI DEVONO ~~INTE~~ INTERAGIRE FISICAMENTE, SE UNO E' ALL'INTERNO DEL CONO LUCE E L'ALTRO E' AL DI FUORI DI ESSO ESSI NON POTRANNO INTERAGIRE PERCHE $\nexists$ ALCUN SEGNALE CHE VIAGGI CON VELOCITA' $v > c$.

2) SE "E" È ALLA REGIONE ESTERNA AL CONO LUCE

$I^2(O, E) > 0$ INTERVALLO DI TIPO SPAZIO



OSSERVO CHE NON PUÒ ESISTERE UN RIF. SOLIDALE CON E PERCHÉ IN QUESTO CASO AVREMO

$x' = tg\alpha \, ct'$ CON $tg\alpha$: $\alpha > \frac{\pi}{4}$

DA CUI $\frac{V}{c} > 1$, CIOÈ AVREBBE UN VELOCITÀ $V > c$, (ASSURDO).

NOTA: A) $\exists$ UN RIFERIMENTO IN CUI L'INTERVALLO È DI TIPO SPAZIO

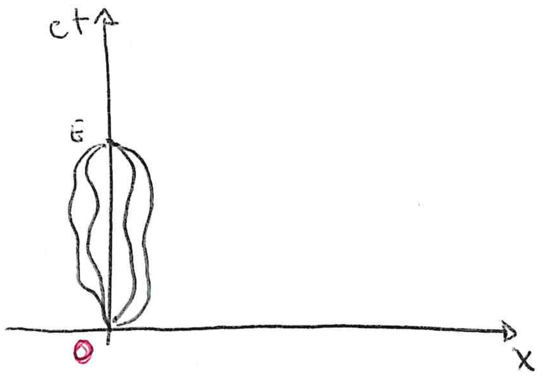
$$I(O, E) = (x')^2 > 0$$

B) $\nexists$ UN RIFERIMENTO IN CUI L'INTERVALLO È DI TIPO TEMPO.

C) SE $X_{E_2} - X_{E_1} > 0$ QUESTO SARÀ VERO IN $\forall$ ALTRO RIFERIMENTO. (ORDINE SPAZIALE SI CONSERVA)

"TRAETTORIA DI UN PUNTO MATERIALE LIBERO"

SIA DATO UN PUNTO MATERIALE LIBERO, E CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO IN CUI TALE PUNTO MATERIALE È IN QUIETE.



CONSIDERIAMO IL PUNTO DOPO UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO A PARTIRE DALL'ISTANTE $t=0$

ALLORA AVREMO L'EVENTO "E" SULL'ASSE DEI TEMPI

$$I^2(O, E) = -c^2t^2 < 0$$

CONFRONTIAMO LA LINEA D'UNIVERSO $\overline{OE}$ CON ALTRE LINEE D'UNIVERSO DI ESTREMI FISSI O ED E.

OSSERVIAMO CHE IN QUALSIASI ALTRA LINEA D'UNIVERSO OGNI INTERVALLO INFINITESIMO

$$(ds)^2 = (dx)^2 - c^2(dt)^2$$

LUNGO QUESTE LINEE DEVE ESSERE DI GENERE TEMPORALE

È POSSIBILE PROVARE CHE

$$\int_O^E ds > \int_O^E ds$$

ALLORA SE CONSIDERO $S = \alpha\int_{E_1}^{E_2} ds$ COME UN FUNZIONALE CALCOLATO

SU TUTTE LE TRAIETTORIE (DI TIPO TEMPO) ALLORA

$$\delta S = 0.$$

QUESTO FUNZIONALE GIOCA IL RUOLO ANALOGO AL "FUNZIONALE" DI AZIONE IN MECC. CLASSICA.

FORMULAZIONE LAGRANGIANA.

CERCHIAMO DI ESPRIMERE LE LEGGI DELLA MECCANICA IN FORMA COVARIANTE.

SCALARI D'UNIVERSO:

ABBIAMO VISTO CHE SE dx_μ È LA VARIAZIONE DEL QUADRIVETTORE POSIZIONE ASSOCIATO A UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO SULLA LINEA D'UNIVERSO

$$(ds)^2 = dx_\mu dx_\mu$$ È UNO SCALARE D'UNIVERSO.

SE LE TRAIETTORIE SONO DI TIPO TEMPO

$$(ds)^2 < 0$$

DEFINIAMO ALLORA UNO SCALARE D'UNIVERSO $d\tau$ COME:

$$d\tau = \sqrt{-\frac{1}{c^2}(ds)^2} = \frac{i}{c}\sqrt{-dx_\mu dx_\mu}$$

IL SIGNIFICATO DI $d\tau$ È CHIARO SE SI CALCOLA QUESTA **RELAZIONE** NEL RIFERIMENTO RISPETTO AL QUALE LA PARTICELLA È MOMENTANEAMENTE A RIPOSO.

$$dx'_\mu = (0,0,0,icdt')$$

QUINDI $d\tau$ È L'INTERVALLO DI TEMPO MISURATO DA UN OROLOGIO IN MOTO CON LA PARTICELLA

$$d\tau = \sqrt{-\frac{1}{c^2}\left[(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2-c^2(dt)^2\right]} =$$

$$= dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]} = dt\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

DA CUI $\quad dt = \dfrac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$

CHE ESPRIME LA FORMULA DI **DILATAZIONE** DEL TEMPO.

$d\tau$ = INTERV. DI TEMPO MISURATO DA UN OROLOGIO IN QUIETE,

dt = " " " DA UN OSSERVATORE IN MOTO RISPETTO ALLA PARTICELLA

NELLA FORMULAZIONE LAGRANGIANA CLASSICA, PER UNA PARTICELLA $\quad L = L(\underline{r}, \underline{v}, t) \quad$ CON $r = r(t)$, $v = v(t)$

DOVE IL TEMPO t **ERA** TRATTATO COME PARAMETRO DISTINTO DALLE COORDINATE SPAZIALI

NELLA FORMULAZIONE RELATIVISTICA IL PARAMETRO CHE PERMETTE DI DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI E' DATO DA τ.

ASSUMEREMO QUINDI $x_\mu = x_\mu(\tau)$

DA CUI CALCOLANDO

$$u_\alpha = \frac{d\,\cancel{x}_\mu}{d\tau}$$

OTTENIAMO LA 4-VELOCITA' ED IL 4-IMPULSO. $P_\alpha = m\,u_\alpha$.

ENERGIA.

PER COMPONENTI AVREMO:

$$u_\alpha = \left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\; i\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \left(\frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\; i\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

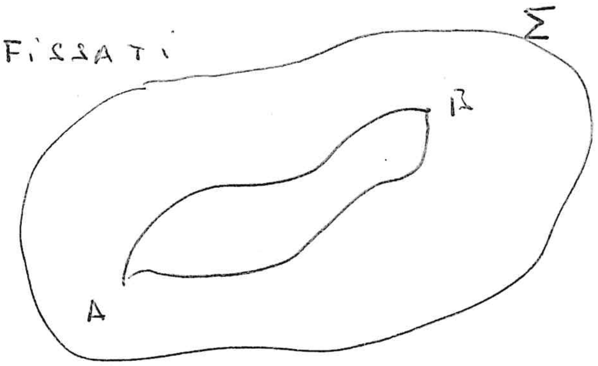
$$P_\alpha = \left(\frac{m v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\; i\frac{mc^2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \left(P_i\,,\; i\frac{\varepsilon}{c}\right)$$

DOVE
$$\begin{cases} P_i = \dfrac{m v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} & \text{"IMPULSO RELATIVISTICO"} \\[2ex] \varepsilon = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \text{"ENERGIA"} \end{cases}$$

ALLORA ASSUMEREMO CHE IL NOSTRO FUNZIONALE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI SIA

$$(S)_\gamma = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(x_\alpha, u_\alpha, \tau)\, d\tau$$

DA CUI CONSIDERANDO TRAIETTORIE DI TIPO TEMPO AD ESTREMI FISSATI



AVREMO COME NEL CASO CLASSICO

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \eta_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} \right\} d\tau = 0 \qquad \forall \eta_\alpha .$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma} \Rightarrow \quad x_\alpha = \bar{x}_\alpha(\tau) \qquad u_\alpha = \bar{u}_\alpha(\tau) \\ \gamma \Rightarrow \quad x_\alpha = \bar{x}_\alpha(\tau) + \lambda \eta_\alpha(\tau) \qquad u_\alpha = \bar{u}_\alpha(\tau) + \lambda \frac{d\eta_\alpha}{d\tau} \end{cases} \qquad \tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

$$\delta x_\alpha(\tau_0) = \delta x_\alpha(\tau_1) = 0 .$$

DA CUI

$$\boxed{(\delta S)_{\bar{\gamma}} = 0 \iff \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0}$$

NOTA: OSSERVIAMO CHE LO SCALARE

$$u_\alpha u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha \, dx_\alpha}{-\frac{1}{c^2} dx_\alpha \, dx_\alpha} = -c^2 < 0$$

CIOÈ È UN 4-VETTORE A MODULO COSTANTE E DI TIPO TEMPO

"PARTICELLA LIBERA"

IN QUESTO CASO LO SPAZIO-TEMPO E' CONSIDERATO OMOGENEO ED ISOTROPO. QUINDI

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(u_\alpha u_\alpha) = \mathcal{L}_0(-c^2) = \text{COSTANTE.}$$

QUESTO NON HA ALCUNA IMPORTANZA IN QUANTO QUELLO CHE INTERESSA E' LA DIPENDENZA FUNZIONALE DI $\mathcal{L}_0$ DA u_α, IN MODO DA POTER RICAVARE LE EQUAZIONI CORRETTE.

IN GENERALE LE POTREMO SCRIVERE

$$\mathcal{L}_0 = m\, f(u_\alpha u_\alpha) \qquad \text{IN MODO CHE:}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} = m\, f'(u_\alpha u_\alpha)\cdot 2u_\alpha$$

DOVE $\quad f'(u_\alpha u_\alpha) = f'(-c^2) = \text{COSTANTE.} = \frac{1}{2}$

DA CUI:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} = m\, u_\alpha \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} = m\frac{du_\alpha}{d\tau} = 0$$

QUINDI IL 4-VETTORE ENERGIA-IMPULSO E' COSTANTE.

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = 0. \quad \Rightarrow$$

OSSERVAZIONE: (VEDI GOLDSTEIN NOTA: PAG. 207)

A) $\quad f(u_\alpha u_\alpha) = \frac{1}{2} u_\alpha u_\alpha \qquad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} m\, u_\alpha u_\alpha$

B) $\quad f(u_\alpha u_\alpha) = -K\sqrt{-u_\alpha u_\alpha} \qquad \mathcal{L}_0 = -mc\sqrt{-u_\alpha u_\alpha}$ $\Rightarrow$ RETRO

DOVE PER FAR SI CHE $f'(u_\alpha u_\alpha) = \frac{1}{2}$ SI VEDE CHE $K = c$

IN ENTRAMBI I CASI AVREMO CHE

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_\alpha} = m\, u_\alpha$$ $\Rightarrow$ QUINDI LA DEFINIZIONE DI $\mathcal{L}_0$ NON E' UNICA

CHE UNA POSSIBILE SCELTA SIA DATA DALLA (10)B

$$f = \bar{\alpha}\sqrt{-u_\alpha u_\alpha} \qquad (\bar{\alpha} = \text{COSTANTE OPPORTUNA})$$

SI VEDE ANCHE CON IL RAGIONAMENTO FATTO DA LANDAU (TEORIA DEI CAMPI)

PER LA PARTICELLA LIBERA ABBIAMO VISTO CHE

$$A = \alpha\int ds = \alpha\int\sqrt{-dx_\alpha dx_\alpha} = \alpha\int\sqrt{-\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau}}\,d\tau$$

$$= \alpha\int\sqrt{-u_\alpha u_\alpha}\,d\tau = \text{ CHE POTRA' SCRIVERSI ANCHE COME}$$

$$= \alpha\int\sqrt{-\left[\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\alpha}{dt}\right]}\,dt = \alpha\int\sqrt{-\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2-c^2\right]}\,dt$$

$$= \alpha c\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \int L_0\,dt$$

DOVE $L_0 = \alpha c\sqrt{1-v^2/c^2}$ E' L'ANALOGA DELLA LAGRANGIANA CLASSICA

(L_0 NON E' LORENTZ-INVARIANTE E dt NON E' LORENTZ-INVARIANTE MA IL PRODOTTO $L_0 dt$ E' LORENTZ-INVARIANTE)

SE ADESSO ASSUMIAMO CHE $\frac{v^2}{c^2} = x \Rightarrow L_0 = \alpha c\sqrt{1-x}$ E FACCIAMO ORA SVILUPPO IN SERIE ATTORNO AD $x=0$ DOVREMO OTTENERE LA LAGRANGIANA CLASSICA NON RELATIVISTICA PER LA PARTICELLA LIBERA. DA CUI

$$L_0\big|_{cl} \simeq \alpha c\sqrt{1-x}\,\Big|_{x=0} + \frac{\alpha c}{2\sqrt{1-x}}(-1)\Big|_{x=0} x =$$

$$= \alpha c - \frac{\alpha c}{2}x = -\frac{\alpha}{2c}v^2 + \text{KOST.}$$

(COSICCHE' LA $L_0|_{cl}$ DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA)

$$\text{DA CUI} \quad L_0\big|_{cl} = -\frac{\alpha}{2c}v^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \alpha = -mc$$

$$\text{DA CUI} \quad A = \int -mc\sqrt{-u_\alpha u_\alpha}\,d\tau \Rightarrow \mathcal{L}_0 = -mc\sqrt{-u_\alpha u_\alpha} \Rightarrow f = -c\sqrt{-u_\alpha u_\alpha}$$

"PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO ESTERNO"

IN QUESTO CASO IL FUNZIONALE DI HAMILTON.

$$S = S_0 + S_{INT.}$$

$S_0 \Rightarrow$ PARTICELLA LIBERA

$S_{INT} \Rightarrow$ ASSOCIATO ALLA INTERAZIONE.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT}.$$

IN MECC. CLASSICA: $\mathcal{L}_{INT} = U(q_1, \dots q_n)$ POTENZIALE.

IN MECCANICA CLASSICA I CAMBIAMENTI IMPUTABILI ALLA INTERAZIONE ERANO "ISTANTANEI".

IN RELATIVITA: QUALSIASI CAMBIAMENTO DI STATO CHE **PUO'** AVVENIRE SUL SISTEMA FISICO NON PUO' PROPAGARSI ISTANTANEAMENTE MA RICHIEDE UN TEMPO FINITO.
INOLTRE LA VELOCITA DI PROPAGAZIONE DELLA INTERAZIONE DEVE ESSERE INFERIORE A "c".

A) L'INTERAZIONE E' DI TIPO RITARDATO

B) CON VELOCITA' DI PROPAGAZIONE FINITA.

PER DESCRIVERE L'INTERAZIONE E' CONVENIENTE INTRODURRE IL CONCETTO DI CAMPO.
L'INTERAZIONE TRA DUE SISTEMI S_1 E S_2 POTRA' ESSERE DESCRITTA NEL MODO SEGUENTE:

A) I DUE SISTEMI GENERANO RECIPROCAMENTE UN CAMPO DI FORZE CHE EVOLVE NELLO SPAZIO-TEMPO.
COSI' S_1 GENERA UN CAMPO, FUNZIONE DELLO SPAZIO-TEMPO, CHE MODIFICA IL SISTEMA S_2 E VICEVERSA.
ALLORA QUESTO E' EQUIVALENTE AD ASSERIRE CHE I DUE SISTEMI NON SI TROVANO PIU' IN UNO SPAZIO-TEMPO OMOGENEO E ISOTROPO, MA IN UNO SPAZIO-TEMPO CHE E'

PERMEATO DAI RECIPROCI CAMPI DI FORZA.

~~QUINDI~~ LA PRESENZA DI INTERAZIONI EQUIVALE ALLA PERDITA DELLA OMOGENEITA' E DI ISOTROPIA DELLO SPAZIO TEMPO.

QUINDI:

DATO UN "CAMPO" AGENTE SUL SISTEMA FISICO, ESSO SARA' DESCRITTO DA UNA FUNZIONE DELLO SPAZIO-TEMPO CHE DOVRA' ESSERE ~~[illegible]~~ "TENSORE" DI ORDINE OPPORTUNO.

NEL CASO DEL "CAMPO ELETTROMAGNETICO"

INTRODURREMO IL 4-POTENZIALE $A_\alpha \equiv (A_i, i\Phi)$

A_i = POTENZIALE VETTORE Φ = POTENZIALE SCALARE.

QUINDI LA S_{int} DEVE CONTENERE $A_\alpha = A_\alpha(x_\beta)$ E DEVE ESSERE UNA QUANTITA LORENTZ-INVARIATE.

CONSIDERIAMO UN SISTEMA COSTITUITO DA:

A) UN CAMPO ELETTROMAGNETICO DESCRITTO PUNTO PER PUNTO DALLA FUNZIONE $A_\alpha(x_\beta)$.

B) UNA PARTICELLA CARICA PUNTIFORME CHE SI MUOVE SENTENDO L'EFFETTO DEL CAMPO ESTERNO.

(IN PRIMA APPROSSIMAZIONE TRASCURIAMO LA MODIFICA INDOTTA DALLA PARTICELLA SUL CAMPO ESTERNO).

LO SCALARE PIU' SEMPLICE CHE POSSIAMO COSTRUIRE E' DATO DAL PRODOTTO SCALARE DI A_α CON UN ALTRO 4-VETTORE ~~[illegible]~~ ASSOCIATO ALLA TRAIETTORIA DELLA PARTICELLA

$$S_{int} \propto \int_{E_1}^{E_1} A_\alpha(x_\beta)\, dx_\alpha$$

CHE E' UN INTEGRALE DI LINEA SULLE POSSIBILI TRAIETTORIE

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE

$$S_{INT} = \frac{e}{c} \int_{E_1}^{E_2} A_\alpha \, dx_\alpha$$

DOVE LA COSTANTE "c" È INTRODOTTA PER MOTIVI DIMENSIONALI MENTRE LA CARICA e VIENE INTRODOTTA PER INDICARE CHE

$$e \to 0 \qquad S_{INT} \to 0$$

RICORDANDO LA NOSTRA PARAMETRIZZAZIONE $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$

$$dx_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} d\tau = u_\alpha \, d\tau$$

DA CUI:

$$S_{INT} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{e}{c} A_\alpha u_\alpha \, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}_{INT} \, d\tau.$$

~~SUPPONIAMO~~ SE QUINDI CONSIDERIAMO IL PROBLEMA GENERALE AVREMO

$$S = S_0 + S_{INT} + S_{EM.}$$

DOVE S_{EM} = "AZIONE ASSOCIATA AL CAMPO ELETTROMAGNETICO".

SE PERÒ IL CAMPO ESTERNO È FISSATO NEL CALCOLO DELLA VARIAZIONE

$$\delta S = \delta S_0 + \delta S_{INT} \qquad \text{PERCHÉ } \delta S_{EM} = 0.$$

STUDIAMO QUINDI <u>LA VARIAZIONE DI S A CAMPO FISSATO</u>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT} = \frac{1}{2} m \, u_\alpha u_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha u_\alpha$$

DA CUI UTILIZZANDO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} u_\beta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} = m u_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha = P_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} = \frac{dP_\alpha}{d\tau} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{dx_\beta}{d\tau} = \frac{dP_\alpha}{d\tau} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} u_\beta$$

DA CUI:

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} + \frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}\right] u_\beta = 0$$

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c}\underbrace{(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}_{F_{\alpha\beta}} u_\beta = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u_\beta .$$

DEFINENDO

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \end{cases}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

DA CUI CALCOLANDO PER COMPONENTI

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u_\beta \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} = \dfrac{e}{c} F_{\alpha\beta} \dfrac{dx_\beta}{dt\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} \\ \dfrac{dp_4}{dt\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} = \dfrac{e}{c} F_{4k} \dfrac{dx_k}{dt\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = e\left[\vec{E} + \dfrac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}\right] \\ \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = e\,(\vec{E}\cdot\vec{v}) \end{cases}$$

LA 2ª EQUAZIONE DESCRIVE IL LAVORO COMPIUTO SUL SISTEMA CHE E' ASSOCIATO SOLO AL CAMPO $\vec{E}$, IN QUANTO $\vec{H}$ CAMBIA LA DIREZIONE DELLA VELOCITA' LASCIANDO INALTERATO IL MODULO.

NOTA:

NELL'ANALISI DELLE EQUAZIONI DI MOTO OTTENUTE DALLA EQUAZ. DI LAGRANGE. NON COMPAIONO $\vec{A}$ e Φ. QUINDI SE VOGLIAMO SONDARE SPERIMENTALMENTE I CAMBIAMENTI DI MOTO DELLA CARICA DOVREMO CAMBIARE $\vec{E}$ e/o $\vec{H}$.

$\exists$ ∞ SCELTE DI $\vec{A}$ e Φ TALI DA LASCIARE INALTERATI $\vec{E}$ e/o $\vec{H}$. QUESTA PROPRIETA' SI CHIAMA INVARIANZA DI GAUGE.

INTRODUCIAMO QUINDI UNA TRASF.

$$\varphi: A_i \to A'_i \quad \text{TALE CHE} \quad F_{\alpha\beta} = F'_{\alpha\beta}$$

DEFINITA DALLA LEGGE

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha f$$

INFATTI:

$$F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A'_\beta - \partial_\beta A'_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + (\partial_\alpha \partial_\beta f - \partial_\beta \partial_\alpha f)$$

SE QUINDI VALE IL LEMMA DI SCHWARTZ:

$$\partial_\alpha \partial_\beta f - \partial_\beta \partial_\alpha f = 0$$

DA CUI $F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$

ANALOGAMENTE PER COMPONENTI AVREMO:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \\ \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

DA CUI:

$$\begin{cases} \vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla f) - \nabla\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \\ = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi\right) - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} f} + \cancel{\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial f}{\partial t}} = \vec{E} \\ \vec{H}' = \vec{\nabla}\wedge(\vec{A} + \nabla f) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla} f)}_{0} = \vec{H} \end{cases}$$

NOTA: 1) OSSERVO CHE QUESTO E' VERO SE E SOLO SE IL DOMINIO E' SEMPLICEMENTE CONNESSO.

(SE IL DOMINIO NON E' SEMPLICEMENTE CONNESSO IN GENERALE NON VALE LA GAUGE INVARIANZA) (PAG. 16B - 16C)

2) LA INVARIANZA DI GAUGE NON E' ASSOCIATA A DELLE SIMMETRIE DELLO SPAZIO-TEMPO, MA DESCRIVE UNA PARTICOLARE PROPRIETA' DI SIMMETRIA DEL SISTEMA. (SIMMETRIA "STRUTTURALE" DELLE EQUAZIONI DI CAMPO)

NOTIAMO INFINE CHE:

ESSENDO:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

1ª COPPIA DI EQUAZ. DI MAXWELL

CHE POSSONO ESSERE SCRITTE IN FORMA COVARIANTE COME UNA EQUAZIONE TENSORIALE DI 3° ORDINE.

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = 0$$

CON $\alpha \neq \gamma \quad \beta \neq \gamma \quad \alpha \neq \beta$.