"SIMMETRIE E LEGGI DI CONSERVAZIONE"

INTEGRALI PRIMI

SIA DATO UN SISTEMA FISICO AD n GRADI LIBERTA' E SIA

$$(1) \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

LA FUNZIONE DI LAGRANGE AD ESSO ASSOCIATA CON LE EQUAZIONI

LAGRANGE

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \dots n.$$

1) CONSIDERIAMO L'ENERGIA GENERALIZZATA.

$$(3) \qquad E(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

DA CUI CALCOLANDO LA SUA DERIVATA TOTALE

$$(2) \qquad \frac{dE}{dt} = \cancel{\ddot{q}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}} + \dot{q}^\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \dot{q}^\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

SE QUINDI CALCOLIAMO TALE DERIVATA SULLA TRAIETTORIA DEL MOTO $\bar{\gamma}$ ALLORA DOVRANNO VALERE LE EQ. DI LAGRANGE (1). QUINDI AVREMO

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\bar{\gamma}} = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\bar{\gamma}}$$

OSSERVIAMO ~~~~ CHE: "SE LA LAGRANGIANA NON DIPENDE "ESPLICITAMENTE" DAL TEMPO t

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dE}{dt}\right|_{\bar{\gamma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{COSTANTE DEL MOTO.}$$

SI CONSERVA L'ENERGIA TOTALE.

2) SUPPONIAMO ADESSO CHE LA LAGRANGIANA NON DIPENDA DA UNA (O PIU DI UNA) DELLE SUE COORDINATE LAGRANGIANE q^α IN QUESTO CASO AVREMO $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0$

Se quindi consideriamo la traiettoria del moto valendo le equazioni di Lagrange (1) avremo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \text{costante}$$

Allora, supponendo che q^α sia una coordinata ciclica (cioè non appaia in $\mathcal{L}$) il suo "momento cinetico" corrispondente

q^α ciclica $\Rightarrow$ $P_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}$ è una costante del moto.

Cioè si conserva il "momento cinetico" P_α.

NOTA: In questo senso se considerassimo il tempo come una coordinata aggiuntiva, allora la sua ciclicità nella lagrangiana condurrà alla conservazione della energia totale del sistema, quindi la $E=H$ potrà essere considerata come il "momento cinetico" corrispondente alla variabile tempo "t".

Vediamo adesso come la conservazione di certe quantità fisiche possa essere connessa a delle proprietà di simmetria del sistema stesso.

"Trasformazioni infinitesime di coordinate"

Consideriamo delle trasformazioni di coordinate

$$\{q^\alpha\} \leftrightarrow \{Q^\alpha\}$$

definite dalle relazioni

(5) $\quad Q^\alpha = Q^\alpha(q^\beta)$

(6) $\quad q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta)$

In particolare diremo che la (5) è una trasf. di coordinate infinitesima se

(5 bis) $$Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \eta^\alpha \qquad \text{con} \quad \eta^\alpha = \eta^\alpha(q_1, \dots q_n)$$

e λ è un parametro infinitesimo reale. Se volessimo invertire la (5 bis) la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial q^\beta} = F_{\alpha\beta}(\lambda)$$

dovrà essere non singolare. Osserviamo che per $\lambda = 0$

$$\left| \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \right| = \left| \delta_{\alpha\beta} \right| \neq 0$$

essendo il determinante una funzione continua di λ allora $\exists\ I(\lambda = 0)$, ~~[illegible]~~ piccolo a piacere, in cui:

$$\det\left(F_{\alpha\beta}(\lambda)\right) \neq 0$$

Quindi per di prendere λ sufficientemente piccolo $\exists$ l'inversa della (5 bis) ed è unica

$$q^\alpha = q^\alpha(Q^\beta) = Q^\alpha + F^\alpha(Q_1 \dots Q_n, \lambda)$$

tale che $F^\alpha(Q^\beta, \lambda)\big|_{\lambda=0} = 0$ inoltre la F è differenziabile rispetto a λ nell'intorno di $\lambda = 0$ da cui

(6 bis) $$q^\alpha = Q^\alpha + \lambda \xi^\alpha + o(\lambda^2)$$

inserendo la (5 bis) nella (6 bis)

$$\cancel{q^\alpha} = \cancel{q^\alpha} + \lambda \eta^\alpha + \lambda \xi^\alpha + o(\lambda^2)$$

e dividendo per λ.

$$\eta^\alpha + \xi^\alpha + o(\lambda) = 0$$

da cui facendo il limite per $\lambda \to 0$ $\quad \xi^\alpha = -\eta^\alpha$

cioè banalmente avremo $\rightarrow$ $$q^\alpha = Q^\alpha - \lambda \eta^\alpha.$$

__DEFINIZIONE:__ DATA LA LAGRANGIANA $\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ SE ACCADE CHE

per $\forall \lambda$ INFINITESIMO ~~arbitrario~~

$$\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \mathcal{L}(q^\alpha + \lambda \eta^\alpha ; \dot{q}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha, t) \quad (\text{PER } \lambda \to 0)$$

ALLORA DIREMO CHE LA LAGRANGIANA E' INVARIANTE PER $\forall$ TRASF. INFINITESIMA DI COORDINATE.

POSSIAMO GENERALIZZARE CONSIDERANDO DELLE TRASF. INFINITESIME DELLE COORDINATE E DEL TEMPO.

$$(*) \quad \begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \eta^\alpha \\ T = t + \lambda \chi \end{cases} \qquad \text{CON } \lambda \text{ INFINITESIMO.}$$

SE QUINDI ACCADE CHE

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ \mathcal{L}(q^\alpha + \lambda \eta^\alpha, \dot{q}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha, t + \lambda \chi) - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) \right\} = 0$$

ALLORA DIREMO CHE LA LAGRANGIANA $\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ E' INVARIANTE PER LE TRASFORMAZIONI $(*)$ (DI COORDINATE E DEL TEMPO).

TEOREMA DI NOETHER.

"**SE** $\exists$ UNA PARTICOLARE '**TRASF.** INFINITESIMA" DI COORDINATE O DI TALE CHE LA LAGRANGIANA E' INVARIANTE RISPETTO AD ESSA ALLORA $\exists$ UN INTEGRALE **PRIMO DEL MOTO**.

__DIM:__ CONSIDERIAMO LA QUANTITA'.

$$\mathcal{L}(q^\alpha + \lambda \eta^\alpha ; \dot{q}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha ; t + \lambda \chi) - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) =$$

E SVILUPPIAMO IN SERIE DI TAYLOR ATTORNO A $\lambda = 0$

$$= \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\bigg|_{\lambda=0} \eta^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\bigg|_{\lambda=0} \dot{\eta}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\bigg|_{\lambda=0} \chi \right\} \lambda + o(\lambda^2)$$

DIVIDENDO PER λ E FACENDO IL LIMITE PER $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{L}(q^\alpha + \lambda \eta^\alpha ; \dot{q}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha ; \cancel{t} + \lambda t) - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)}{\lambda} =$$

$$= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0} \dot{\eta}^\alpha + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\lambda=0} \cdot \chi = 0 \qquad (1)$$

1) SUPPONENDO DI CONSIDERARE LA SOLA TRASF. TEMPORALE

$$\begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha \\ T = t + \lambda \chi \end{cases}$$

ALLORA $\eta^\alpha = \dot{\eta}^\alpha = 0$ DA CUI $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\lambda=0} \chi = 0 \quad \forall \chi \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\lambda=0} = 0$

IN QUESTO CASO LA LAGRANGIANA E' "INVARIANTE PER TRASLAZIONI TEMPORALI" QUINDI $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\lambda=0} = 0 \iff \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right|_{\bar{\gamma}} = 0$

SE QUINDI CALCOLIAMO LA DERIVATA de/dt SULLE TRAIETTORIE DEL MOTO $\Rightarrow$ L'ENERGIA SI CONSERVA.

2) SUPPONIAMO DI CONSIDERARE SOLO TRASF. INFINITESIME DI COORDINATE

$$\begin{cases} Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \eta^\alpha \\ T = t. \end{cases}$$

IN QUESTO CASO AVREMO:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0} \dot{\eta}^\alpha = 0$$

VALUTANDO QUESTA QUANTITA' SULLA TRAIETTORIA DEL MOTO AVREMO.
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}$$ DA CUI:

$$\left(\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|\right)\eta^\alpha + \left(\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0}\right)\dot{\eta}^\alpha = \frac{d}{dt}\left\{\eta^\alpha \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|\right\} = 0$$

DA CUI:
$$I = \eta^\alpha \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0} = \text{COSTANTE}$$

È UN INTEGRALE PRIMO.

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI NOETHER

CONSIDERIAMO UN SISTEMA COSTITUITO DA N PUNTI MATERIALI SOGGETTI AD UN POTENZIALE $U(q_1, \dots q_n)$

$$\mathcal{L} = T + U \qquad \text{CON } T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

DA CUI:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

RICORDIAMO CHE $\underline{v}_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha$ DOVE $P_i = P_i(q^\alpha, t)$

QUINDI CALCOLANDO
$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \left.\frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0}$$

ALLORA LA QUANTITÀ $I = \eta^\alpha \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0}$ SI SCRIVERÀ COME:

$$\boxed{I = \eta^\alpha \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \left.\frac{\partial P_i}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha.}$$

INVARIANZA PER TRASLAZIONI

SUPPONIAMO CHE UNA TRASLAZIONE SPAZIALE LASCI INALTERATO LO STATO MECCANICO DEL SISTEMA. OVVERO LA LAGRANGIANA RIMANE

(QUESTA SITUAZIONE PUO' ANCHE ESSERE DESCRITTA IN TERMINI DI "OMOGENEITA'" DELLO SPAZIO, RISPETTO AL QUALE STIAMO STUDIANDO IL MOTO DEL SISTEMA FISICO, INOLTRE IL SISTEMA DEVE CONSIDERARSI "ISOLATO", CIOE' SOGGETTO A FORZE ESTERNE NULLE, IN QUANTO QUESTO E' NECESSARIO PER ASSUMERE LA "OMOGENEITA'" SPAZIALE).

QUINDI SI POTRA' PASSARE, CONSIDERANDO UNA SEMPLICE TRASLAZIONE (AD ESEMPIO) NELLA DIREZIONE $\underline{e}_1$ DALLE COORDINATE $x^i_k(q^\alpha)$ ALLE NUOVE COORDINATE $X^i_k(Q^\alpha)$ TRAMITE LA TRASLAZIONE

$$(1) \qquad X^i_k(Q^\alpha) = x^i_k(q^\alpha) + \lambda\, \delta_{k1}$$

($i = 1, 2, \ldots n$ ESSENDO i L'INDICE DELLA i^{ma} PARTICELLA)

QUESTA TRASFORMAZIONE CORRISPONDERA' AL PASSAGGIO IN TERMINI DI COORDINATE LAGRANGIANE DA $q^\alpha \Rightarrow Q^\alpha = q^\alpha + \lambda \eta^\alpha$

CIOE' AVREMO:

$$X^i_k(Q^\alpha) = x^i_k(q^\alpha + \lambda \eta^\alpha)$$

DA CUI FACENDO UNO SVILUPPO IN SERIE ATTORNO A $\lambda = 0$ AVREMO

$$(2) \qquad X^i_k(Q^\alpha) = x^i_k(q^\alpha) + \left(\left.\frac{\partial x^i_k}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha \right) \lambda + o(\lambda^2)$$

DA CUI CONFRONTANDO LE RELAZIONI (1) E (2) AVREMO

$$\left.\frac{\partial x^i_k}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = \delta_{k1}$$

QUINDI IL NOSTRO INVARIANTE "I" ASSUMERA' LA FORMA:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^k \left.\frac{\partial x^i_k}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^k \delta_{k1} = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^1 = \text{COSTANTE}$$

IN DEFINITIVA, LA COMPONENTE DELL'IMPULSO NELLA DIREZIONE RISPETTO ALLA QUALE ABBIAMO L'INVARIANZA TRASLAZIONALE, SI CONSERVA.

SE ABBIAMO UNA INVARIANZA TRASLAZIONALE LUNGO TUTTE LE DIREZIONI, ALLORA L'IMPULSO TOTALE E' UNA COSTANTE DEL MOTO

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{V}_i = \text{COSTANTE}.$$

"INVARIANZA PER ROTAZIONI"

SUPPONIAMO CHE UNA ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE ARBITRARIO LASCI INVARIATO IL SISTEMA. IN QUESTO CASO LA LAGRANGIANA E' INVARIANTE PER UNA ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL SUDDETTO ASSE (AD ESEMPIO L'ASSE $\underline{e}_3$).

IN QUESTO CASO DIREMO CHE LO SPAZIO ASSOCIATO AL SISTEMA E' ISOTROPO RISPETTO A ROTAZIONI ATTORNO ALL'ASSE IN QUESTIONE (NEL SENSO CHE NULLA CAMBIA PER ROTAZIONI INFINITESIME ATTORNO ALL'ASSE IN QUESTIONE).

SE QUINDI CONSIDERIAMO UNA ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

$$X^i_k(Q^\alpha) = x^i_k(q^\alpha) + \{\psi \wedge (P_i - O)\}_k$$

DOVE:

$$\psi \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 0 & 0 & \lambda \\ x^i_1 & x^i_2 & x^i_3 \end{vmatrix} = \lambda\{-x^i_2\,\underline{e}_1 + x^i_1\,\underline{e}_2\}$$

ESSENDO $\psi = (0, 0, \lambda)$ DESCRIVENTE UNA ROTAZIONE INFINITESIMA DI UN ANGOLO λ ATTORNO AD $\underline{e}_3$.

QUINDI

$$\begin{cases} X^i_1(Q^\alpha) = x^i_1(q^\alpha) - \lambda\, x^i_2 \\ X^i_2(Q^\alpha) = x^i_2(q^\alpha) + \lambda\, x^i_1 \\ X^i_3(Q^\alpha) = x^i_3(q^\alpha) \end{cases}$$

CONFRONTANDO CON LE ROTAZIONI (2) AVREMO $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial X^i_1}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = -x^i_2 \\ \left.\dfrac{\partial X^i_2}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = x^i_1 \\ \left.\dfrac{\partial X^i_3}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = 0 \end{cases}$$

DA CUI:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^k \left.\frac{\partial X^i_k}{\partial q^\alpha}\right|_{\lambda=0} \eta^\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ V^1_i(-x^i_2) + V^2_i\, x^i_1 \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(P_i - O) \wedge V_i \right]_3 = \text{COSTANTE}$$

CIOE' SI CONSERVA LA "TERZA COMPONENTE" DEL MOMENTO ANGOLARE.

Quindi se vi è una invarianza per rotazione ad un certo asse si conserva la componente del momento angolare lungo quell'asse.

In generale se il sistema è invariante per rotazioni attorno ad un qualsiasi asse allora si conserverà il momento angolare totale del sistema preso in esame.

PARENTESI DI POISSON.

CONSIDERIAMO UN SISTEMA CON n GRADI DI LIBERTÀ E SIA DENOTATO CON $\mathcal{E}^{2n}$ IL CORRISPONDENTE SPAZIO DELLE FASI AD ESSO ASSOCIATO.

UN GENERICO PUNTO DI QUESTO SPAZIO SARÀ ESPRESSO (LOCALMENTE) CON LA $2n$-UPLA

$$(p_\alpha, q^\alpha) \qquad \alpha = 1, \dots n.$$

SIA $f : \mathcal{E}^{2n} \to R$ GENERICA FUNZIONE CHE GODE DI TUTTE LE IPOTESI DI REGOLARITÀ FINO ALL'ORDINE CHE CI INTERESSA.

DEFINIAMO LA SEGUENTE **CLASSE** DI FUNZIONI

$$\mathcal{F} = \{ f : \mathcal{E}^{2n} \to R \}$$

DOVE POSSIAMO INTRODURRE LE OPERAZIONI

A) $f + g = h \in \mathcal{F}$.

B) $af \in \mathcal{F} \quad \forall a \in R$.

C)
POSSIAMO INOLTRE INTRODURRE L'OPERAZIONE PRODOTTO

$$\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

CHE ALLA COPPIA (f, g) ASSOCIA UNA NUOVA FUNZIONE di $\mathcal{F}$.

$$f \cdot g = h \in \mathcal{F}.$$

QUESTO PRODOTTO È ASSOCIATIVO, VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA, $\exists$ L'ELEMENTO NEUTRO PER IL PRODOTTO (FUNZIONE UNITARIA)

) POSSIAMO INFINE DEFINIRE UNA NUOVA OPERAZIONE IN $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

CHIAMATA PARENTESI DI POISSON. CHE ASSOCIA ALLA COPPIA $(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ UNA FUNZIONE $\in \mathcal{F}$. SECONDO LA LEGGE:

$$[f,g] = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right)$$

[IN DIVERSI TESTI LA DEFINIZIONE E' DATA SCAMBIANDO f e g]

QUESTA OPERAZIONE E' LECITA ~~PERCHE~~ PERCHE' NELLO SPAZIO DELLE FASI LE q_α E LE p_α SONO VARIABILI INDIPENDENTI.

LE PARENTESI DI POISSON GODONO DELLE SEGUENTI PROPRIETA'

1) $[f,f]=0$

2) $[f,g] = -[g,f]$ (ANTICOMMUTATIVITA')

3) $[f,c]=0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (c COSTANTE)

4) $[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \alpha_1 [f_1,g] + \alpha_2 [f_2,g] \quad \forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$

5) $[f_1 \cdot f_2, g] = f_1 [f_2,g] + f_2 [f_1,g]$

6) $\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$

7) $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$ (IDENTITA' DI JACOBI)

L'ULTIMA PROPRIETA' SI PROVA TENENDO CONTO DEL LEMMA DI **SCHWARZ** (SULLA INVERTIBILITA' NELL'ORDINE DI DERIVAZIONE).

<u>ESEMPI:</u> SIA $f = p_i \quad g = p_j$

1)
$$[p_i, p_j] = \frac{\partial p_i}{\partial p_\alpha} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_\alpha}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial p_\alpha} = 0$$

2) ANALOGAMENTE

$$[q^i, q^j] = 0$$

[NEL CASO IN CUI SI UTILIZZA LA DEFINIZIONE IN CUI f E g SONO SCAMBIATE SI AVRA' $[q^k, p_i] = \delta_{ik}$]

3) $$[p_i, q^k] = \frac{\partial p_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial q^k}{\partial q^\alpha} - \cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha}} \cancel{\frac{\partial q^k}{\partial p_\alpha}} = \delta_{i\alpha} \delta_{k\alpha} = \delta_{ik}.$$

4) SIA $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ CALCOLIAMO LA SUA $\frac{d}{dt} f$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha$$

SE QUINDI CONSIDERIAMO LA $\frac{df}{dt}$ CALCOLATA LUNGO LE TRAETTORIE DEL SISTEMA HAMILTONIANO.

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{\bar{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \left.\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right|_{\bar{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\bar{x}} + [H, f]_{\bar{x}}$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dt}\right|_{\bar{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\bar{x}} + [H, f]_{\bar{x}}}$$

INTEGRALI PRIMI:

SE $f(p_\alpha, q_\alpha, t)$ E' UN INTEGRALE PRIMO

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\bar{x}} + [H, f]_{\bar{x}} = 0$$

IN PARTICOLARE SE $f = f(p_\alpha, q_\alpha)$ $\left(\text{CIOE'} \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\bar{x}} = 0\right)$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0 \iff [H, f]_{\bar{x}} = 0$$

TEOREMA DI POISSON:

SIANO $f = f(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ED $g = g(p_\alpha, q^\alpha, t)$

DUE INTEGRALI DEL MOTO ALLORA AVREMO CHE

$[f, g] = \text{COSTANTE}$ È UN INTEGRALE **PRIMO**.

DIM: SE f, g NON DIPENDONO ESPLICITAMENTE DAL TEMPO

ALLORA SCRIVIAMO LA IDENTITÀ DI JACOBI PER g, H, g.

$$[f, [H, g]] + [H, [g, f]] + [g, [f, H]] = 0$$

DA CUI ESSENDO f, g INTEGRALI PRIMI $[H, g] = [H, f] = 0$

DA CUI $[H, [g, f]] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[g, f] = 0$

$$[f, g] = \text{COSTANTE}.$$

$$\boxed{\text{SE } f, g \text{ DIPENDONO ESPLICITAMENTE DAL TEMPO}}$$

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [H, [f, g]]$$

(UTILIZZANDO LE PROPRIETÀ 6), 7)

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$$

$$[H, [f, g]] = \underbrace{-[g, [H, f]]}_{\downarrow} \underbrace{- [f, [g, H]]}_{\downarrow} =$$

$$= [[H, f], g] + [f, [H, g]]$$

DA CUI:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] + [[H, f], g] +$$

$$+ [f, [H, g]] = \left[\cancel{\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]}, g\right] + \left[f, \cancel{\frac{\partial g}{\partial t} + [H, g]}\right] =$$

DA CUI $\frac{d}{dt}[f, g] = 0$

ESEMPIO:

SIA $H(q,p) = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right] - U(r)$ (*)

CONSIDERIAMO LE COMPONENTI DEL MOMENTO ANGOLARE.

$M_x = y\,p_z - z\,p_y \quad , \quad M_y = z\,p_x - x\,p_z \quad , \quad M_z = x\,p_y - y\,p_x$

DA CUI:

$$[M_x, H] = \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}} + \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z} -$$

$$- \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}} - \underbrace{\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}} - \underbrace{\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z}} =$$

$$= -z\left(\cancel{-U'\frac{y}{r}}\right) + y\left(\cancel{-U'\frac{z}{r}}\right) - \cancel{p_z\frac{p_y}{m}} + \cancel{p_y\frac{p_z}{m}} = 0$$

ANALOGAMENTE AVREMO:

$[M_y, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x$ ED M_y SONO INTEGRALI PRIMI

MA $[M_x, M_y] = y\,p_x - x\,p_y = -M_z$

ALLORA ANCHE M_z E' UN INTEGRALE PRIMO

— o —

NOTA D'ALTRA PARTE DALLA (*) $\Rightarrow$ LA LAGRANGIANA E' INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO ~~AD~~ I TRE ASSI QUINDI PER IL TEOREMA DI NOETHER IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE SI CONSERVA.