CAMPI EQUIPROIETTIVI

SIA DATO UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE $\mathcal{E}_3$

A CUI ABBIAMO ASSOCIATO UNO SPAZIO VETTORIALE E_3

IN MODO TALE CHE; ESISTA L'APPLICAZIONE

$$\varphi : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \to E_3$$

UNITAMENTE ALLE TRE PROPRIETA' DA ESSA ASSOCIATE.

UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE CI CONSENTE DI DEFINIRE I VETTORI APPLICATI, E, CONSEGUENTEMENTE, I SISTEMI DI RIFERIMENTO

$$\{O, \underline{e}_i\}$$

DEF 1: UN RIFERIMENTO $\{O, \underline{e}_i\}$ SI DEFINISCE "LEVOGIRO" SE POSTO UN OSSERVATORE LUNGO L'ASSE $\underline{e}_3$, CHE GUARDA L'ASSE $\underline{e}_1$, ALLORA L'ASSE $\underline{e}_2$ SARA' POSTO ALLA SUA SINISTRA.

DEF 2: UN RIFERIMENTO $\{O, \underline{e}_i\}$ SI DEFINISCE "DESTROGIRO" SE PONENDO UN OSSERVATORE LUNGO L'ASSE $\underline{e}_3$, CHE GUARDA L'ASSE $\underline{e}_1$, TROVERA' L'ASSE $\underline{e}_2$ ALLA SUA DESTRA.

DEF-3: NEL CASO DOVESSIMO CONSIDERARE, TRAMITE UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE $\mathcal{E}_3$ (E IL CORRISPONDENTE SPAZIO VETTORIALE E_3), SOLTANTO LA "CLASSE" DEI RIFERIMENTI "LEVOGIRI" ALLORA $\mathcal{E}_3$ SI DIRA' ORIENTATO POSITIVAMENTE E SI INDICHERA' CON $\mathcal{E}_3^+$ (ED ANALOGAMENTE CON LO SPAZ. VETT. E_3^+).

DEF. 4: LA STESSA DEF. VALE SE CONSIDERIAMO SOLO LA CLASSE DEI RIFERIMENTI "DESTROGIRI" IN QUESTO CASO AVREMO $\mathcal{E}_3^-$ "ORIENTATO NEGATIVAMENTE".

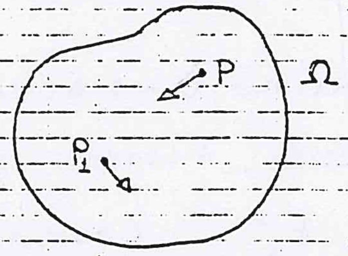
VEDI RIUNERO PAG. 104-110.

2. CAMPI EQUIPROIETTIVI.

8. CAMPI VETTORIALI.

RETRO

Consideriamo lo spazio puntuale affine $\mathcal{E}_3^+$ euclideo orientato positiv mente e consideriamo in esso un insieme aperto Ω:



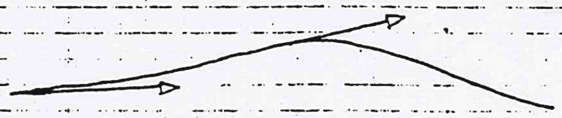
un campo vettoriale è una legge che ad ogni punto $P \in \Omega$ associa un vetto $\underline{v}_P \in E_3^+$. Formalmente, dunque, un campo vettoriale è un'applicazione:

$$\underline{v} : \Omega \longrightarrow E_3^+ \quad .$$

Un esempio banale di campo vettoriale è il campo della gravità. Ad og punto di una certa regione di spazio viene associato in questo caso il ve tore accelerazione di gravità.

Tra le armature di un condensatore, per esempio, quando viene stabilit una differenza di potenziale, è definito il campo elettrico.

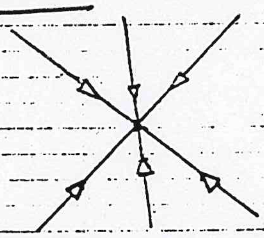
Si definiscono linee di flusso di un campo vettoriale quelle curve che godono della proprietà di avere in ogni punto come tangente i vettori di campo:



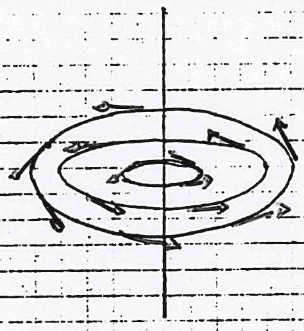
Esempio. Consideriamo un campo centrale (in cui, cioè, tutti i vettor

(CAMPO CENTRALE)

sono diretti verso un centro), in questo caso tutte le linee di flusso sono quelle che passano per il centro (e costituiscono una stella di rette):



Per il (campo magnetico generato da un filo percorso da corrente) le linee di flusso sono delle circonferenze concentriche:



9. CAMPI EQUIPROIETTIVI.

I campi equiproiettivi sono molto importanti, come vedremo, sia nella teoria dei momenti dei vettori applicati, sia nella teoria dei moti rigidi.

Un campo equiproiettivo è tale che, se consideriamo due punti P e Q distinti, ed il segmento congiungente P con Q, le proiezioni dei vettori $\underline{v}_P$ e $\underline{v}_Q$ su questo segmento sono uguali, ovvero:

$$\underline{v}(P) \cdot (P-Q) = \underline{v}_Q \cdot (P-Q) .$$

Portiamo un esempio di campo equiproiettivo. Consideriamo il seguente campo vettoriale:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{a} \times (P-O)} \quad ,$$

essendo O un punto fisso ed $\underline{a}$ un vettore costante. Dimostriamo che ste introdotto è un campo equiproiettivo. A questo scopo calcoliamo il po in un punto Q distinto da P :

$$\text{(2)} \qquad \underline{v}_Q = \underline{v}_O + \underline{a} \times (Q-O) \quad ;$$

sottraendo membro a membro la (2) dalla (I) si ha:

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_Q + \underline{a} \times (P-Q)} \quad .$$

Proiettiamo questa uguaglianza sulla congiungente P con Q , o megl consideriamo il prodotto scalare di ambo i membri per $(P-Q)$:

$$\underline{v}_P \cdot (P-Q) = \underline{v}_Q \cdot (P-Q) + \underline{a} \times (P-Q) \cdot (P-Q) \quad ,$$

da cui proprio:

$$\underline{v}_P \cdot (P-Q) = \underline{v}_Q \cdot (P-Q) \quad .$$

Teorema. Ogni campo equiproiettivo è del tipo: (SOLO ENUNCIATO)

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{a} \times (P-O)} \quad ,$$

essendo $\underline{v}_O$ ed $\underline{a}$ costanti.

QUINDI SE CIO' E' VERO AVREMO

$$\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{a} \wedge (P-O) \qquad \forall P$$

$$\underline{v}_Q = \underline{v}_O + \underline{a} \wedge (Q-O) \qquad \forall Q$$

da cui $\boxed{\forall P, Q \in S \qquad \underline{v}_P - \underline{v}_Q = \underline{a} \wedge (P-Q).}$

(10)

10. INVARIANTE SCALARE ED INVARIANTE VETTORIALE DI UN CAMPO EQUIPROIETTIVO.

Sia $\underline{v}$ un campo equiproiettivo, dicesi invariante scalare di $\underline{v}$ il seguente prodotto scalare:

$$\boxed{I_S = \underline{v}_P \cdot \underline{a}} \quad ,$$

essendo $\underline{a}$ il vettore caratteristico del campo. Il simbolo introdotto è un invariante nel senso che non dipende dalla scelta del punto P. Presi, infatti, un punto Q distinto da P si può subito dimostrare che:

$$\boxed{\underline{v}_P \cdot \underline{a} = \underline{v}_Q \cdot \underline{a}} \quad ,$$

dal momento che possiamo scrivere:

$$\boxed{\underline{v}_Q = \underline{v}_P + \underline{a} \times (Q-P)} \quad ,$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri per il vettore $\underline{a}$ otteniamo:

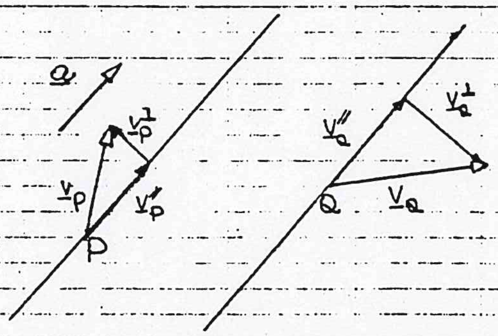
$$\underline{v}_Q \cdot \underline{a} = \underline{v}_P \cdot \underline{a} + \underline{a} \times (Q-P) \cdot \underline{a} \quad ,$$

da cui proprio:

$$\boxed{\underline{v}_Q \cdot \underline{a} = \underline{v}_P \cdot \underline{a}} \quad .$$

In ogni campo equiproiettivo possiamo individuare il vettore costante caratteristico $\underline{a}$ (il quale è un vettore libero e non appartiene, dunque, allo spazio affine $\mathcal{E}_3$); se prendiamo in considerazione allora in un generico punto il vettore associato $\underline{v}_P$, esso può sempre essere scomposto in un vettore componente $\underline{v}_P^{/\!/}$ lungo la direzione di $\underline{a}$, ed in un vettore componente $\underline{v}_P^{\perp}$ lungo la direzione ortogonale rispetto a quella individuata da $\underline{a}$:

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_P^{\parallel} + \underline{v}_P^{\perp}}$$



Tenuto conto di questa decomposizione, calcoliamo l'invariante scalare

$$I_S = \underline{v}_P \cdot \underline{a} = \underline{v}_P^{\parallel} \cdot \underline{a} + \cancel{\underline{v}_P^{\perp} \cdot \underline{a}} \quad ;$$

ma $\underline{v}_P^{\perp} \cdot \underline{a} = o$ ed inoltre teniamo presente che $\underline{v}_P^{\parallel}$ ha la stessa direzione di $\underline{a}$; scriveremo pertanto:

$$\boxed{I_S = \pm\, v_P^{\parallel}\, a} \qquad \boxed{\underline{u} = \frac{I_S\, \underline{a}}{|a|^2} = (\underline{V}_P^{\parallel} \cdot \underline{a})\, \frac{\underline{a}}{|a|^2}}$$

Osserviamo, ora, che, siccome I_S è un invariante, ed a è un numero ben preciso (il modulo del vettore $\underline{a}$), segue che $v_P^{\parallel}$ è un invariante.

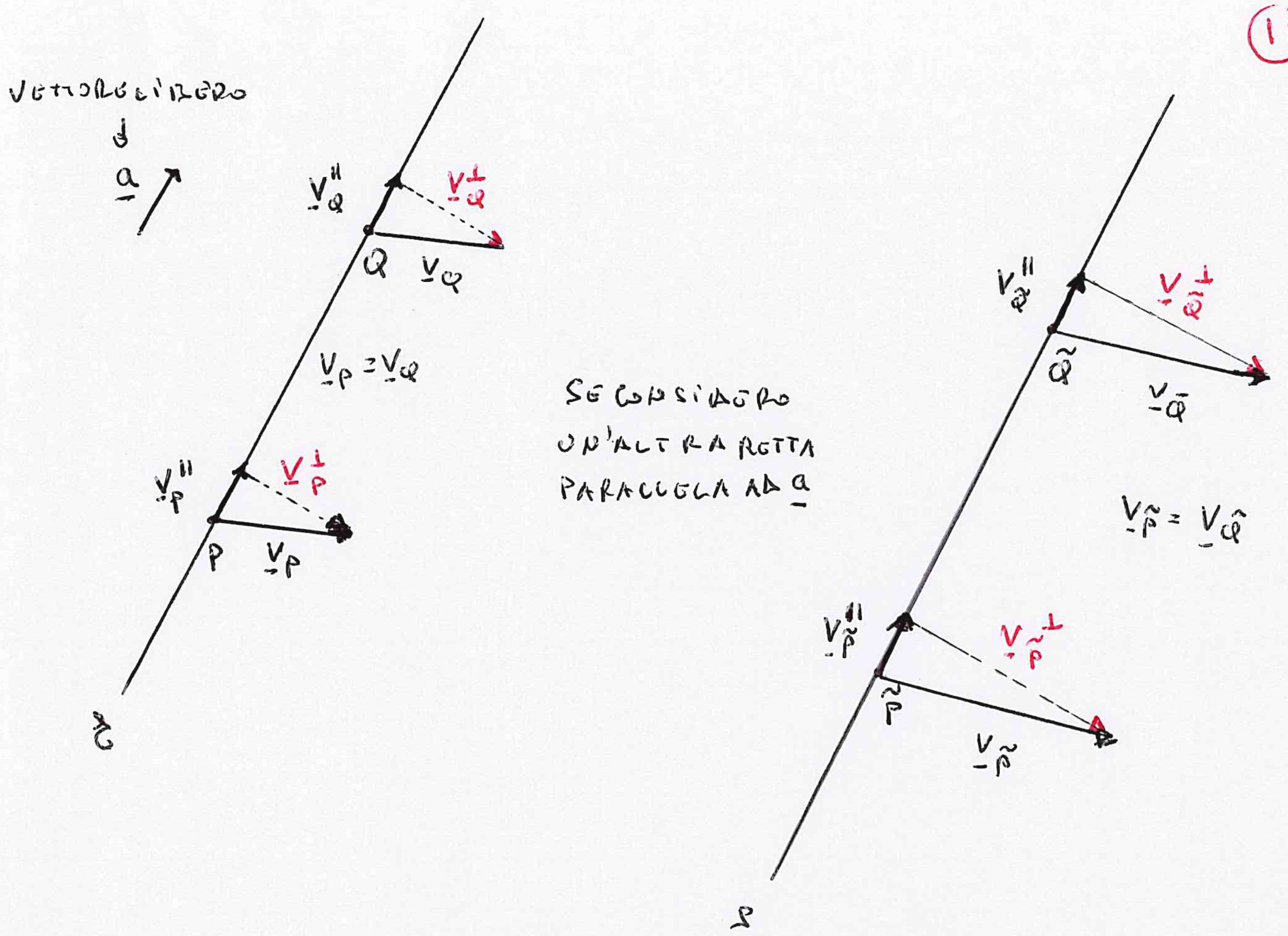
Ovvero il componente parallelo al vettore $\underline{a}$ del vettore di campo ha modulo che non dipende dal punto P (e questo discorso vale anche per il segno: una volta fissato il $+$ o il $-$ il segno rimane costante).

Chiamiamo invariante vettoriale del campo equiproiettivo $\underline{v}$ il vettore $\underline{v}_P^{\parallel}$, vettore che, come abbiamo visto, è tale che la sua direzione, il suo verso ed il suo modulo non dipendono dal punto P .

I Ci chiediamo adesso se esistono regioni di $\mathcal{E}_3$ in cui il nostro campo vettoriale equiproiettivo è costante. Ciò equivale a chiedersi se esistono regioni dello spazio per ogni punto delle quali si abbia $\underline{v}_P = \underline{v}_Q$.

Ma $\underline{v}_P = \underline{v}_Q$ se e solo se $\boxed{\underline{a} \times (Q - P) = o}$, ovvero $\boxed{(Q - P) \parallel \underline{a}}$.

La conclusione è che esistono regioni di spazio in cui il campo è costante, e sono $\boxed{\text{tutte le rette parallele al vettore } \underline{a}}$:



OSSERVIAMO CHE $\underline{V}_P^{\parallel} = \underline{V}_Q^{\parallel} = \underline{V}_{\tilde{P}}^{\parallel} = \underline{V}_{\tilde{Q}}^{\parallel}$ = "INVARIANTE VETT. DEL CAMPO"

SULL'ASSE $\underline{\xi}$: "IN TUTTI I PUNTI DI $\underline{\xi}$ IL CAMPO E' COSTANTE $\underline{V}_P = \underline{V}_Q$"

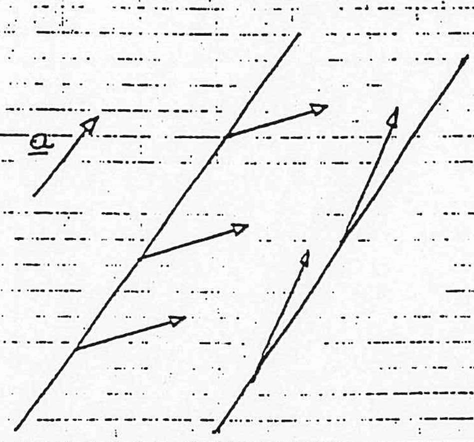
SULL'ASSE s: "IN TUTTI I PUNTI DI $\underline{s}$ IL CAMPO E' COSTANTE $\underline{V}_{\tilde{P}} = \underline{V}_{\tilde{Q}}$"

MA IN GENERALE $\underline{V}_P \neq \underline{V}_{\tilde{P}}$.

CI CHIEDIAMO ADESSO SE TRA TUTTE QUESTE RETTE IN CUI IL CAMPO E' COSTANTE (IN CIASCUNA DI ESSE) NE ESISTE UNA IN CUI NON SOLO IL CAMPO E' COSTANTE MA E' PARI ALL'INVARIANTE VETTORIALE $\underline{V}_P^{\parallel}$

"ASSE DEL CAMPO": UNA RETTA IN CUI IL CAMPO E' COSTANTE, ED E' PARI ALL'INVARIANTE $\underline{V}_P^{\parallel}$ DEL CAMPO, SI CHIAMA "ASSE DEL CAMPO"

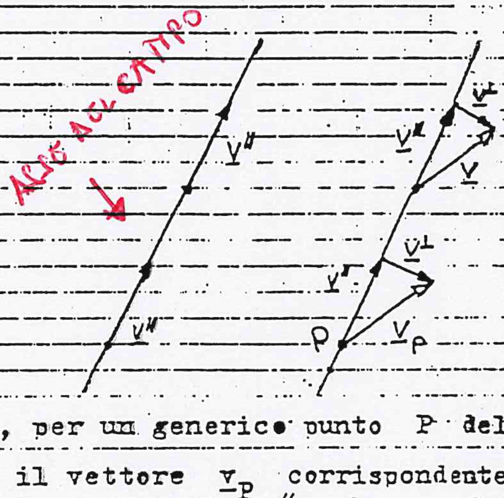
(13)



II. ASSE DI UN CAMPO EQUIPROIETTIVO.

Proposizione. Esiste un luogo di punti di $\mathcal{E}_3$ in cui il campo equiproiettivo $\underline{v}$ è parallelo ad $\underline{a} \neq \underline{o}$, e questo luogo è una retta parallela alla direzione di $\underline{a}$ che chiamasi "asse del campo".

Precedentemente abbiamo visto che su una qualunque retta parallela ad $\underline{a}$ il campo equiproiettivo $\underline{v}$ era costante. In particolare sull'asse il campo non solo è costante ma è anche parallelo ad $\underline{a}$. La conclusione è che sull'asse il vettore di campo $\underline{v}_P$ coincide con l'invariante vettoriale $\underline{v}_P^{/\!/}$:



In generale, poi, per un generico punto P della regione di spazio in cui è definito $\underline{v}$, il vettore $\underline{v}_P$ corrispondente può essere scomposto nella somma vettoriale di $\underline{v}_P^{\perp}$ e $\underline{v}_P^{/\!/}$, ed il suo modulo, dunque, sarà dato da:

$$\sqrt{\underline{v}_P^{\perp 2} + \underline{v}_P^{/\!/ 2}} ,$$

e da quanto sopra detto segue che il modulo del vettore di campo $\underline{v}_P$ è minimo sull'asse del campo.

"TEORIA DEI SISTEMI RIGIDI"

SIA DATO UNO "SPAZIO PUNTUALE AFFINE" $\mathcal{E}_3^+$

DEFINIAMO UNA APPLICAZIONE CHIAMATA "ISOMETRIA"

$$L: \mathcal{E}_3^+ \to \mathcal{E}_3^+$$

CHE SODDISFI LE DUE PROPRIETA'

1) L E' BIJETTIVA

2) $\forall\, A, P, Q, B \in \mathcal{E}_3^+$

$$(P-A)\cdot(Q-B) = [L(P)-L(A)]\cdot[L(Q)-L(B)]$$

SIA $S(t_1)$ LA "CONFIGURAZIONE" DEL SISTEMA FISICO S' A $t=t_1$

SIA $S(t_2)$ LA " " " " " " A $t=t_2$

DEF1: DIREMO CHE LO SPOSTAMENTO DEL SISTEMA S

$$S(t_1) \to S(t_2)$$

E' RIGIDO SE ESSO E' DESCRITTO DA UNA "ISOMETRIA POSITIVA"

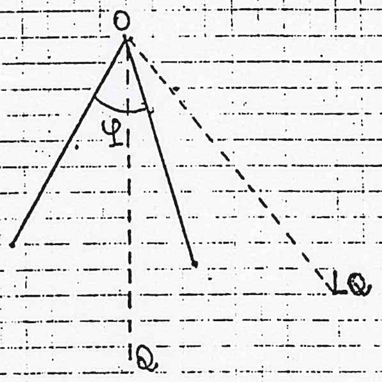
IN ALTRE PAROLE: A) LE DISTANZE RELATIVE DEI PUNTI DEL SISTEMA S RIMANGONO INVARIATE

B) SE DATO UN RIFERIMENTO ASSOCIATO AL SISTEMA CHE SIA LEVOGIRO A $t=t_1$, ESSO RIMARRA' LEVOGIRO ANCHE ALL'ISTANTE $t=t_2$

DEF 2: UN SISTEMA S SI DICE "RIGIDO" SE TUTTI I SUOI SPOSTAMENTI SONO RIGIDI.

"PUNTI SOLIDALI"

NOTA: SIA DATO UN PUNTO $Q \notin S$ POSSIAMO PENSARE DI ESTENDERE IL CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA APPLICAZIONE ANCHE AD ALTRI PUNTI DELLO SPAZIO $\mathcal{E}_3^+$, QUESTI SI DIRANNO "SOLIDALI" AL SISTEMA S SE INFATTI CONSIDERIAMO, ABBIAMO CONSIDERATO un'isometria positiva il cui campo di definizione è limitato ai soli punti del sistema S .



Consideriamo il generico punto geometrico $Q \in \mathcal{E}_3^+$ non appartenente alla asta. Possiamo pensare di estendere il campo di definizione della nostra applicazione a tutto lo spazio puntuale $\mathcal{E}_3^+$ in modo da comprendere anche il punto Q . In questo senso il punto Q si dice solidale al sistema: esso, in effetti, subisce uno spostamento come se appartenesse al sistema stesso. Nell'esempio citato, se lo spostamento considerato è di un angolo φ, allora il punto Q si sposterà dello stesso angolo.

2. CONDIZIONI CINEMATICHE DI RIGIDITA'.

(SOLO ENUNCIATO)

Proposizione. - Condizione necessaria e sufficiente affinché un moto con nuo di un sistema S sia rigido è che:

$$|P(t) - Q(t)| = \text{cost.} \qquad \forall P, Q \in S \qquad \forall t \, ,$$

cioè nel moto le distanze tra i punti del sistema si conservano.

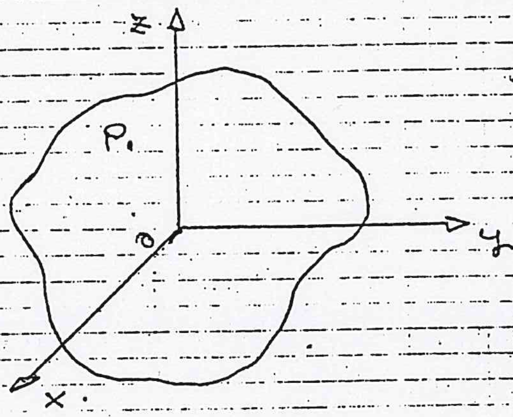
Dimostrazione. NO

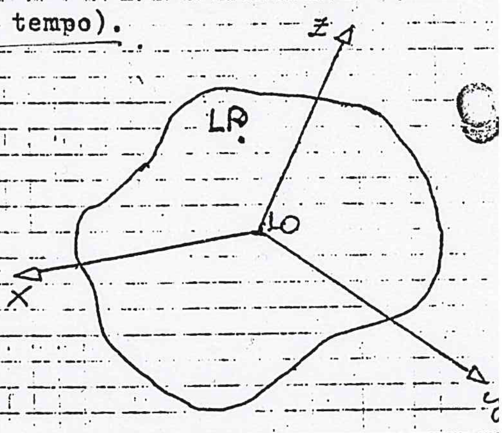
~~Necessità.~~

~~Sia dato un sistema S che si muove di moto rigido.~~

~~punti A, B, C, D sono non complanari, perché così sono stati scelti ad un certo istante assunto come iniziale (e non potranno esistere dei valori di t per cui essi possano essere complanari, dal momento che devono conservarsi le distanze tra i punti solidali).~~

Proposizione. Il moto di un sistema materiale S è rigido se e solo se esiste un riferimento ortonormale levogiro mobile in cui le coordinate dei punti di S sono costanti (non variano nel tempo).



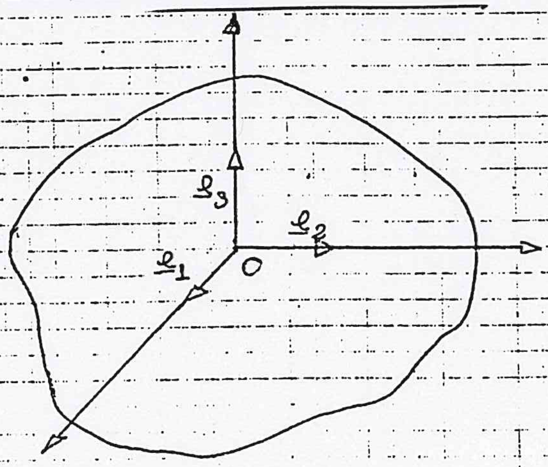


Dimostriamo che la condizione è necessaria.

Hp. E' dato un sistema S che si muove di moto rigido.

Ts. Esiste un sistema di riferimento solidale con il sistema S in cui le coordinate dei punti di S non variano nel tempo.

Consideriamo i tre vettori $e_1 = P_1 - O$, $e_2 = P_2 - O$, $e_3 = P_3 - O$, solidali con il sistema S, individuanti una base ortonormale.



Consideriamo un punto $P \in S$, per esso avremo:

$$P - O = x^i \underline{e}_i \quad ,$$

essendo:

$$x^i = (P - O) \cdot (P_i - O) \qquad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Ma per definizione di moto rigido, durante il moto vengono conservati i prodotti scalari, per cui al variare del tempo le x^i rimangono costanti.

La conclusione è che esiste un riferimento ortonormale, solidale con il sistema S, in cui le coordinate dei punti appartenenti ad S rimangono costanti.

Dimostriamo che la condizione è sufficiente.

Hp. Esiste un riferimento ortonormale levogiro mobile solidale con il sistema S in cui le coordinate di un qualsiasi punto del sistema (o solidale con esso) rimangono costanti.

Ts. Il moto del sistema materiale S è rigido.

Fissiamo il riferimento mobile ortonormale levogiro, di origine $O(t)$ e base $\underline{e}_i(t)$, $\{O(t), \underline{e}_i(t)\}$; in questo riferimento, per ipotesi, la posizione di un qualsiasi punto è individuata da:

$$[P(t) - O(t)] = x^i \underline{e}_i(t) \quad ,$$

essendo x^i costanti. Prendiamo in esame un altro punto $Q(t)$, sarà:

$$[Q(t) - O(t)] = y^i \underline{e}_i(t) \quad ,$$

essendo y^i costanti. Avremo:

$$[P(t) - Q(t)] = (x^i - y^i)\, \underline{e}_i(t) \quad .$$

Consideriamo la distanza al quadrato di $P(t)$ da $Q(t)$:

$$|P(t) - Q(t)|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i - y^i)^2 = \text{cost.} \qquad ,$$

e per il teorema precedentemente esposto segue la tesi.

Mediante questo teorema possiamo affermare che i punti solidali con un sistema rigido sono quei punti le cui coordinate non variano nel tempo rispetto ad un riferimento solidale esso stesso con il sistema.

Se, per esempio, come corpo rigido consideriamo la Terra, e prendiamo in esame il riferimento solidale con l'origine nel centro della Terra, allora ogni punto sulla superficie della Terra ha coordinate costanti.

Questo teorema ci dà, dunque, una caratterizzazione completa dei moti rigidi, e ci fornisce l'equazione generale finita dei moti rigidi:

$$\boxed{\begin{cases} P(t) - O(t) = x^i \, \underline{e}_i(t) \\ x^i = \text{cost.} \end{cases}} \qquad ,$$

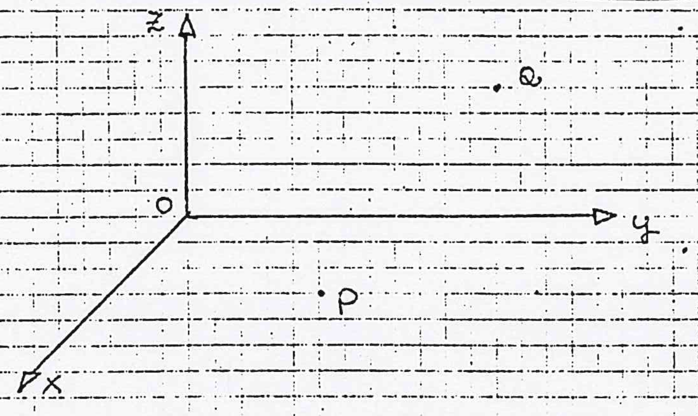
essendo il riferimento $\{O(t), \underline{e}_i(t)\}$ solidale al sistema, ortonormale e levogiro.

Cercheremo nel seguito di caratterizzare il moto rigido rispetto ad un riferimento fisso.

3. GRADO DI LIBERTA' DI UN SISTEMA.

Definizione. Diciamo gradi di libertà di un sistema di punti materiali S il numero di parametri necessari e sufficienti per determinare completamente il moto del sistema S ad ogni istante.

Se si considera, per esempio, un punto $P \in \mathcal{E}_3$, libero di muoversi nello spazio, avremo bisogno di tre gradi di libertà, cioè delle tre coordinate del punto valutate rispetto ad un sistema di riferimento fisso, istante per istante. Se consideriamo, invece, un punto P che si muove lungo una circonferenza: a tale punto competerà un solo grado di libertà (è sufficiente riferirsi all'ascissa curvilinea). Se consideriamo un sistema materiale formato da due punti liberi nello spazio, il numero dei gradi di libertà del sistema sarà uguale a 6 (3 per ogni punto). Infine, consideriamo un sistema di due corpi in cui il punto Q è libero di muoversi nello spazio, mentre il punto P è vincolato a muoversi su di un piano: il sistema avrà 5 gradi di libertà (3 per il punto Q e 2 per il punto P).



Mediante la caratterizzazione fatta precedentemente sui moti rigidi (son quelli per cui esiste un riferimento ortonormale levogiro solidale con il sistema rispetto al quale le coordinate di un punto qualunque del sistema o solidale con esso sono costanti) cercheremo di dimostrare che in generale il numero di gradi di libertà di un corpo rigido è 6.

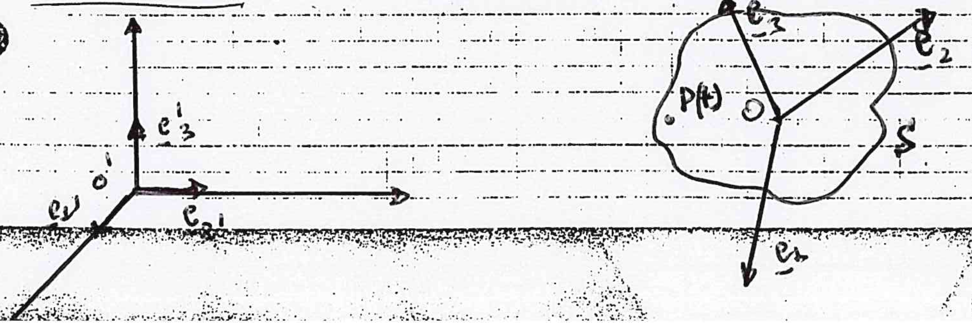
Introduciamo un sistema di riferimento fisso:

$$\{O', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\},$$

il generico punto $P \in S$ avrà certe coordinate in questo riferimento:

$$P(t) - O' = x^{i'}(t)\, \underline{e}'_i ,$$

ed in generale le tre coordinate di P nel riferimento fisso saranno funzioni del tempo, mentre non dipendono dal tempo nel riferimento solidale.



Vediamo che relazione sussiste tra le coordinate del punto P nel riferimento solidale e le coordinate di P nel riferimento fisso. Osserviamo che:

$$P(t) - O' = P(t) - O + O - O' = x^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,,$$

ed il punto O, origine del riferimento solidale, avrà certe coordinate nel riferimento fisso:

$$O - O' = x_0^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,,$$

e dunque:

$$P(t) - O + x_0^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} = x^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,,$$

d'altra parte si ha che:

$$P(t) - O = x^i\,\underline{e}_i(t) \,,$$

e pertanto:

$$x^i\,\underline{e}_i(t) + x_0^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} = x^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,.$$

Ma ora, dato che sia $\underline{e}_i$ che $\underline{e}_{i'}$ sono basi del nostro spazio vettoriale, esisterà una matrice tale che:

$$\underline{e}_i(t) = A_i^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,,$$

(dato che $\underline{e}_{i'}$ è indipendente dal tempo, mentre $\underline{e}_i$ è funzione del tempo, la matrice in questione dipenderà, in generale, dal tempo). Sostituendo avremo:

$$x^i A_i^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} + x_0^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} = x^{i'}(t)\,\underline{e}_{i'} \,,$$

da cui:

$$\boxed{x^{i'}(t) = x_0^{i'}(t) + A_i^{i'}(t)\,x^i} \,.$$

3 COORDINATE IN FUNZIONE DI t DELL'ORIGINE O (DEL RIF. SOLIDALE)

3 LE COMPONENTI DI $A_i^{i'}(t)$ $3\times3=9$ COMPONENTI. SI PROVA CHE INDIPENDENTI

SOLTANTO 3 DI QUESTE SONO INDIPENDENTI = 3 COSENI DIRETTORI DEGLI ASSI DEL RIF. SOLIDALE ⇒ 6 GRADI DI LIBERTÀ

QUINDI A) 3 GRADI DI LIBERTA' SONO ASSOCIATI AD: $\{x^{i'}_{0}(t)\}$ 21

B) 3 GRADI DI LIBERTA' SONO ASSOCIATI ALLE COMPONENTI INDIPENDENTI (3 SU 9) DELLA MATRICE $A_i^{i'}(t)$.

DATI I DUE RIFERIMENTI $\{O', \underline{e}_{i'}\}$ E $\{O, \underline{e}_i\}$ ORTONORMALI E LEVOGIRI AVREMO:

$$\underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = A_i^{i'} \underline{e}_{i'} \cdot A_j^{j'} \underline{e}_{j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} \underbrace{\underline{e}_{i'} \cdot \underline{e}_{j'}}_{\delta_{i'j'}}$$

DA CUI: $$A_i^{k'} A_j^{k'} = \underbrace{A_i^{k'} (A_{k'j})^T}_{A A^T} = \underbrace{\delta_{ij}}_{= I}$$

AVREMO QUINDI UN SISTEMA DI 6 EQUAZIONI IN 9 INCOGNITE

$$\boxed{A A^T = I}$$

RIMARRANNO QUINDI SOLTANTO 3 QUANTITA' INDETERMINATE (A PARTE IL SEGNO).

IL SEGNO VIENE FISSATO DAL FATTO CHE DOVRA' VALERE LA ULTERIORE CONDIZIONE.

$$\det(A A^T) = \det(A) \det(A^T) = (\det A)^2 = 1$$

$$\text{da cui } \det A = \pm 1$$

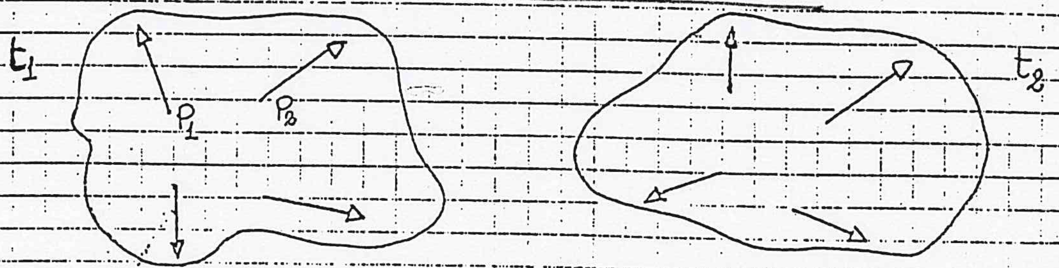
DAL MOMENTO CHE LA FUNZIONE $\det A(t)$ DEVE ESSERE UNA FUNZIONE CONTINUA DEL TEMPO, ALLORA SE ALL'ISTANTE INIZIALE IL $\det A = 1$ QUESTO SARA' VERO PER $\forall t$.

IN GENERALE QUINDI UN CORPO RIGIDO AVRA' 6 GRADI DI LIBERTA

$\boxed{3 \text{ SONO LE COORDINATE } \{x^{i'}_{0}(t)\}}$ + $\boxed{3 \text{ I COSENI DIRETTORI}}$

4. RELAZIONE TRA LA TEORIA DEI MOTI RIGIDI E QUELLA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI

Consideriamo un sistema di punti materiali e conveniamo di associare ad ogni punto P un vettore velocità istante per istante.



Avremo così individuato un campo vettoriale $(P(t)\, ,\, \underline{v}_P(t))$.

Proposizione. Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto di un sistema S sia rigido è che il campo vettoriale $(P(t)\, ,\, \underline{v}_P(t))$ sia equiproiettivo ad ogni istante.

Hp: RIGIDO
Ts: EQUIPROIETTIVO

Dimostriamo la necessità della condizione.

Prendiamo in esame la distanza al quadrato tra $P(t)$ e $Q(t)$:

$$\left[P(t) - Q(t)\right]^2 = \text{cost.}$$

questo perché il moto è rigido. Deriviamo questa equazione rispetto al tempo:

$$2\left[P(t) - Q(t)\right] \cdot \left[\dot{P} - \dot{Q}\right] = 2\left[P(t) - Q(t)\right] \cdot \left(\underline{v}_P - \underline{v}_Q\right) = 0$$

e la tesi è acquisita.

Dimostriamo che la condizione è sufficiente.

Hp. Sia $(P(t)\, ,\, \underline{v}_P(t))$ un campo equiproiettivo.

Ts. S , contenente il generico punto P , è un sistema che si muove di moto rigido.

Dall'ipotesi si ha che:

$$\left[P(t) - Q(t)\right] \cdot \left(\underline{v}_P - \underline{v}_Q\right) = 0 \qquad t$$

ed integrando otteniamo:

$$\left[P(t) - Q(t)\right]^2 = \text{cost.}$$

ed il moto di S è per l'appunto rigido.

Ogni campo equiproiettivo ha un vettore caratteristico. Il vettore caratteristico del campo equiproiettivo associato al moto rigido di un certo sistema di punti materiali, si chiama vettore velocità angolare $\underline{\omega}(t)$ ed è funzione del tempo così come il campo. ($\underline{\omega}$ è un vettore libero).

L'invariante scalare del campo sarà chiamato "invariante cinetico scalare" $\boxed{I_c = \underline{v}_P \cdot \underline{\omega}}$ I_c è invariante nel senso che non dipende dal punto P del sistema, ma anch'esso ovviamente varierà col tempo.

L'invariante vettoriale del campo, cioè nel nostro caso il componente de campo parallelo alla direzione di $\underline{\omega}$, si chiamerà "velocità di traslazione $\underline{\tau}(t)$ anch'essa funzione del tempo.

L'asse del campo $(P(t), \underline{v}_P(t))$ sarà chiamato "asse di Mozzi" $a(t)$ ed è anch'esso, in generale, funzione del tempo, ma parallelo, istante per istante, alla direzione del vettore $\underline{\omega}(t)$.

Essendo il campo $(P(t), \underline{v}_P(t))$ equiproiettivo, istante per istante, po tremmo scrivere:

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P-Q)} \quad \forall P, Q \in S \quad .$$

Ed in particolare questa relazione sarà vera per il generico punto Q appartenente all'asse di Mozzi $a(t)$. Il campo nel punto Q assumerà modulo minimo, ed anzi $\underline{v}_Q$ coincide con l'invariante vettoriale $\underline{\tau}$:

$$\underline{v}_Q = \underline{\tau} \quad .$$

Pertanto:

$$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\tau} + \underline{\omega} \times (P-Q)} \quad \forall Q \in a(t) \quad .$$

5. DERIVATA DI UN VETTORE SOLIDALE. FORMULE DI POISSON.

Dati due punti A e B solidali con il sistema S (cioè tali che le loro coordinate rimangono costanti nel tempo rispetto ad un riferimento solidale), allora il vettore $\boxed{\underline{v} = A - B}$ dicesi "vettore solidale con il sistema S ".

Ricordando come abbiamo costruito un riferimento solidale con il sistema (prendendo 4 punti non complanari 0, P_I, P_2, P_3 solidali), segue che i vettori $P_I - 0 = \underline{e}_I$, $P_2 - 0 = \underline{e}_2$, $P_3 - 0 = \underline{e}_3$ sono solidali.

Sorge ora il problema di vedere come varia nel tempo il vettore $\underline{v}$ solidale con il sistema, conoscendo il moto del sistema stesso. Osserviamo:

$$\boxed{\underline{v} = A - B}$$

$$\dot{\underline{v}} = \dot{A} - \dot{B} = \underline{v}_A - \underline{v}_B = \underline{\omega} \times (A - B) = \underline{\omega} \times \underline{v} \quad ;$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\underline{v}} = \underline{\omega} \times \underline{v}} \quad ,$$

ed in particolare, per i tre vettori di base si ha:

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_I = \underline{\omega} \times \underline{e}_I \\ \dot{\underline{e}}_2 = \underline{\omega} \times \underline{e}_2 \\ \dot{\underline{e}}_3 = \underline{\omega} \times \underline{e}_3 \end{cases} ,$$

che sono note sotto il nome di formule di Poisson.

2. MOTI RIGIDI ELEMENTARI.

MOTO RIGIDO TRASLATORIO - MOTO RIGIDO ROTATORIO - MOTO RIGIDO ELICOIDALE - MOTO RIGIDO PIANO - MOTO RIGIDO SFERICO

5. MOTO TRASLATORIO.

Definiamo moto traslatorio, come quel moto rigido in cui il vettore ca-

5. MOTO TRASLATORIO

Definiamo moto traslatorio, come quel moto rigido in cui il vettore caratteristico $\underline{\omega}$ del campo $(P(t), \underline{v}_P(t))$ è nullo. Per questo tipo di moto si avrà:

$$\underline{v}_P - \underline{v}_Q = \underline{\omega} \times (P - Q) = \underline{o} \qquad \forall P, Q \text{ solidali.}$$

Vale a dire che, se il moto rigido è traslatorio, allora tutti i punti del sistema hanno la stessa velocità. Osserviamo che:

$$\dot{P} - \dot{Q} = o \Longrightarrow \boxed{\frac{d(P-Q)}{dt} = o} \Longrightarrow \boxed{P(t) - Q(t) = \text{cost.}} ,$$

ovvero il vettore posizione relativa tra due punti del sistema è costante nel tempo, in particolare esso sarà uguale ad un certo valore iniziale $P(t_o) - Q(t_o)$. L'equazione, perciò, di un siffatto moto sarà:

$$\boxed{P(t) = Q(t) + [P(t_o) - Q(t_o)]} .$$

La conclusione è che tutti i punti del sistema materiale S in moto traslatorio oltre ad avere la stessa velocità, percorrono tutti la stessa traiettoria a meno di una traslazione dovuta alla presenza della costante $P(t_o) - Q(t_o)$.

Se richiamiamo le formule di Poisson, nel moto traslatorio si avrà che:

$$\dot{\underline{e}}_1 = \underline{\omega} \times \underline{e}_1 = o$$
$$\dot{\underline{e}}_2 = \underline{\omega} \times \underline{e}_2 = o$$
$$\dot{\underline{e}}_3 = \underline{\omega} \times \underline{e}_3 = o ,$$

cioè il riferimento solidale si muove parallelamente a se stesso.

Cerchiamo di calcolare la velocità comune a tutti i punti solidali. A questo scopo fissiamo un punto Q sull'asse di Mozzi, si avrà:

$$\underline{v}_P = \underline{\tau} + \underline{\omega} \times (P - Q) = \underline{\tau} ,$$

cioè la velocità di ogni punto solidale coincide con l'invariante vettoria[le]

LE $\underline{\tau}$ "INVARIANTE VETTORIALE"

MOTO RIGIDO ROTATORIO

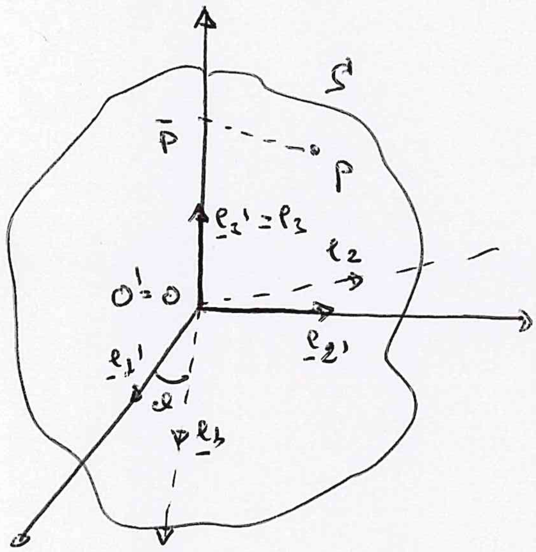
DEF. IL MOTO CONTINUO DI UN SISTEMA S' SI DICE "RIGIDO ROTATORIO"

SE $\underline{\tau} = 0$ (INVARIANTE VETTORIALE NULLO)

$\underline{\omega}$ HA UNA DIREZIONE COSTANTE NEL TEMPO

IN QUESTO CASO L'ASSE CARATTERISTICO DEL CAMPO "ASSE DI MOZZI" E' UN ASSE DI ROTAZIONE FISSO, IN QUANTO HA DIREZIONE COSTANTE NEL TEMPO E TUTTI I SUOI PUNTI HANNO VELOCITA' NULLA.

SIA AD ESEMPIO L'ASSE $\underline{e}_3$ L'ASSE FISSO



SIA IL RIFERIMENTO $\{O, \underline{e}_i\}$ SOLIDALE CON IL SISTEMA S'

SIA $P \in S'$ E SIA $\bar{P}$ LA PROIEZIONE DI P SULL'ASSE FISSO $\underline{e}_3 = \underline{e}_3'$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{\alpha}^{\alpha'}} \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix}$$

$\underline{e}_\alpha = A_\alpha^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$ IL PUNTO P HA COMPONENTI COSTANTI NEL RIFERIMENTO SOLIDALE $\{O, \underline{e}_i\}$

OSSERVIAMO CHE

$$\underline{e}_1 = \{\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0\} \qquad \dot{\underline{e}}_1 = \{-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, 0\}\dot{\alpha} = \dot{\alpha}\,\underline{e}_2$$

$$\underline{e}_2 = \{-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, 0\} \Rightarrow \dot{\underline{e}}_2 = \{-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha, 0\}\dot{\alpha} = -\dot{\alpha}\,\underline{e}_1$$

$$\underline{e}_3 = \{0, 0, 1\} \qquad \dot{\underline{e}}_3 = \underline{0}$$

DALLE FORMULE DI POISSON

$$\dot{\underline{e}}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{e}_i \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{e}}_1 = \omega\, \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1 = \omega\, \underline{e}_2 \\ \dot{\underline{e}}_2 = \omega\, \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_2 = -\omega\, \underline{e}_1 \\ \dot{\underline{e}}_3 = \omega\, \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \dot{\varphi}$$

ECCO PERCHÉ IL "VETTORE" CARATTERISTICO DEL CAMPO PRENDE IL NOME DI "VELOCITÀ ANGOLARE".

DETERMINIAMO: POSIZIONE, VELOCITÀ, ACCELERAZIONE DI UN PUNTO $P \in \mathcal{S}$ RISPETTO AL RIFERIMENTO FISSO $\{O, \underline{e}_{i'}\}$

SE $\underline{e}_\alpha = A_\alpha^{\ \alpha'}\, \underline{e}_{\alpha'}$

$$A_\alpha^{\ \alpha'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MENTRE LA SUA INVERSA COINCIDERÀ CON LA TRASPOSTA ED AVREMO:

$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\ \alpha}\, \underline{e}_\alpha$

$$A_{\alpha'}^{\ \alpha} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ANALOGAMENTE SE VOGLIAMO CALCOLARE LE COORDINATE $x^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha}\, x^\alpha$

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} x^{1'} = \cos\varphi\, x^1 - \sin\varphi\, x^2 \\ x^{2'} = \sin\varphi\, x^1 + \cos\varphi\, x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases} \qquad (P-O) = x^{\alpha'}\, \underline{e}_{\alpha'}$$

↑ ABBIAMO QUINDI TROVATO LA POSIZIONE (CIOÈ LE SUE COORDINATE) DI P NEL RIF. FISSO $\{O, \underline{e}_{i'}\}$

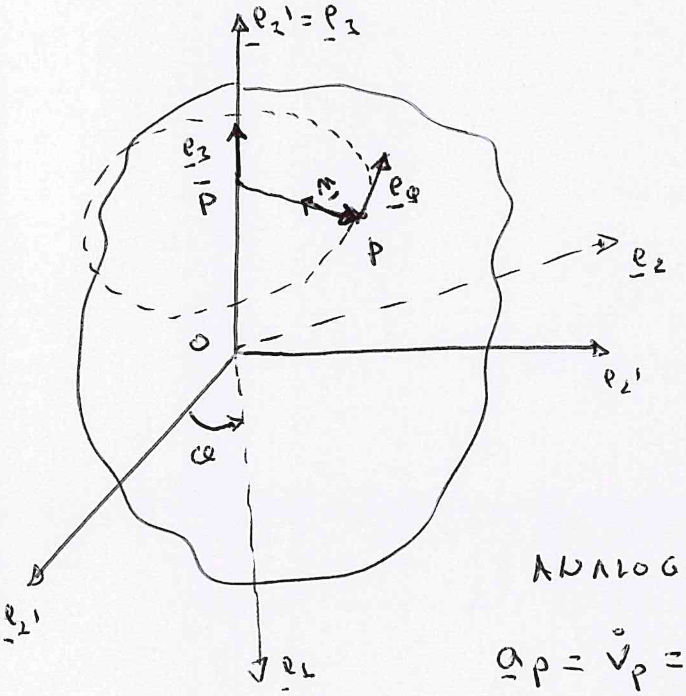
SE ADESSO VALUTIAMO $\underline{v}_P$, $\underline{a}_P$ RICORRENDO ALLA TEORIA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI.

$$\underline{v}_P = \cancel{\underline{v}_{\bar{P}}} + \underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})$$

ESSENDO $\bar{P} \in$ ASSE FISSO DI ROTAZIONE.

$$= \underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})$$

$$\underline{v}_P = \omega\, \underline{e}_3 \wedge (P - \bar{P}) = \omega\, |P - \bar{P}|\, \underline{e}_\varphi \quad (2)$$



IL MOTO DI P SARÀ UN "MOTO CIRCOLARE" ATTORNO L'ASSE $\underline{e}_3$

$\underline{e}_\varphi \Rightarrow$ VERSORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA CIRCOLARE

$$\dot{s} = \dot{\varphi} R \qquad (R = |P - \bar{P}| \quad \underline{e}_\varphi = \underline{t})$$

QUINDI $\underline{v}_P = \dot{s}\, \underline{t}$ (2 bis)

ANALOGAMENTE SE CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE

$$\underline{a}_P = \dot{\underline{v}}_P = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P - \bar{P}) + \underline{\omega} \wedge (\underline{v}_P - \underline{v}_{\bar{P}}) =$$

$$= \dot{\omega}\, \underline{e}_3 \wedge (P - \bar{P}) + \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})]$$

$$\underline{a}_P = \dot{\omega}\, |P - \bar{P}|\, \underline{e}_\varphi - \underbrace{[\underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})] \wedge \underline{\omega}}_{(\underline{\omega} \cdot \underline{\omega})(P - \bar{P}) - [\underbrace{\cancel{(P - \bar{P}) \cdot \underline{\omega}}}_{=0}]\underline{\omega}}$$

$$\underline{a}_P = \underbrace{\dot{\omega}\, |P - \bar{P}|\, \underline{e}_\varphi}_{\underline{a}_P^{(N.U.)}} - \underbrace{\omega^2 (P - \bar{P})}_{\underline{a}_P^{(CENTRIPETA)}} = \ddot{s}\, \underline{e}_\varphi + \omega^2 R\, \underline{n} = \ddot{s}\, \underline{e}_\varphi + \frac{\dot{s}^2}{R}\, \underline{n}$$

DOVE $s = R\varphi$ È L'ASCISSA CURVILINEA ASSOCIATA ALLA TRAIETTORIA CIRCOLARE

$$\underline{a}_P^{(N.U.)} = \dot{\omega}\, |P - \bar{P}|\, \underline{e}_\varphi = \ddot{s}\, \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_P^{(N.U.)} + \underline{a}_P^{(CENTRIPETA)} \quad (3)$$

TERMINE NON UNIFORME (N. U.)

$$\underline{a}_P^{(CENTRIP)} = -\omega^2 (P - \bar{P}) = \frac{\dot{s}^2}{R}\, \underline{n}$$

~o~

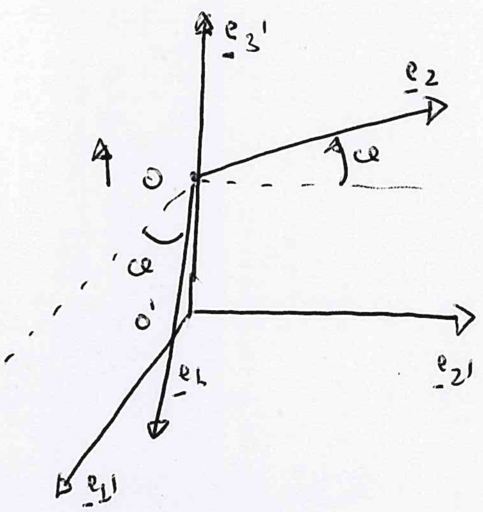
"MOTO RIGIDO ELICOIDALE"

Il moto continuo di un sistema rigido si dice "rigido elicoidale" se

$$\boxed{\underline{\tau} = c\,\underline{\omega} \quad \text{ed } \underline{\omega} \text{ ha una direzione fissata.} \quad (c \neq 0)}$$

In questo caso tutti i punti dell'asse di Mozzi avranno

$\underline{v}_P = \underline{\tau} \quad \forall P \in a(t)$

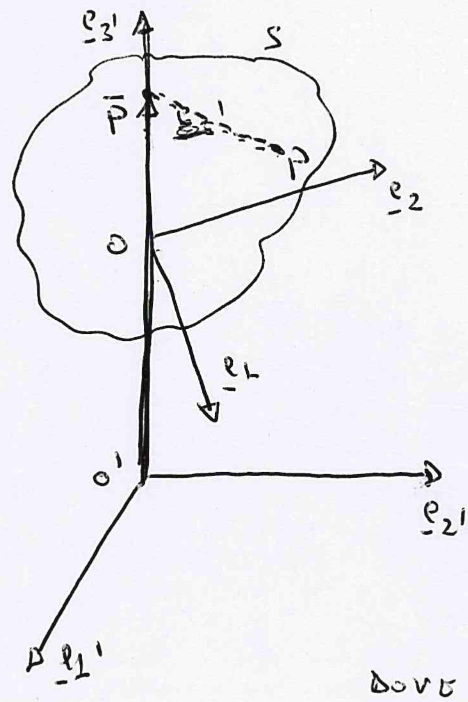


Quindi il moto sarà dato dalla composizione di un moto rotatorio attorno ad un asse (in figura asse $\underline{e}_3'$) e di un moto traslatorio lungo questo asse.

Cioè l'asse di rotazione trasla lungo l'asse $\underline{e}_3'$ con velocità

$\underline{v}_P = \underline{\tau} = c\,\underline{\omega} \quad \forall P \in a(t)$

Equazioni del moto:



Se $P \in S'$ e $\bar{P}$ è la sua proiezione sull'asse $\underline{e}_3'$ avremo:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' = x^{3'}_{O}(t) + z \end{cases}$$

Posizione del punto $P \in S'$ rispetto al rif. fisso $\{O', \underline{e}_i'\}$

dove (x', y', z') sono le coordinate di P rispetto al rif. $\{O', \underline{e}_i'\}$

(x, y, z) le coordinate di P nel riferimento solidale $\{O, \underline{e}_i\}$

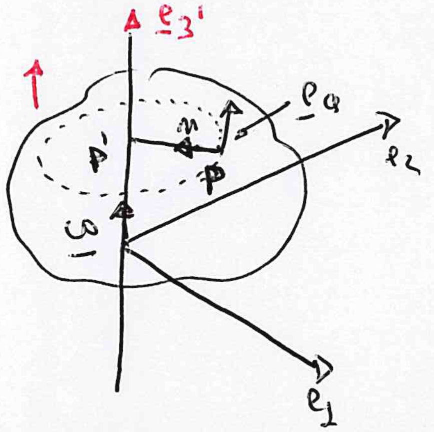
ANALOGAMENTE, DALLA TEORIA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI:

$$\underline{V}_P = \underline{V}_{\bar{P}} + \underline{\omega} \wedge (P - \bar{P}) \qquad \text{DOVE} \qquad \underline{V}_{\bar{P}} = \underline{\tau} = c\,\underline{\omega}$$

DA CUI $\boxed{\underline{V}_P = c\,\underline{\omega} + \underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})}$ (*)

MA $\underline{\omega} = \dot{\theta}\,\underline{e}_z$ QUINDI ESSENDO $\underline{\omega} \perp (P - \bar{P})$

$$\boxed{\underline{V}_P = c\,\dot{\theta}\,\underline{e}_z + \dot{\theta}\,|P - \bar{P}|\,\underline{e}_\theta}$$



PONENDO $\boxed{|P - \bar{P}| = R}$ $\boxed{d = \sqrt{c^2 + R^2}}$

$$\boxed{\underline{V}_P} = \underbrace{d\dot{\theta}}_{\dot{s}} \underbrace{\left[\frac{c}{d}\underline{e}_z + \frac{R}{d}\underline{e}_\theta\right]}_{\underline{t}} = \boxed{\dot{s}\,\underline{t}}$$

CON $\boxed{s = d\,\theta}$ L'ASCISSA CURVILINEA ASSOCIATA ALLA TRAETTORIA ELICOIDALE.

ANALOGAMENTE SE CONSIDERIAMO L'ACCELERAZIONE DERIVANDO LA (*)

$$\boxed{\underline{a}_P} = c\,\dot{\underline{\omega}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge (P - \bar{P}) + \underline{\omega} \wedge \underbrace{(\underline{V}_P - \underline{V}_{\bar{P}})}_{\underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})} =$$

$$= \underbrace{c\,\ddot{\theta}\,\underline{e}_z + \ddot{\theta}\,\underline{e}_z \wedge (P - \bar{P})}_{\downarrow} - [\underline{\omega} \wedge (P - \bar{P})] \wedge \underline{\omega} =$$

$$= \underbrace{d\,\ddot{\theta}}_{\ddot{s}} \underbrace{\left[\frac{c}{d}\underline{e}_z + \frac{R}{d}\underline{e}_\theta\right]}_{\underline{t}} - (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega})(P - \bar{P}) + \underbrace{\cancel{[(P - \bar{P}) \cdot \underline{\omega}]}}_{0}\,\underline{\omega}$$

$$= \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{\theta}^2 \underbrace{[-(P - \bar{P})]}_{R\,\underline{n}} = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{R\,d^2\dot{\theta}^2}{d^2}\,\underline{n} =$$

$$\boxed{= \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R_c}\,\underline{n}} \quad \text{CON} \quad \boxed{R_c = \frac{d^2}{R}} \quad \text{(RAGGIO DI CURVATURA)}$$

~~[illegible]~~: INOLTRE AVREMO:

$$\frac{d\,x^{3'}_{o}(t)}{dt} = v'_o = c\,\omega = c\,\dot{\alpha}(t)$$

DA CUI INTEGRANDO (CONOSCENDO LA FUNZIONE $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(t)$)

$$\int d\,x^{3'}_o = c\int_0^t \dot{\alpha}(t)\,dt$$

NEL CASO IN CUI $\dot{\alpha}$ = COSTANTE

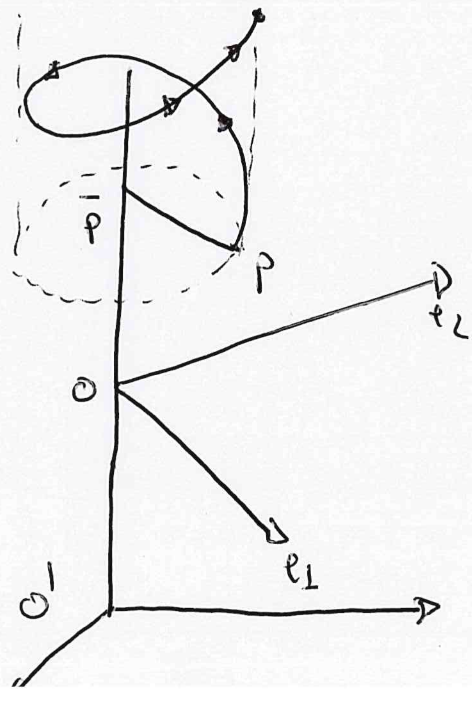
$$x^{3'}_o(t) = x^{3'}_o(0) + c\,\dot{\alpha}\,t.$$

DA CUI IL MOTO DI $\forall P \in S'$ SARA' IL MOTO DI UN PUNTO CHE PERCORRE UNA ELICA CILINDRICA

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha(t) - y\,\mathrm{sen}\,\alpha(t) \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha(t) + y\cos(\alpha(t)) \\ z' = x^{3'}_o(t) + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{v}_P = c\,\underline{\omega} + \underline{\omega}\wedge(P-\bar{P}) = \dot{s}\,\underline{t} \\ \underline{a}_P = \ddot{s}\,\underline{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\,\underline{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \alpha\,\alpha \\ \alpha = \sqrt{c^2+R^2} \end{cases}$$

$$R_c = \frac{\alpha^2}{R}$$ (RAGGIO DI CURVATURA DELL'ELICA CILINDRICA)



"MOTO RIGIDO SFERICO"

IL MOTO CONTINUO DI UN SISTEMA S SI DICE "RIGIDO SFERICO" SE $\boxed{\exists\ O \in S \text{ FISSO NEL TEMPO}}$.

QUINDI $\underline{V}_O = 0 \Rightarrow O \in a(t)$ O ASSE DI ISTANTANEA ROTAZIONE

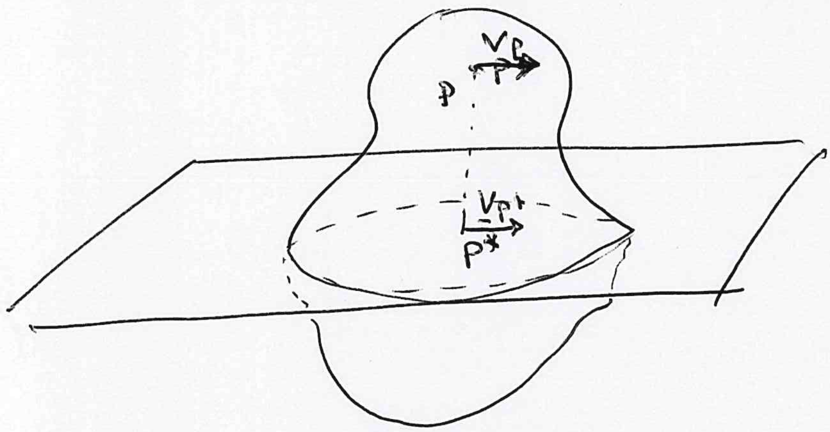
(I PUNTI HANNO MODULO MINIMO DELLA VELOCITÀ, QUINDI $\underline{V}_O = 0$ $\} \Rightarrow O \in a(t)$

$$\boxed{\underline{V}_P} = \underbrace{\underline{V}_O}_{0} + \underline{\omega} \wedge (P - O) = \boxed{\underline{\omega} \wedge (P - O)}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL MOTO RIGIDO SFERICO

"MOTO RIGIDO PIANO"

IL MOTO CONTINUO DI UN SISTEMA S SI DICE "RIGIDO PIANO" SE $\exists$ UN PIANO SOLIDALE CON S CHE SIA COSTANTEMENTE SOVRAPPOSTO AD UN PIANO FISSO DETTO "PIANO DIRETTORE".



SIA $P \in S$ E SIA P^* LA SUA PROIEZIONE SUL PIANO SOLIDALE SOVRAPPOSTO AL PIANO DIRETTORE.

($\underline{V}_P$ E $\underline{V}_{P^*}$ HANNO DIREZIONE PARALLELA AL PIANO DIRETTORE.)

IN QUESTO CASO $\boxed{\underline{V}_P = \underline{V}_{P^*}}$ DA CUI CONSIDERANDO LA TEORIA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI

$$\underline{V}_P = \underline{V}_{P^*} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge (P - P^*)}_{0} \Rightarrow \boxed{\underline{\omega} \wedge (P - P^*) = 0}$$

DALLA CONDIZIONE $\underline{\omega} \wedge (P - P^*) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{\omega} = K (P - P^*)}$

POTREMO AVERE, QUINDI, DUE CASI:

A) $K = 0 \Rightarrow \underline{\omega} = 0 \Rightarrow$ MOTO DI ISTANTANEA TRASLAZIONE

B) $K \neq 0 \Rightarrow \underline{\omega} = K (P - P^*)$ QUINDI $\underline{\omega} \perp \underline{V}_P , \underline{V}_{P^*}$

CONSIDERANDO L'INVARIANTE SCALARE

$$I_s = \underline{V}_P \cdot \underline{\omega} = 0 \quad \text{MA} \quad I_s = \tau \omega = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{\tau} = 0}$$

QUINDI UN MOTO DI "ISTANTANEA ROTAZIONE"

NEL CASO IN CUI CONSIDERIAMO L'ASSE DI ISTANTANEA ROTAZIONE AVREMO (NEL PUNTO DI INTERSEZIONE CON IL PIANO DIRETTORE) UN CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE C_t^* DA CUI

$$\underline{V}_P = \underline{\omega} \wedge (P - C_t^*)$$

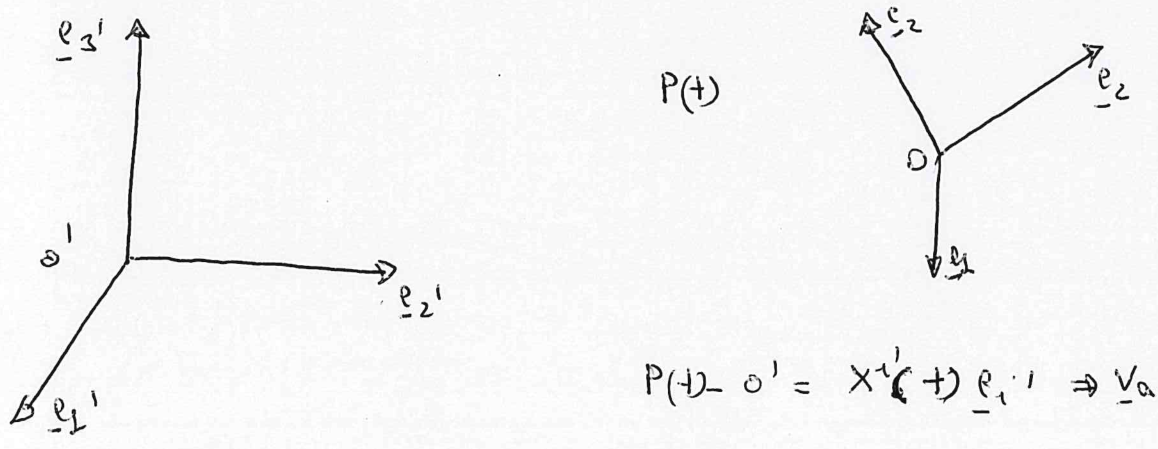
— o —

MOTI RELATIVI

RIFERIMENTO FISSO ⇒ "ASSOLUTO" $\{ O', \underline{e}_i' \}$

RIFERIMENTO MOBILE "RELATIVO" $\{ O, \underline{e}_i \}$

[STUDIAMO IL MOTO DI UN PUNTO P(t) VALUTATO RISPETTO AI DUE DIVERSI RIFERIMENTI]



$$P(t) - O' = x_i'(t)\, \underline{e}_i' \Rightarrow \underline{V}_a = \frac{dP}{dt} = \frac{dx_i'}{dt} \underline{e}_i'$$

CONSIDERIAMO IL VETTORE $P(t) - O(t)$ VISTO DA UN OSSERVATORE SOLIDALE CON IL RIF. "ASSOLUTO" E CALCOLIAMO LA SUA DERIVATA TEMPORALE, ESSENDO $\boxed{P(t) - O(t) = x^i(t)\, \underline{e}_i(t)}$

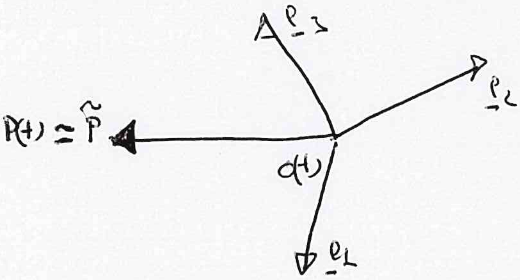
$$\underbrace{\frac{dP(t)}{dt}}_{\underline{V}_a(P)} - \frac{dO(t)}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\underline{e}_i + x^i \frac{d\underline{e}_i}{dt}$$

DA CUI:

$$\underline{V}_a(P) = \dot{\underline{O}}(t) + \underbrace{\dot{x}^i \underline{e}_i}_{V_r(P)} + x^i \dot{\underline{e}}_i$$

$$V_\tau(P)$$

DEF. DEFINIAMO "VELOCITA' DI TRASCINAMENTO" ED "ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO", LA VELOCITA ED L'ACCELERAZIONE DI UN PUNTO $\tilde{P}$ CONSIDERATO COME SOLIDALE AL RIFERIMENTO RELATIVO, SU CUI ALL'ISTANTE t STA TRANSITANDO IL PUNTO $P(t)$.



$$\underline{V}_\tau(P) = \frac{d\hat{P}}{dt} = \dot{\underline{O}}(t) + x^i \dot{\underline{e}}_i(t)$$

QUINDI DALLA TEORIA DEI MOTI RELATIVI

$$\boxed{\underline{V}_a(P) = \underline{V}_r(P) + \underline{V}_\tau(P)}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_r(P) = \dot{x}^i \underline{e}_i \\ \underline{V}_\tau(P) = \dot{\underline{O}}(t) + x^i \dot{\underline{e}}_i(t) \end{cases}$$

TEOREMA DI CORIOLIS:

$$\boxed{\underline{a}_a(P) = \underline{a}_r(P) + \underline{a}_\tau(P) + \underline{a}_c(P)}$$

INFATTI:

$$\underline{a}_a(P) = \frac{d\,\underline{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ \dot{\underline{O}}(t) + \dot{x}^i \underline{e}_i + x^i \dot{\underline{e}}_i \right\} =$$

$$= \ddot{\underline{O}}(t) + \ddot{x}^i \underline{e}_i + \dot{x}^i \dot{\underline{e}}_i + \dot{x}^i \dot{\underline{e}}_i + x^i \ddot{\underline{e}}_i =$$

$$= \underbrace{\ddot{x}^i \underline{e}_i}_{\underline{a}_r(P)} + \underbrace{\left[\ddot{\underline{O}}(t) + x^i \ddot{\underline{e}}_i \right]}_{\underline{a}_\tau(P)} + \underbrace{2\, \dot{x}^i \dot{\underline{e}}_i}_{\underline{a}_c(P)}$$

OSSERVO CHE: $\boxed{\underline{a}_c = 2\dot{x}^i \dot{\underline{e}}_i} = 2\dot{x}^i(\underline{\omega} \wedge \underline{e}_i) = 2\,\underline{\omega} \wedge (\underbrace{\dot{x}^i \underline{e}_i}_{\underline{v}_r(P)})$

$$= \boxed{2\,\underline{\omega} \wedge \underline{v}_r(P)}$$

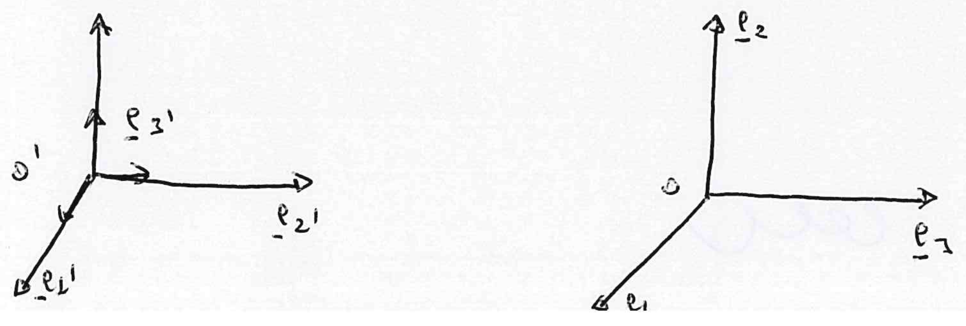
QUINDI:

$$\boxed{\underline{a}_a(P) = \underline{a}_r(P) + \underline{a}_\tau(P) + \underline{a}_c(P)}$$ CON

$$\begin{cases} \underline{a}_r(P) = \ddot{x}^i \underline{e}_i \\ \underline{a}_\tau(P) = \ddot{\underline{O}}(t) + x^i \ddot{\underline{e}}_i \\ \underline{a}_c(P) = 2\,\dot{x}^i \dot{\underline{e}}_i = 2\,\underline{\omega} \wedge \underline{v}_r(P) \end{cases}$$

"MOTO DI TRASCINAMENTO TRASLATORIO"

CONSIDERIAMO DUE RIFERIMENTI, CHE PER **PURA** CONVENZIONE, DEFINIREMO "ASSOLUTO" E "RELATIVO" CHE SI **MUOVONO** UNO RISPETTO ALL'ALTRO DI MOTO TRASLATORIO UNIFORME.



IN QUESTO CASO DIREMO CHE I 2 RIFERIMENTI SONO UNO RISPETTO ALL'ALTRO "INERZIALI".

TEOREMA:

C.N.S AFFINCHE' DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO SIANO RECIPROCAMENTE INERZIALI E CHE $\underline{a}_a = \underline{a}_r$

DIM: Hp I DUE RIFERIMENTI SONO RECIPROCAMENTE INERZIALI

TS. $\underline{a}_a(P) = \underline{a}_r(P)$

DALLA Hp. I DUE RIFERIMENTI SI MUOVONO, UNO RISPETTO ALL'ALTRO, DI MOTO TRASLATORIO UNIFORME, QUINDI $\boxed{\underline{\omega}_\tau = 0}$ DA CUI GLI ASSI SI MUOVONO SEMPRE PARALLELAMENTE A SE STESSI, ESSENDO

$$\boxed{\dot{\underline{e}}_i = \underline{\omega}_\tau \wedge \underline{e}_i = 0}$$

QUINDI $\underline{a}_c(P) = 2\underline{\omega}_\tau \wedge \underline{v}_r(P) = 0$ E ANALOGAMENTE

$$\underline{a}_\tau(P) = \ddot{\underline{O}}(t) + \underbrace{x^i \ddot{\underline{e}}_i}_{=0} = \ddot{\underline{O}}(t)$$

MA ESSENDO IL MOTO "UNIFORME" $\dot{O}(t) = \text{COSTANTE} \Rightarrow \ddot{\underline{O}}(t) = 0 \Rightarrow \underline{a}_\tau(P) = 0$

QUINDI LA TESI $\boxed{\underline{a}_a = \underline{a}_r(P)}$

VICEVERSA: Hp $\underline{a}_a = \underline{a}_r(P)$ TS IL MOTO E' TRASLATORIO UNIFORME

DALLA Hp: $\underline{a}_\tau(P) + \underline{a}_c(P) = 0$

IN PARTICOLARE CONSIDERIAMO UN PUNTO P SOLIDALE CON IL RIF. RELATIVO $\Rightarrow \underline{v}_r(P) = 0 \Rightarrow \underline{a}_c(P) = 2\underline{\omega}_\tau \wedge \underline{v}_r(P) = 0 \Rightarrow \underline{a}_\tau(P) = 0$

MA SE $\underline{a}_\tau(P) = 0$ PER UN PUNTO SOLIDALE ALLORA AVREMO CHE $\boxed{\underline{a}_\tau(P) = 0}$ SEMPRE PER $\forall P$ (ANCHE QUELLI NON SOLIDALI) IN QUANTO LA $\underline{a}_\tau(P)$ NON DIPENDE DA $\underline{v}_r(P)$ QUINDI SE E' NULLA PER I PUNTI SOLIDALI SARA NULLA SEMPRE $\forall P$.

ESSENDO $\underline{a}_\tau(P) = 0$ $\forall P \Rightarrow \boxed{\underline{a}_c(P) = 2\underline{\omega}_\tau \wedge \underline{v}_r(P) = 0}$ $\forall P \Rightarrow \boxed{\underline{\omega}_\tau = 0}$

QUINDI $\boxed{\text{SE } \underline{\omega}_\tau = 0}$ $\Rightarrow$ $\dot{\underline{e}}_i = \underline{\omega}_\tau \wedge \underline{e}_i = 0$

DA CUI GLI ASSI $\{\underline{e}_i\}$ SI MUOVONO PARALLELAMENTE A SE STESSI.

CIOÈ IL MOTO È TRASLATORIO.

INOLTRE ESSENDO $\underline{a}_\tau(P) = \ddot{\underline{O}}(t) + \underbrace{x^i \ddot{\underline{e}}_i}_{0} = \ddot{\underline{O}}(t) = 0$

AVREMO CHE $\dot{\underline{O}}(t) =$ COSTANTE QUINDI IL MOTO RELATIVO DEI DUE RIFERIMENTI È "TRASLATORIO UNIFORME"

CIOÈ I DUE RIFERIMENTI SONO "RECIPROCAMENTE INERZIALI".

— o —

NOTA:

OSSERVO CHE NEL CASO DI MOTO TRASLATORIO ($\dot{e}_i = 0$)

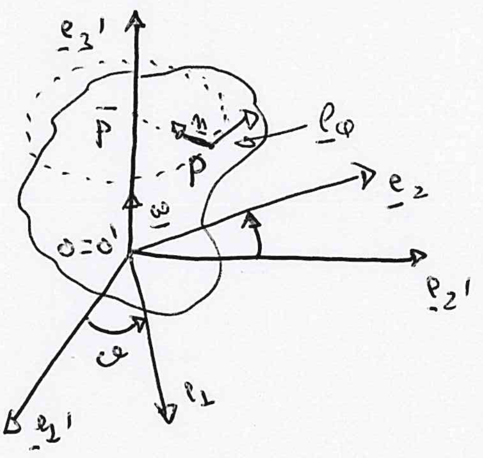
$$\underline{a}_\tau(P) = \ddot{\underline{O}}(t) \qquad \text{(TRASLATORIO NON UNIFORME)}$$

SE $\ddot{\underline{O}}(t) = 0$ IL MOTO È TRASLATORIO UNIFORME

— o —

"MOTO DI TRASCINAMENTO ROTATORIO"

CALCOLO DELLA ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO



$$\underline{a}_\tau(P) = \cancel{\ddot{\underline{O}}(t)} + x^i \ddot{\underline{e}}_i$$

MA $\dot{\underline{e}}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{e}_i$ DA CUI

$$\underline{a}_\tau(P) = x^i [\dot{\underline{\omega}} \wedge \underline{e}_i + \underline{\omega} \wedge \dot{\underline{e}}_i] =$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (x^i \underline{e}_i) + x^i \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{e}_i) =$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge \underbrace{(x^i \underline{e}_i)}_{(P-O)} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underbrace{x^i \underline{e}_i}_{(P-O)})$$

$$\underline{a}_\tau(P) = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) + \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge (P-O)] =$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) - [\underline{\omega} \wedge (P-O)] \wedge \underline{\omega} =$$

$$\underline{a}_\tau(P) = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-O) - (\underline{\omega}\cdot\underline{\omega})(P-O) + [\underline{\omega}\cdot(P-O)]\,\underline{\omega}$$

PONIAMO $(P-O) = (P-\bar{P}) + (\bar{P}-O)$ DA CUI

$$\underline{a}_\tau(P) = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) + \underbrace{\dot{\underline{\omega}} \wedge (\bar{P}-O)}_{\overset{\shortparallel}{0}} -$$

PERCHÉ $\dot{\underline{\omega}} \uparrow\uparrow (\bar{P}-O)$

$$-\underline{\omega}^2(P-\bar{P}) - \underline{\omega}^2(\bar{P}-O) + [\underbrace{\underline{\omega}\cdot(P-\bar{P})}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underline{\omega}\cdot(\bar{P}-O)]\,\underline{\omega}$$

$\underline{\omega} \perp (P-\bar{P})$

DA CUI

$$\underline{a}_\tau(P) = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) - \omega^2(P-\bar{P}) - \cancel{\omega^2(\bar{P}-O)} + \cancel{[\underline{\omega}\cdot(\bar{P}-O)]\,\underline{\omega}}$$

UGUALI MA OPPOSTI

QUINDI

$$\boxed{\underline{a}_\tau(P) = \underbrace{\dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P})}_{\underline{a}_\tau^{(N.UNIF)}} - \underbrace{\omega^2(P-\bar{P})}_{\underline{a}_\tau^{(CENTRIPETA)}}}$$

$\underline{a}_\tau^{(N.U.)} = \dot{\underline{\omega}} \wedge (P-\bar{P}) = \dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{e}_\alpha$ ← (COMPONENTE TANGENZIALE ALLA CIRCONFERENZA IN FIGURA)

$$\underline{a}_\tau = \dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{e}_\alpha \underbrace{-\,\omega^2(P-\bar{P})}_{\omega^2|P-\bar{P}|\,\underline{n}} = \dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{e}_\alpha + \omega^2|P-\bar{P}|\,\underline{n}$$

($\underline{n}$ NORMALE, VEDI FIGURA)

LO STESSO RISULTATO SI PUÒ OTTENERE IN ALTRO MODO

$\underline{e}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$

$\underline{e}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

$\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{e}}_1 = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)\,\dot{\alpha} = \dot{\alpha}\,\underline{e}_2 \\ \dot{\underline{e}}_2 = (-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)\,\dot{\alpha} = -\dot{\alpha}\,\underline{e}_1 \\ \dot{\underline{e}}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\underline{e}}_1 = \ddot{\theta}\,\underline{e}_2 + \dot{\theta}\,\dot{\underline{e}}_2 = \ddot{\theta}\,\underline{e}_2 - \dot{\theta}^2\,\underline{e}_1 \\ \ddot{\underline{e}}_2 = -\ddot{\theta}\,\underline{e}_1 - \dot{\theta}\,\dot{\underline{e}}_1 = -\ddot{\theta}\,\underline{e}_1 - \dot{\theta}^2\,\underline{e}_2 \end{cases}$$

DA CUI

$$\underline{a}_\tau(P) = x\,\ddot{\underline{e}}_1 + y\,\ddot{\underline{e}}_2 = x\left(\ddot{\theta}\,\underline{e}_2 - \dot{\theta}^2\,\underline{e}_1\right) + y\left(-\ddot{\theta}\,\underline{e}_1 - \dot{\theta}^2\,\underline{e}_2\right) =$$

$$= \underset{\overset{\uparrow}{\dot{\omega}}}{\ddot{\theta}}\,\underbrace{\left[x\,\underline{e}_2 - y\,\underline{e}_1\right]}_{|P-\bar{P}|\,\underline{e}_a} - \underbrace{\dot{\theta}^2}_{\omega^2}\,\underbrace{\left(x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2\right)}_{(P-\bar{P})}$$

DA CUI $\boxed{\underline{a}_\tau(P) = \dot{\omega}\,|P-\bar{P}|\,\underline{e}_a - \omega^2(P-\bar{P})}$

NOTA:

PROVIAMO CHE $\boxed{|P-\bar{P}|\,\underline{e}_a = x\,\underline{e}_2 - y\,\underline{e}_1}$

RICORDIAMO CHE $\underline{e}_a = t_x\,\underline{e}_1 + t_y\,\underline{e}_2$ CON $\begin{cases} \underline{e}_a \cdot \underline{e}_a = 1 \\ (P-\bar{P}) \cdot \underline{e}_a = 0 \end{cases}$

DA CUI:

$$\underline{e}_a \cdot \underline{e}_a = t_x^2 + t_y^2 = 1$$

$$\underline{e}_a \cdot (P-\bar{P}) = t_x\,x + t_y\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{y^2}{x^2}\,t_y^2 + t_y^2 = 1 \\ t_x = -\frac{y}{x}\,t_y \end{cases} \quad (x \neq 0)$$

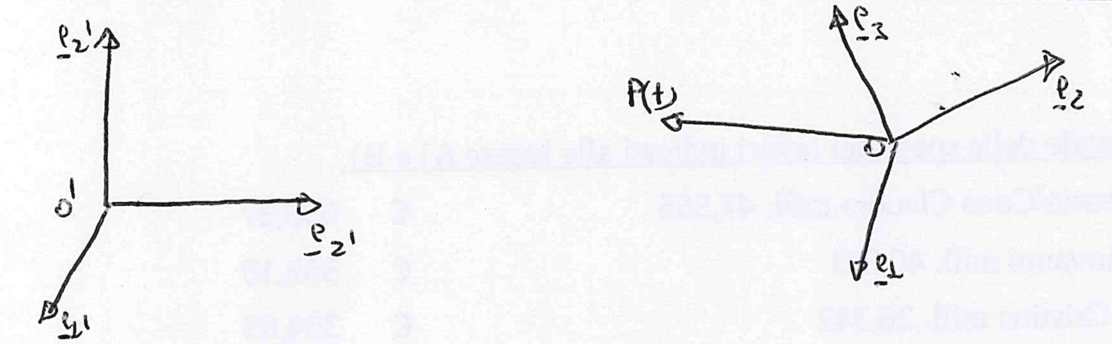
DA CUI:

$$\begin{cases} t_y^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} \\ t_x = -\frac{y}{x}\,t_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_y = \pm\frac{x}{|P-\bar{P}|} \\ t_x = \mp\frac{y}{|P-\bar{P}|} \end{cases}$$

QUINDI SCEGLIENDO $t_x = -\frac{y}{|P-\bar{P}|}$ $t_y = \frac{x}{|P-\bar{P}|}$ AVREMO

$$\underline{e}_a = \frac{1}{|P-\bar{P}|}\left[x\,\underline{e}_2 - y\,\underline{e}_1\right] \Rightarrow \boxed{x\,\underline{e}_2 - y\,\underline{e}_1 = |P-\bar{P}|\,\underline{e}_a}$$

DERIVATA ASSOLUTA E DERIVATA RELATIVA DI UN VETTORE



Consideriamo il vettore $\underline{u} = P(t) - O(t)$ visto dal riferimento assoluto $\{O', \underline{e}_i'\}$

$$\frac{d_a \underline{u}}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{dO}{dt} = \underline{V}_a(P) - \underline{V}_\tau(O) \qquad (1)$$

Analogamente consideriamo la derivata relativa (cioè valutata rispetto ad un osservatore solidale con il rif relativo $\{O, \underline{e}_i\}$

$$\frac{d_r \underline{u}}{dt} = \underline{V}_r(P) \qquad (2)$$

da cui sottraendo membro a membro

$$\frac{d_a \underline{u}}{dt} - \frac{d_r \underline{u}}{dt} = \underline{V}_a(P) - \underline{V}_r(P) - \underline{V}_\tau(O)$$

Ma dal teorema dei moti relativi

$$\underline{V}_a(P) - \underline{V}_r(P) = \underline{V}_\tau(P)$$

Quindi

$$\frac{d_a \underline{u}}{dt} - \frac{d_r \underline{u}}{dt} = \underline{V}_\tau(P) - \underline{V}_\tau(O) = \underline{\omega}_\tau \wedge (P-O)$$
$$= \underline{\omega}_\tau \wedge \underline{u}$$

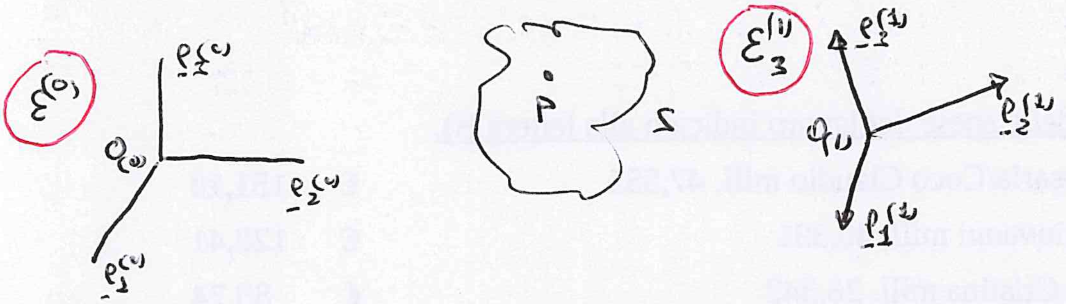
Quindi

$$\boxed{\frac{d_a \underline{u}}{dt} = \frac{d_r \underline{u}}{dt} + \underline{\omega}_\tau \wedge \underline{u}}$$

Le due derivate coincidono solo nel caso dei moti traslatori ($\underline{\omega}_\tau = 0$)

"MOTI COMPOSTI"

CONSIDERIAMO UN RIF. DI ORIGINE $O_{(0)}$ ED ASSI $\underline{e}_i^{(0)}$ ASSOCIATO AD UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE $\mathcal{E}_3^{(0)}$



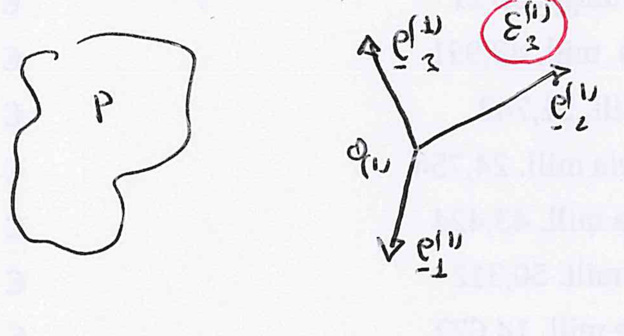
CONSIDERIAMO UN ALTRO RIF. "RELATIVO" $\{O_{(1)}, \underline{e}_i^{(1)}\}$ ASSOCIATO ALLO SPAZIO PUNTUALE AFFINE $\mathcal{E}_3^{(1)}$

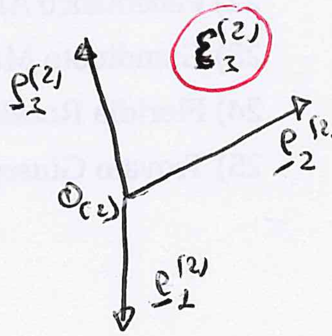
E CONSIDERIAMO I PUNTI DI UN SISTEMA Σ RISPETTO AI DUE RIFERIMENTI (O AI DUE SPAZI). SIA P ∈ Σ DAL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI AVREMO

$$\underbrace{\underline{V}_{(0)}(P)}_{\underline{V}_a(P)} = \underbrace{\underline{V}_1(P)}_{\underline{V}_2(P)} + \underbrace{\underline{V}_\tau^{1/0}(P)}_{\underline{V}_\tau(P)} \qquad (1)$$

$\underline{V}_\tau(P)$ DI TRASCINAMENTO DEL RIF. (1) RISPETTO AL RIF. (0)

CONSIDERIAMO ADESSO UN TERZO RIFERIMENTO $\{O_{(2)}, \underline{e}_i^{(2)}\}$ (DIMENTICHIAMOCI DEL 1° RIFERIMENTO) ASSOCIATO ALLO SPAZIO $\mathcal{E}_3^{(2)}$



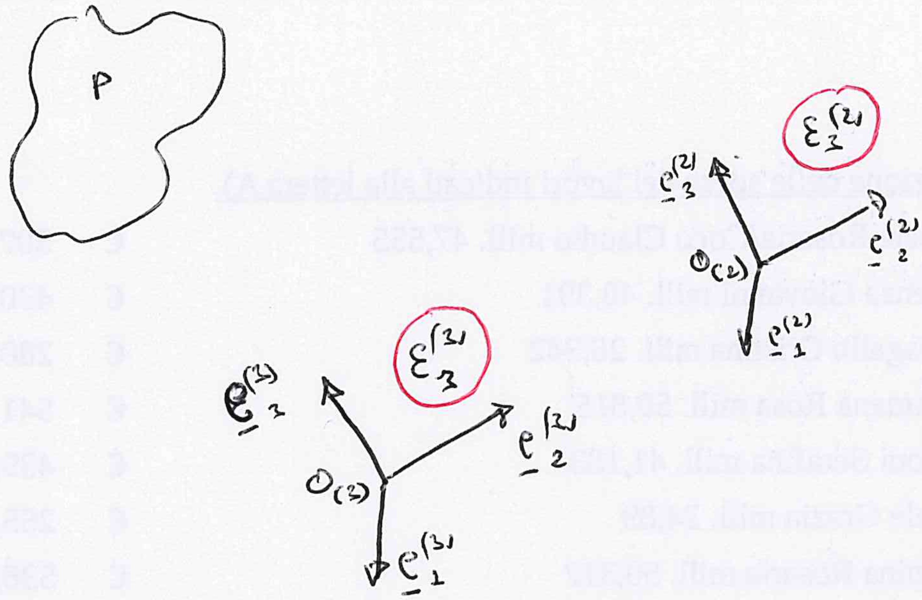


ED APPLICHIAMO IL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI RISPETTO AI DUE RIF. $\{O_{(1)}, \underline{e}_i^{(1)}\}$ (CONSIDERATO COME ASSOLUTO) ED $\{O_{(2)}, \underline{e}_i^{(2)}\}$ (CONSIDERATO COME RELATIVO)

$$\underline{V}_{(1)}(P) = \underline{V}_2(P) + \underline{V}_\tau^{2/1}(P) \qquad (2)$$

VELOCITA' DI TRASCINAMENTO DEL RIF. (2)

Possiamo così procedere fino a considerare un 4° riferimento $\{O_{(3)}, \underline{e}_i^{(3)}\}$ associato allo spazio $\mathcal{E}_3^{(3)}$



Per cui

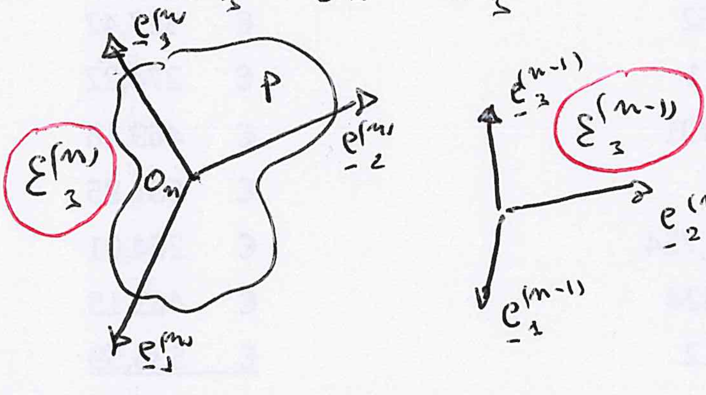
$$\underline{V}_{(2)}(P) = \underline{V}_3(P) + \underline{V}_{\tau\,(3)}^{3|2}(P)$$

velocità di trascinamento del rif. (3) rispetto al riferimento (2).

velocità relativa di P rispetto $\{O_{(3)}, \underline{e}_i^{(3)}\}$

Possiamo così procedere fino ai due riferimenti associati agli spazi $\mathcal{E}_3^{(n)}$ e $\mathcal{E}_3^{(n-1)}$

Per cui



In questo caso avremo $\underline{V}_{(n-1)}(P) = \underline{V}_n(P) + \underline{V}_\tau^{n|n-1}(P)$ (4)

Assumendo però che l'ultimo riferimento $\{O_{(n)}, \underline{e}_i^{(n)}\}$ sia solidale con il sistema $\mathcal{S}$ per cui $\boxed{\underline{V}_n(P) = 0}$

(essendo questa la velocità relativa di P rispetto al rif. solidale)

AVREMO COSÌ

$$\underline{V}(P) = \underline{V}_0(P) = \underline{V}_1(P) + \underline{V}_\tau^{1/0}(P)$$

$$\underline{V}_1(P) = \underline{V}_2(P) + \underline{V}_\tau^{2/1}(P)$$

$$\underline{V}_2(P) = \underline{V}_3(P) + \underline{V}_\tau^{3/2}(P)$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1}(P) = \cancel{V_n(P)} + \underline{V}_\tau^{n/n-1}(P)$$

DA CUI SOSTITUENDO SI AVRÀ

$$\boxed{\underline{V}(P) = \sum_{i=1}^{n} \underline{V}_\tau^{i/i-1}(P)}$$

POSSIAMO RIPETERE LO STESSO RAGIONAMENTO PER UN ALTRO PUNTO Q E S ED AVERE

$$\boxed{\underline{V}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \underline{V}_\tau^{i/i-1}(Q)}$$

DA CUI

$$\boxed{\underline{V}(P) - \underline{V}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{V}_\tau^{i/i-1}(P) - \underline{V}_\tau^{i/i-1}(Q)\right]}$$

SE ADESSO CONSIDERIAMO i^{MO} MOTO, PER LA TEORIA DEI CAMPI EQUIPROIETTIVI (ESSENDO P E Q CONSIDERATI SOLIDALI ALL' i^{MO} MOTO)

$$\boxed{\underline{V}_\tau^{i/i-1}(P) - \underline{V}_\tau^{i/i-1}(Q) = \underline{\omega}_\tau^{i/i-1} \wedge (P-Q)}$$

DA CUI SOSTITUENDO

$$\boxed{\underline{V}(P) - \underline{V}(Q) = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_\tau^{i/i-1}\right] \wedge (P-Q)} \qquad (*)$$

D'ALTRA PARTE PER LA TEORIA DEI MOTI RIGIDI AVREMO

$$\boxed{\underline{V}(P) - \underline{V}(Q) = \underline{\omega} \wedge (P-Q)} \qquad (**)$$

DA CUI EGUAGLIANDO LA (*) E LA (**) AVREMO

$$\boxed{\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\omega}_i^{\,i|i-1}}$$

"COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ ANGOLARI"

LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL SISTEMA È DATA DALLA SOMMA DELLE VELOCITÀ ANGOLARI DI TRASCINAMENTO DI TUTTI I MOTI COMPONENTI (PURCHÈ L'ULTIMO RIFERIMENTO SIA CONSIDERATO COME SOLIDALE CON S)

-O~

"ANGOLI DI EULERO"

ABBIAMO VISTO NEL DETERMINARE I GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO RIGIDO CHE

$$x^{i'}(t) = x_0^{i'}(t) + A_i^{i'}(t)\, x^i$$

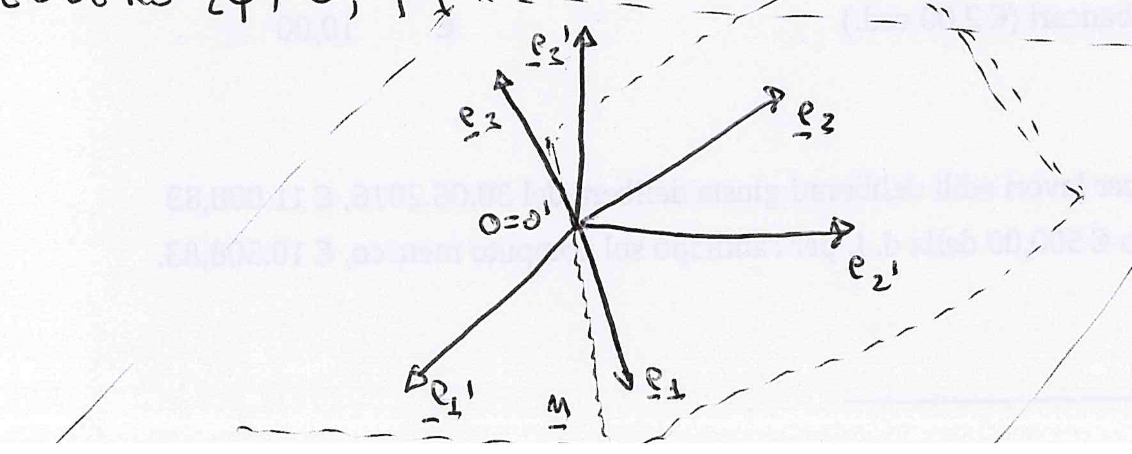
3 GRADI

3 GRADI DI LIBERTÀ (COSENI DIRETTORI O ANCHE GLI ANGOLI DI EULERO)

VOGLIAMO ANCORA VEDERE COME SIA POSSIBILE PASSARE DA UN RIF. FISSO (ASSOLUTO) AD UNO MOBILE (RELATIVO) AVENDO I DUE RIFERIMENTI ORIGINI COINCIDENTI

$\{O', \underline{e}_{i'}\}$ ED $\{O, \underline{e}_i\}$ CON $O = O'$

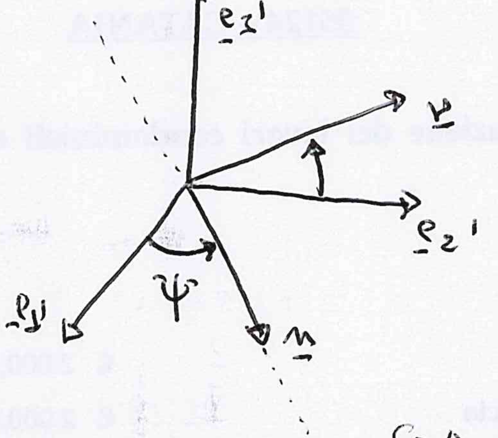
PER MEZZO DI TRE ROTAZIONI DESCRITTE DAI 3 ANGOLI DI EULERO $\{\psi, \theta, \varphi\}$



CONSIDERIAMO LA RETTA CHE NASCE DALLA INTERSEZIONE DEL PIANO CONTENENTE I VETTORI $[\underline{e}_1', \underline{e}_2']$ CON IL PIANO PASSANTE PER GLI ASSI $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ - TALE RETTA SI DIRA' RETTA DEI NODI DI VERSORE $\underline{n}$, CONSIDERIAMO ALLORA LE 3 ROTAZIONI

1) LA ROTAZIONE DI UN ANGOLO ψ ATTORNO $\underline{e}_3'$

IN MODO DA PORTARE $\underline{e}_1' \to \underline{n}$ ED $\underline{e}_2' \to \underline{\nu}$ (ORTOGONALE AD $\underline{n}$)



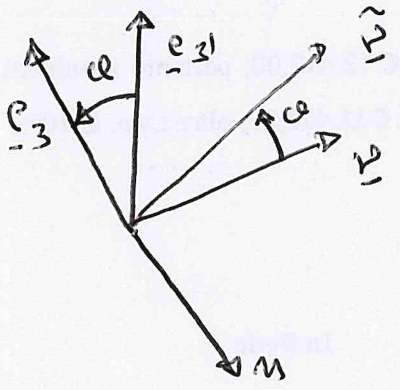
AVREMO COSI'

$$\begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\nu} \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix}$$

$$\text{CON } A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) LA ROTAZIONE DI UN ANGOLO θ ATTORNO AD $\underline{n}$

IN MODO DA PORTARE $\underline{e}_3' \to \underline{e}_3$ E $\underline{\nu} \to \tilde{\underline{\nu}}$

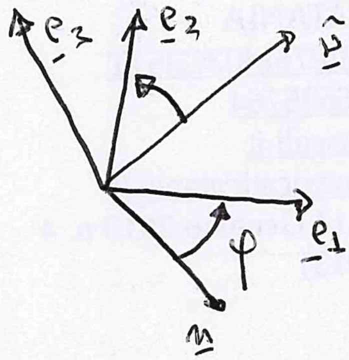


$$\begin{pmatrix} \underline{n} \\ \tilde{\underline{\nu}} \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\nu} \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix}$$

$$\text{CON } A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3) LA ROTAZIONE DI UN ANGOLO φ ATTORNO AD $\underline{e}_3$

IN MODO PORTARE $\underline{n} \to \underline{e}_1$ e $\underline{\tilde{\nu}} \to \underline{e}_2$



$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\tilde{\nu}} \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{CON } A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AVREMO COSÌ

$$\boxed{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \overbrace{A_\varphi A_\theta A_\psi}^{A(\varphi,\theta,\psi)} \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix}}$$

ESSENDO $\boxed{A(\varphi,\theta,\psi) = A_\varphi A_\theta A_\psi}$

QUINDI TRAMITE I 3 ANGOLI DI EULERO PASSIAMO DAL RIF. FISSO (ASSOLUTO) AL RIF. MOBILE (RELATIVO) AVENTI LE ORIGINI COINCIDENTI.

IN PARTICOLARE SE CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO FINALE $\{O, \underline{e}_i'\}$ COME SOLIDALE CON UN DATO SISTEMA S E VOGLIAMO CALCOLARE LA VELOCITÀ ANGOLARE $\underline{\omega}$ DI S RISPETTO AD UN ASSE CHE NON NECESSARIAMENTE COINCIDE CON UNO DEGLI ASSI DEL RIF. $\{O, \underline{e}_i\}$ ed $\{O, \underline{e}_i'\}$ AVREMO PER LA COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ ANGOLARI

$$\underline{\omega} = \dot{\psi}\, \underline{e}_3' + \dot{\theta}\, \underline{n} + \dot{\varphi}\, \underline{e}_3 \quad \leftarrow \text{(TEORIA DEI MOTI COMPOSTI)}$$

POSSIAMO VALUTARE $\underline{\omega}$ NELLE DUE DIVERSE BASI $\{O, \underline{e}_{i'}\}$ ED $\{O, \underline{e}_i\}$ PROIETTANDOCI IN ESSE

Cioè: $\underline{\omega} = \omega^{i'} \underline{e}_{i'}$ OPPURE $\underline{\omega} = \omega^{i} \underline{e}_{i}$

$[\text{SE } \underline{V} = V^{\alpha} \underline{e}_{\alpha} \Rightarrow \underline{V} \cdot \underline{e}_{\beta} = V^{\alpha} \underline{e}_{\alpha} \cdot \underline{e}_{\beta} = V^{\alpha} \delta_{\alpha\beta} = V^{\beta}]$ ← (METRICA $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)

DOVE:
$$\omega^{i'} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{i'} = \dot{\psi}\,(\underline{e}_{3'} \cdot \underline{e}_{i'}) + \dot{\theta}\,(\underline{n} \cdot \underline{e}_{i'}) + \dot{\varphi}\,(\underline{e}_{3} \cdot \underline{e}_{i'})$$

$$\omega^{i} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{i} = \dot{\psi}\,(\underline{e}_{3'} \cdot \underline{e}_{i}) + \dot{\theta}\,(\underline{n} \cdot \underline{e}_{i}) + \dot{\varphi}\,(\underline{e}_{3} \cdot \underline{e}_{i})$$

ESPLICITIAMO QUESTO CALCOLO:

CALCOLIAMO PRIMA DI TUTTO (ALMENO PARZIALMENTE) LA MATRICE $A(\varphi, \theta, \psi) = A_\varphi A_\theta A_\psi$. VALUTIAMO INIZIALMENTE LA QUANTITÀ $A_\theta A_\psi$

$$A_\theta A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\cos\theta\,\operatorname{sen}\psi & \cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

QUINDI SE CALCOLIAMO $A_\varphi A_\theta A_\psi$ AVREMO:

$$A = \begin{pmatrix} - & - & \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ - & - & -\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(NOTA: CI INTERESSANO AI FINI DEL CALCOLO SOLO LA 3ª RIGA E LA 3ª COLONNA DELLA MATRICE A.)

PER VALUTARE ω^i DOBBIAMO ESPRIMERE

$\boxed{\underline{e}_3' \text{ IN FUNZIONE DEI VETTORI } \underline{e}_i}$

$\boxed{\underline{n} \quad '' \quad '' \quad '' \quad \underline{e}_i}$

DALLA RELAZIONE FINALE

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \underline{e}_3' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

DOVE

$$A^T = \begin{pmatrix} & & \sin\theta \sin\psi \\ & & -\sin\theta \cos\psi \\ \sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$\boxed{\underline{e}_3' = (\sin\varphi \sin\theta)\, \underline{e}_1 + (\cos\varphi \sin\theta)\, \underline{e}_2 + \cos\theta\, \underline{e}_3}$$

DA CUI

$$\boxed{\underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 = \sin\varphi \sin\theta \; ; \quad \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_2 = \cos\varphi \sin\theta \; ; \quad \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_3 = \cos\theta}$$

ANALOGAMENTE DALLA RELAZIONE

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\tilde{\nu}} \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{\tilde{\nu}} \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = A_\varphi^T \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$\begin{pmatrix} \underline{n} \\ \hat{\nu} \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{n} = \cos\varphi\, \underline{e}_1 - \sin\varphi\, \underline{e}_2}$$

DA CUI

$$\boxed{\underline{n} \cdot \underline{e}_1 = \cos\varphi \qquad \underline{n} \cdot \underline{e}_2 = -\operatorname{sen}\varphi \qquad \underline{n} \cdot \underline{e}_3 = 0}$$

AVREMO QUINDI:

$$\begin{cases} \omega^1 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_1 = \dot{\psi} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega^2 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_2 = \dot{\psi} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta - \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi \\ \omega^3 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_3 = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

ANALOGAMENTE

PER VALUTARE $\boxed{\omega^{i'}}$ DOBBIAMO ESPRIMERE

$\underline{n}$ IN FUNZIONE DEI VETTORI $\underline{e}_{i'}$

$\underline{e}_3$ " " " " $\underline{e}_{i'}$

DALLA RELAZIONE

$$\begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{v} \\ \underline{e}_{3'} \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \underline{e}_{2'} \\ \underline{e}_{3'} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{n} = \cos\psi \, \underline{e}_{1'} + \operatorname{sen}\psi \, \underline{e}_{2'}}$$

DA CUI

$$\boxed{\underline{n} \cdot \underline{e}_{1'} = \cos\psi \; ; \; \underline{n} \cdot \underline{e}_{2'} = \operatorname{sen}\psi \; ; \; \underline{n} \cdot \underline{e}_{3'} = 0}$$

DALLA RELAZIONE

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & \vdots \\ - & - & \vdots \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\theta \cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \underline{e}_{2'} \\ \underline{e}_{3'} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{e}_3 = (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi)\, \underline{e}_{1'} + (-\operatorname{sen}\theta \cos\psi)\, \underline{e}_{2'} + \cos\theta \, \underline{e}_{3'}}$$

DA CUI:

$$\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_{1'} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \; ; \; \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_{2'} = -\operatorname{sen}\theta \cos\psi \; ; \; \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_{3'} = \cos\theta$$

QUINDI DALLA RELAZIONE:

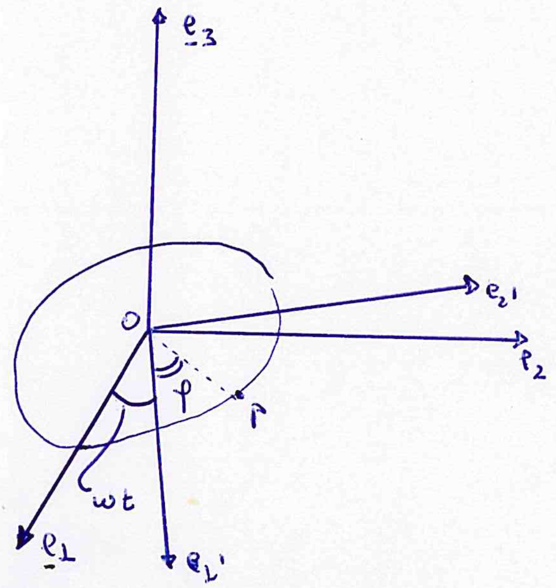
$$\boxed{\omega^{1'} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{1'} = \dot{\psi}\,(\underline{e}_{3'} \cdot \underline{e}_{1'}) + \dot{\theta}\,(\underline{n} \cdot \underline{e}_{1'}) + \dot{\varphi}\,(\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_{1'})}$$

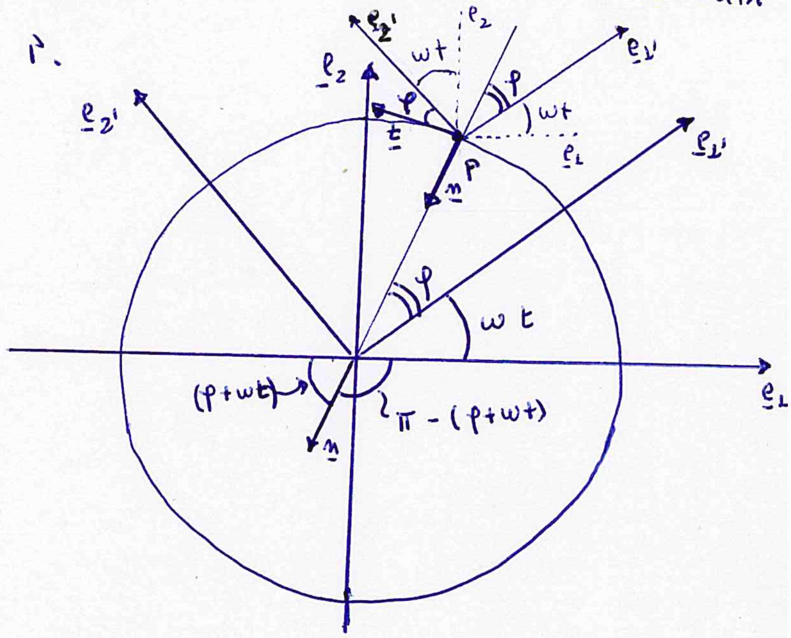
AVREMO:

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^{1'} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{1'} = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \\ \omega^{2'} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{2'} = \dot{\theta} \operatorname{sen}\psi - \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi \\ \omega^{3'} = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_{3'} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{cases}$$

UN PUNTO P SI MUOVE SU UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO R, LA QUALE A SUA VOLTA RUOTA "UNIFORMEMENTE" IN SENSO ANTIORARIO, CON VELOCITA' ANGOLARE $\underline{\omega}$, ATTORNO ALLA RETTA ORTOGONALE, AL PIANO CHE LA CONTIENE, PASSANTE PER O.

DETERMINARE VELOCITA' ED ACCELERAZIONE RELATIVE E VELOCITA' ED ACCELERAZIONI ASSOLUTE DI P.





$$\underline{v}_r = R\dot{\varphi}\,\underline{t} = \dot{x}_{1'}\,\underline{e}_{1'} + \dot{x}_{2'}\,\underline{e}_{2'} + \dot{x}_{3'}\,\underline{e}_{3'}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{1'} = \underline{v}_r \cdot \underline{e}_{1'} = R\dot{\varphi}\,\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_{1'})}_{\cos(\pi/2+\varphi)} = R\dot{\varphi}\cos(\pi/2+\varphi) = -R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \dot{x}_{2'} = \underline{v}_r \cdot \underline{e}_{2'} = R\dot{\varphi}\,\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_{2'})}_{\cos\varphi} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{x}_{3'} = \underline{v}_r \cdot \underline{e}_{3'} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{v}_r = (-R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\underline{e}_{1'} + (R\dot{\varphi}\cos\varphi)\,\underline{e}_{2'}}$$

$$\underline{v}_\tau = \cancel{\dot{O}(t)} + x^i\,\dot{\underline{e}}_i = x^i\,\underline{\omega}_\tau \wedge \underline{e}_i = \underline{\omega}_\tau \wedge (x^i\underline{e}_i) = \underline{\omega}_\tau \wedge (P-O)$$

$$= \omega R\,\underline{t}$$

CONSIDERANDO P COME SOLIDALE AL RIF. MOBILE O ALLA CIRCONFER.

QUINDI $\underline{v}_a = \underline{v}_r + \underline{v}_\tau = R(\dot{\varphi}+\omega)\,\underline{t} = \dot{x}_1\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2\,\underline{e}_2 + \dot{x}_3\,\underline{e}_3$

$$\dot{x}_1 = \underline{v}_a \cdot \underline{e}_1 = R(\dot{\varphi}+\omega)\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_1)}_{\cos[\pi/2+(\varphi+\omega t)]} = R(\dot{\varphi}+\omega)\cos\left[\frac{\pi}{2}+\varphi+\omega t\right]$$

$$= -R(\dot{\varphi}+\omega)\,\mathrm{sen}(\varphi+\omega t)$$

$$\dot{x}_2 = \underline{v}_a \cdot \underline{e}_2 = R(\dot{\varphi}+\omega)\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_2)}_{\cos(\varphi+\omega t)} = R(\dot{\varphi}+\omega)\cos(\varphi+\omega t)$$

$$\dot{x}_3 = \underline{v}_a \cdot \underline{e}_3 = R(\dot{\varphi}+\omega)(\underline{t}\cdot\underline{e}_3) = 0$$

$$\boxed{\underline{v}_a = R(\dot{\varphi}+\omega)\left\{-\mathrm{sen}(\varphi+\omega t)\,\underline{e}_1 + \cos(\varphi+\omega t)\,\underline{e}_2\right\}}$$

Ricordiamo che $\underline{a}_t = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\underline{n}$ con $s = R\varphi$

Da cui $\underline{a}_t = R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + R\dot{\varphi}^2\,\underline{n} = \ddot{x}_{1'}\,\underline{e}_{1'} + \ddot{x}_{2'}\,\underline{e}_{2'} + \ddot{x}_{3'}\,\underline{e}_{3'}$

Da cui. **1)** Possiamo derivare direttamente le $\dot{x}_{i'}$ già calcolate

$$\begin{cases} \ddot{x}_{1'} = -R\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{x}_{2'} = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \ddot{x}_{3'} = 0 \end{cases}$$

2) Oppure possiamo operare come prima:

$$\ddot{x}_{1'} = \underline{a}_t \cdot \underline{e}_{1'} = R\ddot{\varphi}\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_{1'})}_{(-\mathrm{sen}\,\varphi)} + R\dot{\varphi}^2\underbrace{(\underline{n}\cdot\underline{e}_{1'})}_{-\cos\varphi} = -R\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\ddot{x}_{2'} = \underline{a}_t \cdot \underline{e}_{2'} = R\ddot{\varphi}\underbrace{(\underline{t}\cdot\underline{e}_{2'})}_{\cos\varphi} + R\dot{\varphi}^2\underbrace{(\underline{n}\cdot\underline{e}_{2'})}_{\cos(\pi/2+\varphi) = -\mathrm{sen}\,\varphi} = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\ddot{x}_{3'} = \underline{a}_t \cdot \underline{e}_{3'} = 0$$

ANALOGAMENTE PER LA ACCELERAZIONE ASSOLUTA:

$\underline{a}_a = \ddot{x}_1 \underline{e}_1 + \ddot{x}_2 \underline{e}_2 + \ddot{x}_3 \underline{e}_3$ da cui derivando le $\dot{x}_i$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -R\ddot{\varphi} \sin(\varphi+\omega t) - R(\dot{\varphi}+\omega)^2 \cos(\varphi+\omega t) \\ \ddot{x}_2 = R\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\omega t) - R(\dot{\varphi}+\omega)^2 \sin(\varphi+\omega t) \\ \ddot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

oppure $\underline{a}_\tau = R\omega^2 \underline{n}$ (ricordiamo che il moto è uniforme)

$$\underline{a}_c = 2\underline{\omega} \wedge \underline{v}_r = 2\omega\, \underline{e}_3 \wedge R\dot{\varphi}\,\underline{t} = 2R\omega\dot{\varphi}\,(\underbrace{\underline{e}_3 \wedge \underline{t}}_{\underline{n}})$$

da cui

$$\underline{a}_a = \underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c = (R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + R\dot{\varphi}^2\underline{n}) + (R\omega^2\underline{n}) + 2R\omega\dot{\varphi}\,\underline{n}$$

$$= R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + (R\dot{\varphi}^2 + R\omega^2 + 2R\omega\dot{\varphi})\,\underline{n} =$$

$$= R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + R(\dot{\varphi}+\omega)^2\,\underline{n}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \underline{a}_a \cdot \underline{e}_1 = R\ddot{\varphi}\,(\underbrace{\underline{t}\cdot\underline{e}_1}_{-\sin(\varphi+\omega t)}) + R(\dot{\varphi}+\omega)^2(\underbrace{\underline{n}\cdot\underline{e}_1}_{\cos[\pi-(\varphi+\omega t)] = -\cos(\varphi+\omega t)}) \\ \ddot{x}_2 = \underline{a}_a \cdot \underline{e}_2 = R\ddot{\varphi}\,(\underbrace{\underline{t}\cdot\underline{e}_2}_{\cos(\varphi+\omega t)}) + R(\dot{\varphi}+\omega)^2(\underbrace{\underline{n}\cdot\underline{e}_2}_{\cos[\frac{\pi}{2}+(\varphi+\omega t)] = -\sin(\varphi+\omega}) \\ \ddot{x}_3 = \underline{a}_a\, \underline{e}_3 = 0 \end{cases}$$