CU. *Proprietà differenziali delle curve*

Richiamiamo in questa appendice alcune delle proprietà differenziali delle curve, che più frequentemente vengono utilizzate in meccanica classica.

Un curva è un insieme di punti caratterizzabile mediante una funzione vettoriale di una sola variabile $OP(\xi)$, continua, definita su un intervallo reale:

$$OP\ :\ [\,a\,,\,b\,] \longrightarrow R^3 \tag{CU.1}$$

Il vettore $OP = OP(\xi)$ è funzione di un *parametro* ξ che varia nell'intervallo reale $[\,a\,,\,b\,]$.

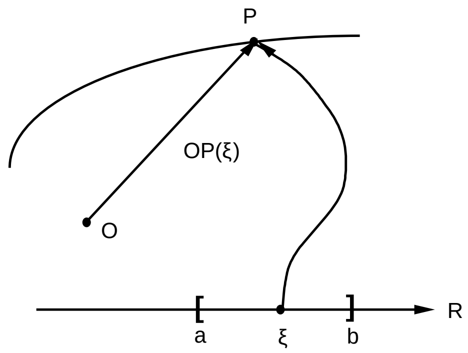

Figura CU. 1: parametrizzazione di una curva

La legge (CU.1) prende il nome di *parametrizzazione* della curva e le equazioni:

$$OP = OP(\xi) \tag{CU.2}$$

che equivalgono, se proiettate sugli assi di un sistema cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3 \equiv Oxyz$, al sistema algebrico:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi) \\ x_2 = x_2(\xi) \\ x_3 = x_3(\xi) \end{cases} \tag{CU.3}$$

si dicono *equazioni parametriche* della curva.

Se $OP(b) = OP(a)$ la curva si dice *chiusa;* in caso contrario si dice *aperta.* Inoltre se $OP(\xi)$ è una funzione differenziabile la curva si dice *differenziabile.* Nel seguito assumiamo di lavorare con curve le cui parametrizzazioni sono differenziabili quante volte si vuole.

La parametrizzazione di una curva non è unica, ma si possono dare infinite parametrizzazioni di una stessa curva, passando dall'una all'altra mediante un cambio di variabile:

$$\varphi : [\,\alpha\,,\,\beta\,] \longrightarrow [\,a\,,\,b\,]\,, \qquad \xi = \varphi(\eta) \tag{CU.4}$$

Si hanno due parametrizzazioni *equivalenti* di una curva, quando si pensa la variabile ξ come funzione di un'altra variabile η, essendo la funzione φ *biunivoca* e differenziabile nei due sensi, e della stessa classe della funzione $OP(\xi)$. Allora si può rappresentare la stessa curva, indifferentemente mediante le equazioni parametriche (CU.2) o le:

$$OP = OP(\eta)$$

Ascissa curvilinea

Su una curva, come su un asse rettilineo, è possibile fissare un'*origine* P_0, un *verso* di percorrenza e un'*unità di misura.* Effettuate queste scelte si dice che si è fissata un'*ascissa curvilinea* sulla curva. Ci si è messi così in grado di misurare la distanza orientata, lungo la curva, di un punto dall'origine della curva stessa.

L'elemento di lunghezza lungo la curva è definito dalla relazione seguente:

$$(ds)^2 = |dP|^2 = dP \times dP = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \tag{CU.5}$$

Ovvero:

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{dx_i}{d\xi}\frac{dx_i}{d\xi}\,(d\xi)^2 \tag{CU.6}$$

Da cui:

$$ds = \pm\sqrt{\frac{dx_i}{d\xi}\frac{dx_i}{d\xi}}\,d\xi \tag{CU.7}$$

dove il segno risulta positivo se s è definita in maniera da risultare crescente quando ξ è crescente, e negativo in caso contrario.

Integrando lungo un cammino finito che parte dall'origine e termina nel generico punto della curva, abbiamo:

$$s(\xi) = \int_\gamma ds = \int_0^\xi ds(\hat{\xi}) \tag{CU.8}$$

essendo γ il tratto della curva lungo il quale si effettua l'integrazione. La variabile s che rappresenta la distanza orientata, lungo la curva, di un punto dall'origine della curva, rappresenta il parametro più naturale da utilizzare per parametrizzare una curva. In questo caso le equazioni parametriche si scrivono in forma vettoriale:

$$OP = OP(s) \tag{CU.9}$$

Ovvero esplicitando le componenti:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(s) \\ x_2 = x_2(s) \\ x_3 = x_3(s) \end{cases} \tag{CU.10}$$

Triedro di Frenet

Versore tangente

Consideriamo due vettori $OP(s)$ e $OP(s + \Delta s)$ che caratterizzano due punti molto vicini di una curva γ parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s, essendo Δs la loro distanza orientata lungo la curva.

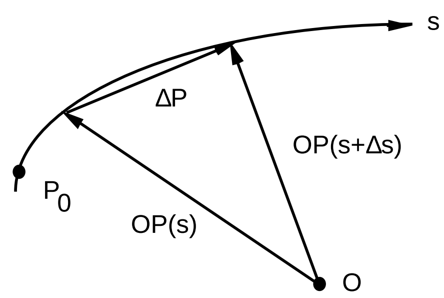

Figura CU. 2: determinazione del versore tangente

La corda:

$$\Delta P = OP(s + \Delta s) - OP(s)$$

tende ad assumere la direzione della retta tangente alla curva in P al tendere di Δs a zero. Di conseguenza il vettore:

$$\frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta s}$$

che esiste, avendo supposto che la curva sia differenziabile, ha la direzione della tangente alla curva in P. Denotiamo tale vettore con $\boldsymbol{T}$ e notiamo che esso è un vettore unitario (versore). Infatti:

$$\boldsymbol{T} = \frac{dP}{ds} \equiv \left(\frac{dx_i}{ds} \right) \tag{CU.11}$$

e quindi si ha:

$$|\boldsymbol{T}|^2 = \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds} \right)^2 = 1$$

grazie alla (CU.5).

Il versore $\boldsymbol{T}$ prende il nome di *versore tangente* alla curva ed è funzione dell'ascissa curvilinea s. Notiamo che $\boldsymbol{T}$ è sempre orientato verso le ascisse (curvilinee) crescenti: infatti ΔP risulta orientato verso le ascisse crescenti se $\Delta s > 0$ e verso le ascisse decrescenti se $\Delta s < 0$; di conseguenza il rapporto incrementale risulta sempre orientato verso le ascisse crescenti e quindi anche il suo limite.

Versore normale principale

Se si deriva ulteriormente la funzione $OP(s)$ si ottengono ulteriori informazioni relative all curva. In particolare si ha:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \tag{CU.12}$$

Il vettore che si ottiene considerando la derivata di un versore, è normale al versore stesso (o al più è nullo). Infatti si ha:

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{T} \times \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$$

Se si eccettua il caso in cui la curva è una retta, o ha un flesso nel punto in esame, esistono e sono unici, in quel punto, un versore $\boldsymbol{N}$ ortogonale a $\boldsymbol{T}$, orientato verso la concavità della curva, e uno scalare C tali che:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = C\,\boldsymbol{N}, \qquad \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} = 0 \tag{CU.13}$$

Il versore $\boldsymbol{N}$ prende il nome di *normale principale* alla curva nel punto considerato e lo scalare C si dice *curvatura principale* della curva in quel punto:

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2} \tag{CU.14}$$

• I versori $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}$ appartengono a un piano che ha un contatto del secondo ordine (almeno) con la curva, che prende il nome di *piano osculatore.*

Infatti se consideriamo l'equazione di un piano, scritta nel formalismo vettoriale:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} + b = 0$$

e imponiamo che questo piano abbia un contatto del secondo ordine con la curva di equazioni parametriche (CU.9), deve annullarsi la funzione:

$$f(s) = \boldsymbol{a} \times OP(s) + b$$

insieme alla sue derivate prima e seconda rispetto ad s; cioè:

$$f(s) = \boldsymbol{a} \times OP(s) + b = 0 \tag{CU.15}$$

$$f'(s) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{T} = 0 \tag{CU.16}$$

$$f''(s) = C\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{N} = 0 \tag{CU.17}$$

Segue allora, se si eccettua il caso $C = 0$ che rappresenta una retta, che $\boldsymbol{a}$ è ortogonale simultaneamente a $\boldsymbol{T}$ e a $\boldsymbol{N}$, dunque il piano passante per P generato dai vettori $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}$ è il piano osculatore alla curva nel punto P.

• La curvatura principale è l'inverso del raggio ρ di una circonferenza che appartiene al piano osculatore e ha con la curva, nel punto considerato, un contatto del secondo ordine (almeno), e che prende il nome di *cerchio osculatore.*

Infatti se consideriamo l'equazione, scritta in forma vettoriale, di una sfera di raggio ρ e centro Q appartenente al piano osculatore:

$$(\boldsymbol{x} - OQ)^2 = \rho^2$$

e imponiamo un contatto del secondo ordine con la curva, deve risultare che la funzione:

$$F(s) = (OP(s) - OQ)^2 - \rho^2$$

e le sue derivate prima e seconda rispetto ad s devono annullarsi; cioè si deve avere:

$$F(s) = (OP(s) - OQ)^2 - \rho^2 = 0 \tag{CU.18}$$

$$F'(s) = 2\,(OP(s) - OQ) \times \boldsymbol{T} = 0 \tag{CU.19}$$

$$f''(s) = 2\,\left[1 + C\,(OP(s) - OQ) \times \boldsymbol{N}\right] = 0 \tag{CU.20}$$

avendo tenuto conto delle informazioni prima ottenute. La (CU.19) ci informa del fatto che il vettore del piano osculatore $OP(s) - OQ$ è ortogonale alla tangente alla curva e quindi è diretto come la normale principale:

$$OP(s) - OQ = \lambda\,\boldsymbol{N}$$

Combinando questo risultato con la (CU.18) e tenendo conto che la normale principale è per definizione diretta verso la concavità della curva, mentre il vettore $QP(s) = OP(s) - OQ$ è diretto in verso opposto, abbiamo l'informazione:

$$OP(s) - OQ = -\rho\,\boldsymbol{N}, \qquad \lambda = -\rho$$

Introducendo queste informazioni nella (CU.20) segue allora:

$$C = \frac{1}{\rho} \tag{CU.21}$$

dove ρ è il raggio del cerchio osculatore.

Versore binormale

Introducendo un terzo versore:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N} \tag{CU.22}$$

che prende il nome di versore *binormale* si ottiene una base ortonormale levogira, legata punto per punto alla proprietà intrinseche della curva, identificabile mediante le sue equazioni parametriche. Questa terna prende il nome di *triedro fondamentale* o *triedro di Frenet.* Il triedro di Frenet rimane indeterminato se la curva è una retta oppure nei punti di flesso della curva.

Noto il triedro di Frenet è possibile scrivere lo sviluppo in serie di Taylor seguente, che identifica, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, i punti della curva nell'intorno di un punto $OP(s)$ assegnato:

$$OP(s+\Delta s) = OP(s) + \frac{dP}{ds}(s)\,\Delta s + \frac{1}{2}\,\frac{d^2P}{ds^2}(s)\,(\Delta s)^2 + \boldsymbol{\mathcal{O}}\left[(\Delta s)^3\right]$$

da cui segue:

$$OP(s+\Delta s) = OP(s) + \boldsymbol{T}(s)\,\Delta s + \frac{1}{2}\,C(s)\,\boldsymbol{N}\,(\Delta s)^2 + \boldsymbol{\mathcal{O}}\left[(\Delta s)^3\right]$$

Torsione e formule di Frenet

La relazione (CU.13) fornisce l'espressione della derivata di $\boldsymbol{T}$ rispetto ad s in termini di C e di $\boldsymbol{N}$. Supposto che la curva sia ulteriormente differenziabile almeno due volte, si possono determinare anche le derivate di $\boldsymbol{N}$ e di $\boldsymbol{B}$ rispetto ad s, ottenendo così un sistema di equazioni differenziali a cui devono soddisfare i vettori del triedro fondamentale.

Partiamo dalla derivata di $\boldsymbol{B}$. Trattandosi di un versore segue subito che la sua derivata è ortogonale a $\boldsymbol{B}$. Ma per l'ortogonalità della base si ha anche:

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \times \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$$

Grazie alla (CU.13) e alla ortogonalità della base, nella precedente segue allora:

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \times \boldsymbol{T} = 0$$

Allora la derivata di $\boldsymbol{B}$ risulta contemporaneamente ortogonale sia a $\boldsymbol{B}$ che a $\boldsymbol{T}$. Necessariamente perciò o è nulla o è parallela a $\boldsymbol{N}$. Esiste dunque uno scalare τ tale che:

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \tau\, \boldsymbol{N} \tag{CU.23}$$

Lo scalare τ prende il nome di *torsione* della curva nel punto P e il suo inverso si dice *raggio di torsione.* Dalla definizione segue subito che se la curva è piana, la torsione è nulla, in quanto il versore binormale è costante, essendo ortogonale al piano della curva, che coincide con il piano osculatore.

A questo punto, sfruttando l'ortogonalità della base, abbiamo:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{T}$$

da cui possiamo ricavare anche:

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \wedge \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \wedge \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$$

Tenendo conto delle (CU.13) e (CU.23) otteniamo:

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -\,C\,\boldsymbol{T} -\ \tau\,\boldsymbol{B} \tag{CU.24}$$

Le tre equazioni differenziali (CU.13), (CU.23) e (CU.24) sono note come *formule di Frenet.*

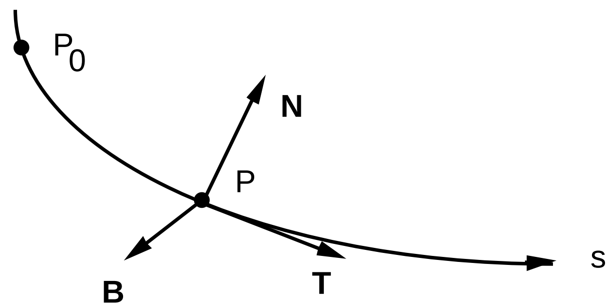

Figura CU. 3: triedro di Frenet