"SPAZI PUNTUALI AFFINI"

GLI "SPAZI PUNTUALI AFFINI" SONO INTRODOTTI PER DEFINIRE I VETTORI APPLICATI A DEI PUNTI

SIA $\{\mathcal{E}_n\}$ UN INSIEME DI PUNTI

E_n UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n

DEF. "SI DICE CHE $\mathcal{E}_n$ E' UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE" SE $\exists$ UNA APPLICAZIONE

$$\varphi : \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \to E_n$$

$\forall A, B \in \mathcal{E}_n$ ALLA COPPIA $(A, B) \Rightarrow \underline{v} = B - A \in E_n$

QUESTA APPLICAZIONE DEVE SODDISFARE LE TRE PROPRIETA'

1) $\forall A, B \in \mathcal{E}_n \qquad B - A = -(A - B)$

2) $\forall A, B, C \in \mathcal{E}_n \qquad C - A = (C - B) + (B - A)$

3) $\forall O \in \mathcal{E}_n \ \forall \underline{x} \in E_n \quad \exists P \in \mathcal{E}_n$ (ED E' UNIVOCAMENTE DETERMINATO) $: (P - O) = \underline{x}$

— o —

"DERIVATE PARZIALI"

PER LE FUNZIONI DA UNA VARIABILE $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

ABBIAMO DEFINITO

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(DOVE POSSIAMO SEMPRE DEFINIRE IL LIMITE DESTRO e/o SINISTRO)

ANALOGAMENTE DATA LA "FUNZIONE A PIÙ VARIABILI"

$$f: \Omega \to R \qquad \text{CON} \quad \Omega \subseteq R^n$$

POSSIAMO DEFINIRE LA DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots x_i + h, x_{i+1} \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_n)}{h}$$

SE ABBIAMO UN CAMPO VETTORIALE.

$$\bar{V}: \Omega \to E \qquad \Omega \subseteq R^n$$

$$\underline{V} = \underline{V}(x_1 \dots x_n) = V^k(x_1, \dots, x_n)\, \underline{e}_k$$

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial x_i} = \frac{\partial V^k}{\partial x_i} \underline{e}_k \qquad \text{DOVE}$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{V^k(x_1, \dots x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - V^k(x_1, x_2 \dots x_n)}{h}$$

$\sim$

"CAMBIAMENTI DI COORDINATE E RIFERIMENTI NATURALI"

DATO UNO SPAZIO PUNTUALE AFFINE, QUESTO CI PERMETTERÀ DI COSTRUIRE UN "SISTEMA DI RIFERIMENTO"

$$\{O, \underline{e}_i\}$$

FISSANDO 4 PUNTI, O, P_1, P_2, P_3 E DEFINENDO I VETTORI

APPLICATI $\underline{e}_i = (P_i - O)$

IL RIF. POTRÀ ESSERE ORTONORMALE SE

$$|\underline{e}_i \cdot \underline{e}_i| = 1 \qquad \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0 \qquad \forall i, j$$

AVENDO DEFINITO UN RIFERIMENTO ("OSSERVATORE")

$$\{O, \underline{e}_i\}$$

$\forall P \in \mathcal{E}_n$: $P - O = x^i \underline{e}_i$ DOVE $\{\underline{e}_i\}$ È UNA BASE.

LE COORDINATE "x^i" INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE P.

"CAMBIAMENTO DI COORDINATE"

POSSIAMO UN NUOVO SET DI "COORDINATE NUOVE"

$$\{x^{i'}\} = \{x^{1'}, x^{2'}, \ldots x^{m'}\} \qquad \text{CON } m' \leq n$$

CHE INDIVIDUANO "UNIVOCAMENTE" IL PUNTO P.

ESEMPIO: P APPARTENENTE A UNA SFERA DI RAGGIO R

"COORDINATE CARTESIANE" "$\{x^1, x^2, x^3\}$"

"COORDINATE SFERICHE" $\{\alpha, \varphi\}$

(IN QUANTO ABBIAMO IL VINCOLO CHE $\rho = R$).

ALLORA UN $\forall$ PUNTO P POTRÀ ESSERE ESPRESSO

$$\begin{cases} P = P(x^1, \ldots x^n) \\ P = P(x^{1'}, \ldots x^{m'}) \end{cases}$$

AVREMO QUINDI:

$\boxed{x^i = x^i(x^{i'})}$ O VICEVERSA $\boxed{x^{i'} = x^{i'}(x^i)}$

SE ABBIAMO CONSIDERATO IL RIF. $\{O, \underline{e}_i\}$ POSSIAMO DEFINIRE:

$\boxed{\text{"RIFERIMENTO NATURALE"}}$ INDOTTO DALLE NUOVE COORDINATE $x^{i'}$ COME:

$$\boxed{\{P, \underline{e}_{i'}\}}$$

DOVE

$$\underline{e}_{i'} = \frac{\partial P}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial (P-O)}{\partial x^{i'}} = \underbrace{\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}}_{A^{i}_{i'}} \underline{e}_i = A^{i}_{i'} \underline{e}_i$$

QUINDI:

$$\boxed{\underline{e}_{i'} = A^{i}_{i'} \underline{e}_i}$$ E VICEVERSA $$\boxed{\underline{e}_i = A^{i'}_{i} \underline{e}_{i'}}$$

INDICE DI COLONNA

DOVE $A^{i}_{i'} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}$

INDICE DI RIGA

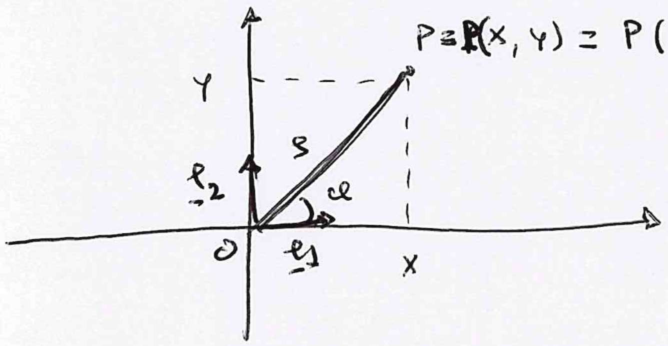
INDICE COLONNA

$A^{i'}_{i} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$

RIGA

$\boxed{\text{"COORDINATE POLARI"}}$

IN R^2



$P \equiv P(x,y) = P(\rho, \alpha)$

$P = P(x,y)$

$P \equiv P(\rho, \theta)$

DOVE IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI E' DESCRITTO DALLE RELAZIONI

$$\begin{cases} x = \rho \cos\alpha \\ y = \rho \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad \text{E VICEVERSA} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

LA PRIMA COSA DA VERIFICARE AFFINCHÉ UN QUALSIASI CAMBIAMENTO DI VARIABILI SIA **LECITO** È CALCOLARE IL DETERMINANTE DELLA "MATRICE JACOBIANA" ASSOCIATA ALLA TRASFORMAZIONE, E DA ASSUMERE CHE TALE DETERMINANTE SIA DIVERSO DA ZERO

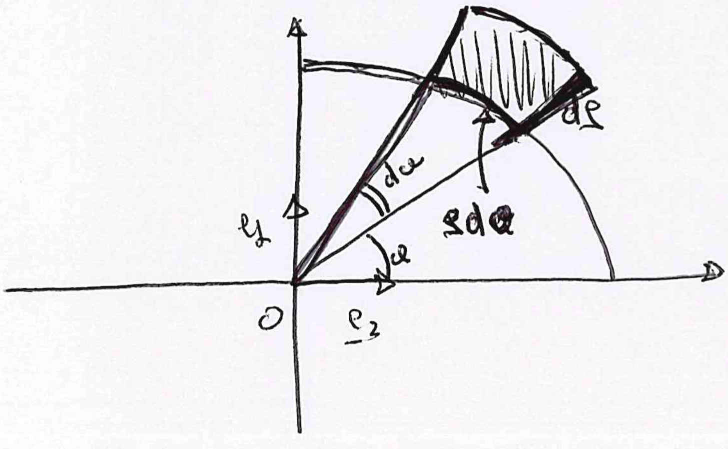
$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho \neq 0$$

QUESTO SIGNIFICA CHE IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI È ACCETTABILE (IN QUANTO BIUNIVOCO) IN TUTTI I PUNTI DI $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

INFATTI NELL'ORIGINE $O \equiv (0,0)$ IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI NON È ACCETTABILE IN QUANTO AD UN PUNTO $O \equiv (0,0)$ IN COORDINATE CARTESIANE CORRISPONDERANNO $O \equiv (0,\theta)$ $\forall \theta$ INFINITI PUNTI IN COORDINATE POLARI.

NOTA: "INTERPRETAZIONE GEOMETRICA" DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE JACOBIANA



SE CONSIDERIAMO:
UN ELEMENTO DI SUPERFICIE dS (CHE IN COORDINATE CARTESIANE $dS = dx\,dy$) VERRÀ DESCRITTO IN COORDINATE POLARI NELLA FORMA

$$\boxed{dS = \rho\, d\theta\, d\rho}$$

QUINDI $\boxed{\det J = \rho}$ "DESCRIVERÀ LA DEFORMAZIONE" DELL'ELEMENTO DI SUPERFICIE INFINITESIMO INDOTTO DAL CAMBIAMENTO DI VARIABILI.

QUINDI

$$\iint_D f(x,y)\,\overbrace{dx\,dy}^{ds} = \iint_{\tilde{D}} f(\rho,\varphi)\,\overbrace{\underbrace{\rho}_{\det(J)}\,d\rho\,d\varphi}^{ds}$$

"FINE NOTA"

COSTRUZIONE DEL "RIFERIMENTO NATURALE" INDOTTO DAL CAMBIAMENTO DI COORDINATE

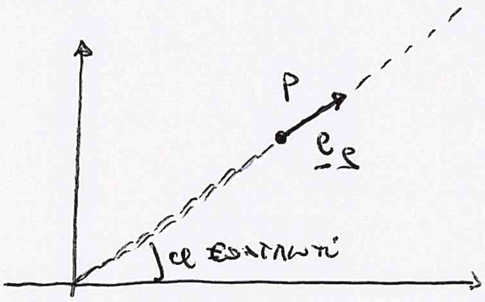
$$\{O, \underline{e}_i\} \longrightarrow \{P, \underline{e}_i'\}$$

RIF. ORTONORMALE CARTESIANO — RIF. NATURALE

CONSIDERIAMO LE CURVE OTTENUTE FISSANDO TUTTE LE VARIABILI TRANNE UNA:

NEL NOSTRO CASO:

$$\begin{cases} \rho & \text{VARIA} \\ \varphi & \text{COSTANTE} \end{cases} \Rightarrow \text{RETTE PASSANTI PER O}$$

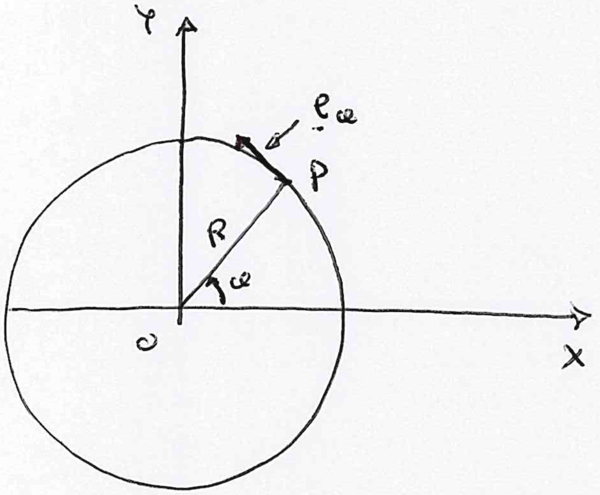


QUINDI

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

ANALOGAMENTE CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI

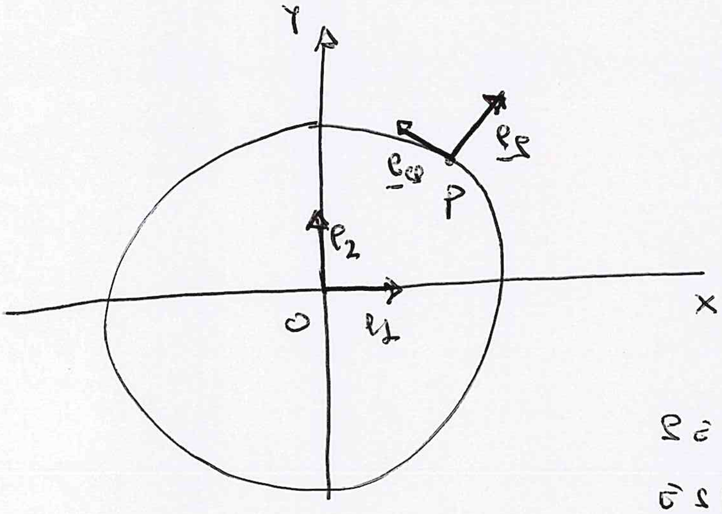
$$\begin{cases} \rho & \text{COSTANTE} \\ \alpha & \text{VARIA} \end{cases} \Rightarrow \text{LE CURVE SARANNO CIRCONFERENZE DI RAGGIO } R = \rho = \text{COSTANTE}$$



ALLORA PER COSTRUZIONE

$$\underline{e}_\alpha = \frac{\partial P}{\partial \alpha}$$ (È IL VETTORE TANGENTE ALLA CURVA IN FIGURA)

IL RIFERIMENTO NATURALE $\{P, \underline{e}_\rho, \underline{e}_\alpha\}$ SARÀ QUINDI ESPRESSO



DOVE
$$\begin{cases} \underline{e}_\rho = \dfrac{\partial (P-O)}{\partial \rho} \\[2ex] \underline{e}_\alpha = \dfrac{\partial (P-O)}{\partial \alpha} \end{cases}$$

SE INFATTI LI CALCOLIAMO IN MODO ESPLICITO AVREMO, ESSENDO

$$P-O = (\overbrace{\rho \cos\alpha}^{x}\, \underline{e}_1 + \overbrace{\rho \,\text{sen}\,\alpha}^{y}\, \underline{e}_2)$$

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \cos\alpha\, \underline{e}_1 + \text{sen}\,\alpha\, \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\alpha = \frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\rho\,\text{sen}\,\alpha\, \underline{e}_1 + \rho\cos\alpha\, \underline{e}_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_\rho \\ \underline{e}_\alpha \end{pmatrix}}_{\underline{e}_{\alpha'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\rho\,\text{sen}\,\alpha & \rho\cos\alpha \end{pmatrix}}_{A_{\alpha'}{}^{\alpha}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\alpha}$$

$$\boxed{\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\, \underline{e}_\alpha} \quad \text{CON} \quad \boxed{A_{\alpha'}{}^{\alpha}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\rho\,\text{sen}\,\alpha & \rho\cos\alpha \end{pmatrix} = \boxed{J^T}$$

MATRICE ASSOCIATA AL CAMBIAMENTO DI BASE

OSSERVIAMO CHE:

$$\begin{cases} \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\rho = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \\ \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi = \rho^2 \\ \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\varphi = -\rho \sin\varphi\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

DA CUI $\underline{e}_{\alpha'} \cdot \underline{e}_{\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$

LA NUOVA "BASE NATURALE" È ORTOGONALE MA NON "ORTONORMALE"

LA $\boxed{\text{MATRICE INVERSA}}$

$$g^{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}$$

COSÌ $g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$

ALLORA DIREMO CHE

$$g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

È LA MATRICE DELLA METRICA INDOTTA DALLA TRASF. DI COORDINATE $(x,y) \leftrightarrow (\rho, \varphi)$

NOTA!

SI POTREBBE PENSARE DI COSTRUIRE UN RIFERIMENTO NUOVO ORTONORMALE $\{P, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi\}$ CON

$$\begin{cases} \tilde{e}_\rho = \underline{e}_\rho \\ \tilde{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \underline{e}_\varphi \end{cases}$$

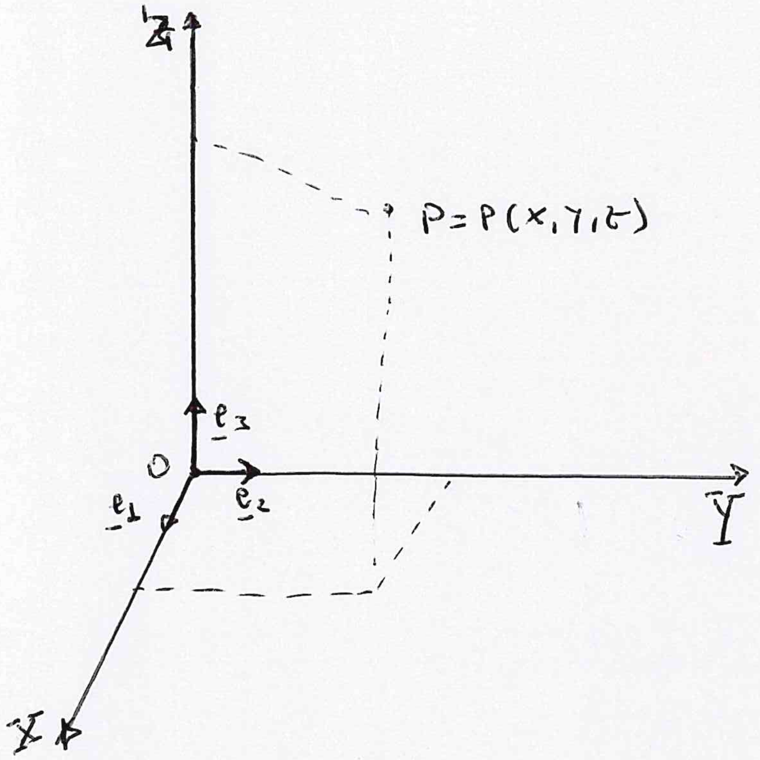
IN QUESTO CASO $\tilde{g}_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

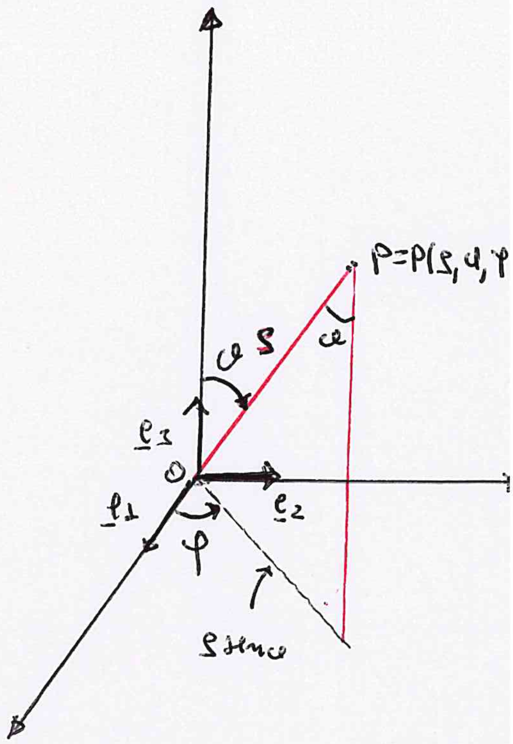
(RICORDIAMO CHE $\rho \neq 0$)

MA SOTTOLINEAMO CHE $\tilde{g}_{\alpha'\beta'}$ NON È LA METRICA INDOTTA DALLA TRASF. DI COORDINATE

"COORDINATE SFERICHE"

IN $\mathbb{R}^3$ $\quad P = P(x, y, z)$ $\quad$ OPPURE $\quad P = P(\rho, \alpha, \varphi)$





LEGGE DI TRASFORMAZIONE $\quad (x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \alpha, \varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\alpha \end{cases} \qquad \text{VICEVERSA} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{z^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{y}{x} \right) \end{cases}$$

MATRICE JACOBIANA

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \alpha, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi & \rho \cos\alpha \cos\varphi & -\rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi & \rho \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi & \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi \\ \cos\alpha & -\rho \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \cos\alpha \begin{vmatrix} \rho\cos\alpha\cos\varphi & -\rho\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi \\ \rho\cos\alpha\,\text{sen}\,\varphi & \rho\,\text{sen}\,\alpha\cos\varphi \end{vmatrix} +$$

$$+\rho\,\text{sen}\,\alpha \begin{vmatrix} \text{sen}\,\alpha\cos\varphi & -\rho\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi & \rho\,\text{sen}\,\alpha\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\,\text{sen}\,\alpha \neq 0$$

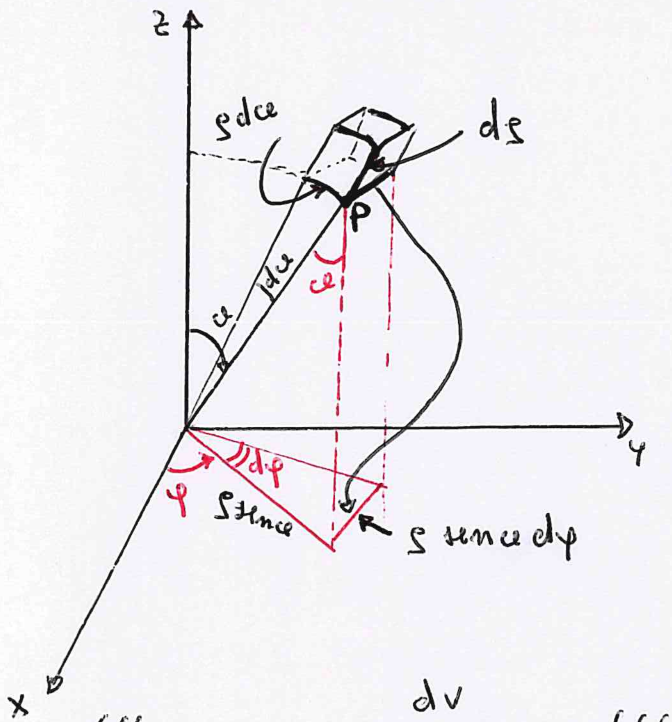
QUINDI IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI È LECITO IN TUTTO R^3 TRANNE CHE SULL'ASSE $\vec{z}$.

INFATTI AD UN PUNTO SULL'ASSE Z IN COORDINATE CARTESIANE

$P = (0, 0, \bar{z})$ (CON $\bar{z} > 0$) $\Rightarrow$ $P \equiv (\bar{\rho}, 0, \varphi)$ $\forall \varphi$

CORRISPONDONO ∞ PUNTI IN COORDINATE SFERICHE.

NOTA: "INTERPRETAZIONE GEOMETRICA"



dV = ELEMENTO INFINITESIMO DI VOLUME IN COORDINATE SFERICHE

$$= (d\rho)(\rho\,d\alpha)(\rho\,\text{sen}\,\alpha\,d\varphi) =$$

$$= \underbrace{\rho^2\,\text{sen}\,\alpha}_{\det(J)}\,d\rho\,d\alpha\,d\varphi$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\overbrace{dx\,dy\,dz}^{dV} = \iiint_{\tilde{D}} f(\rho,\alpha,\varphi)\,\underbrace{\rho^2\,\text{sen}\,\alpha}_{\det(J)}\,d\rho\,d\alpha\,d\varphi$$

FINE NOTA

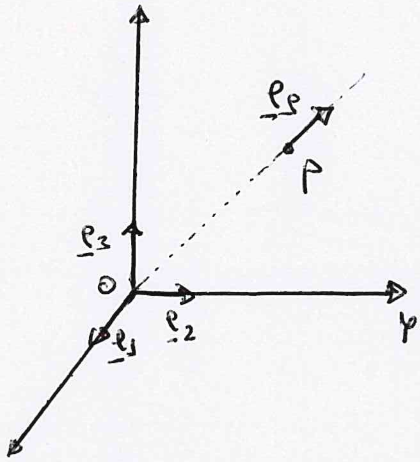
"RIFERIMENTO NATURALE"

$$\{O, \underline{e}_i\} \longleftrightarrow \{P, \underline{e}_{i'}\}$$

RIF. CARTESIANO — RIF. NATURALE

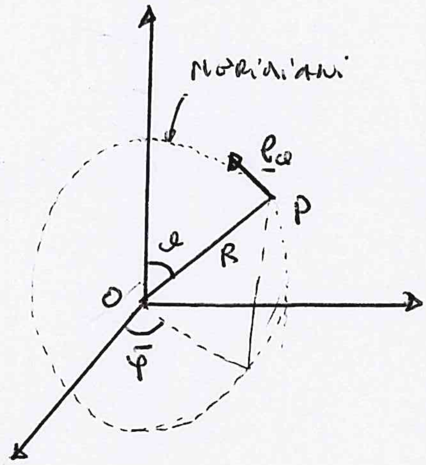
CONSIDERIAMO LE CURVE OTTENUTE FISSANDO TUTTE LE VARIABILI TRANNE UNA.

1) $\begin{cases} \rho \text{ VARIABILE} \\ \theta, \varphi \text{ COSTANTI} \end{cases}$ CURVE $\Rightarrow$ RETTE PASSANTI PER O



CALCOLIAMO: $\underline{e}_\rho = \dfrac{\partial P}{\partial \rho}$

2) $\begin{cases} \theta \text{ VARIABILE} \\ \rho, \varphi \text{ COSTANTI} \end{cases}$ CURVE $\Rightarrow$ CIRCONFERENZE (MERIDIANI) OTTENUTE VARIANDO θ CON $\rho = R$ $\varphi = \bar{\varphi}$ FISSATE

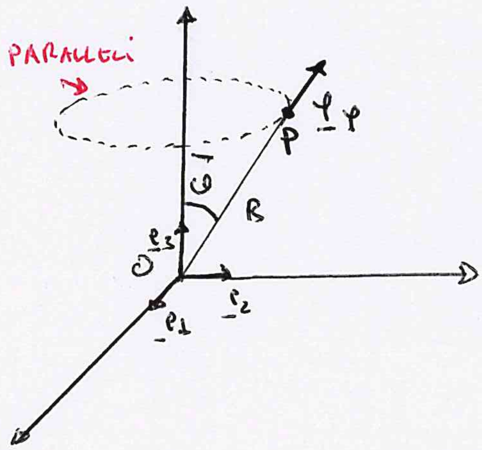


CALCOLIAMO: $\underline{e}_\theta = \dfrac{\partial P}{\partial \theta}$

$\uparrow$

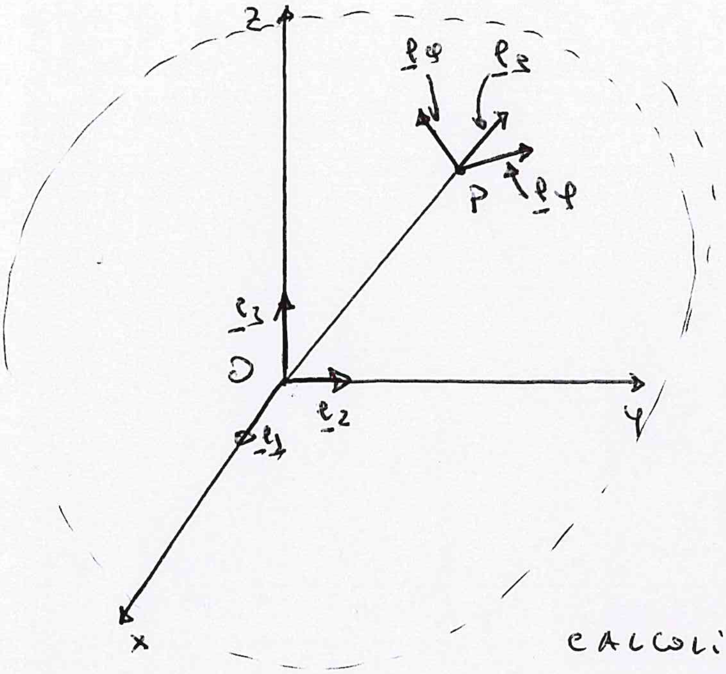
(TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN FIGURA)

3) $\begin{cases} \varphi \text{ VARIABILE} \\ \rho, \theta \text{ COSTANTI} \end{cases}$ CURVE $\Rightarrow$ CIRCONFERENZE (PARALLELI) OTTENUTE VARIANDO φ CON $\rho = R$ $\theta = \bar{\theta}$



CALCOLIAMO: $\underline{e}_\varphi = \dfrac{\partial P}{\partial \varphi}$

(TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN FIGURA)



$$P-O = x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3 =$$

$$= (\rho \,\mathrm{sen}\,\alpha \cos\varphi)\,\underline{e}_1 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\underline{e}_2 + (\rho\cos\alpha)\,\underline{e}_3$$

CALCOLIAMO ESPLICITAMENTE $\{\underline{e}_\rho, \underline{e}_\alpha, \underline{e}_\varphi\}$

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial(P-O)}{\partial\rho} = (\mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi)\,\underline{e}_1 + (\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\underline{e}_2 + (\cos\alpha)\,\underline{e}_3$$

$$\underline{e}_\alpha = \frac{\partial(P-O)}{\partial\alpha} = (\rho\cos\alpha\cos\varphi)\,\underline{e}_1 + (\rho\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\underline{e}_2 + (-\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\underline{e}_3$$

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\partial(P-O)}{\partial\varphi} = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\underline{e}_1 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi)\,\underline{e}_2$$

DA CUI $\boxed{\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\,\underline{e}_\alpha}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_\rho \\ \underline{e}_\alpha \\ \underline{e}_\varphi \end{pmatrix}}_{\underline{e}_{\alpha'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi & \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\alpha \\ \rho\cos\alpha\cos\varphi & \rho\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi & \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}}_{A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \underbrace{(J)^T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\alpha}$$

COLONNA

RIGA

(TRASPOSTA DELLA MATRICE JACOBIANA)

CALCOLIAMO I PRODOTTI SCALARI:

$$\underline{e}_\rho\cdot\underline{e}_\rho = 1\ ;\quad \underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\alpha = \rho^2\ ;\quad \underline{e}_\varphi\cdot\underline{e}_\varphi = \rho^2\,\mathrm{sen}^2\alpha$$

$$\underline{e}_\rho\cdot\underline{e}_\alpha = 0\ ;\quad \underline{e}_\rho\cdot\underline{e}_\varphi = 0\ ;\quad \underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\varphi = 0$$

LA NUOVA BASE $\{\underline{e}_\rho, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi\}$ NATURALE E' ORTOGONALE MA NON E' ORTONORMALE, DA CUI LA MATRICE DELLA METRICA:

$$g_{\alpha'\beta'} = \underline{e}_{\alpha'} \cdot \underline{e}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

LA MATRICE INVERSA ("DUALE") SI OTTIENE SUBITO.

$$g^{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\rho^2 \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

(RICORDIAMO CHE $\det J \neq 0$)

OVVIAMENTE $\quad g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'} = g^{\alpha'}{}_{\beta'}$

QUINDI $g_{\alpha'\beta'}$ E' LA MATRICE DELLA METRICA INDOTTA DALLA TRASF. DI COORDINATE.

NOTA: SI POTREBBE PENSARE DI COSTRUIRE UNA BASE ORTONORMALE "NUOVA" $\{P, \underline{\tilde{e}}_\rho, \underline{\tilde{e}}_\theta, \underline{\tilde{e}}_\varphi\}$ CON

$$\tilde{e}_\rho = \underline{e}_\rho \; ; \quad \tilde{e}_\theta = \frac{1}{\rho} \underline{e}_\theta \; ; \quad \tilde{e}_\varphi = \frac{1}{\rho \sin\theta} \underline{e}_\varphi$$

(RICORDIAMO CHE $\det J \neq 0$)

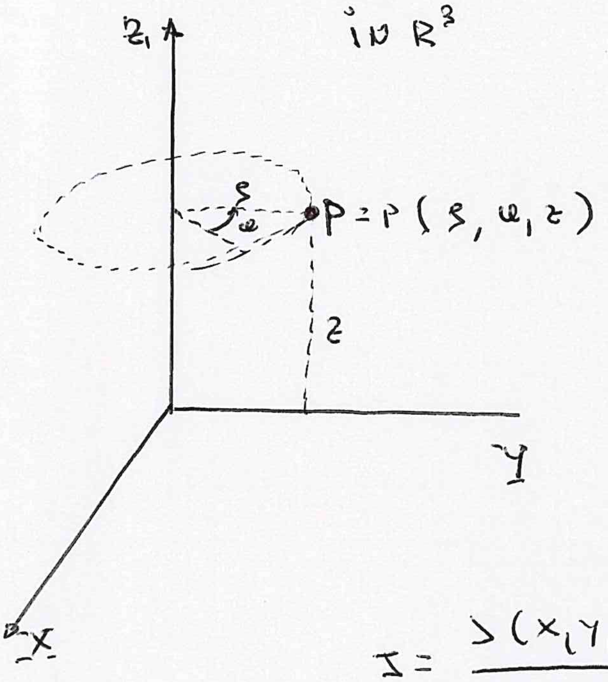
IN QUESTO CASO $\quad \hat{g}_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{\alpha'\beta'}$

MA SOTTOLINEAMO CHE: $\tilde{g}_{\alpha'\beta'}$ NON E' LA MATRICE INDOTTA DALLA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (\rho, \theta, \varphi)$$

"COORDINATE CILINDRICHE"

in $\mathbb{R}^3$



LEGGE DI TRASFORMAZIONI $(x,y,z) \to (\rho,\varphi,z)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

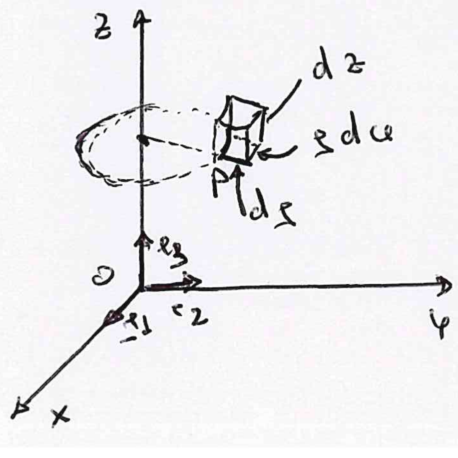
$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) = \rho \neq 0$$

IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI E' LECITO IN TUTTO $\mathbb{R}^3$ TRANNE CHE SULL'ASSE $\vec{z}$.

AD UN PUNTO SULL'ASSE $\vec{z}$ $P = (0, 0, \bar{z})$ CORRISPONDONO ∞ PUNTI IN COORDINATE CILINDRICHE $P \equiv (0, \varphi, \bar{z})$ $\forall \varphi$.

NOTA: INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



$$dv = (d\rho)(\rho\, d\varphi)\, dz = \underbrace{\rho}_{\det(J)}\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\tilde{A}} f(\rho,\varphi,z)\, \underbrace{\rho}_{\det J}\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

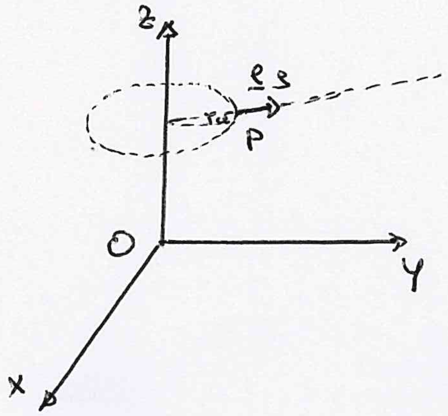
"Riferimento naturale"

$$\{O, \underline{e}_i\} \longleftrightarrow \{P, \underline{e}_i'\}$$

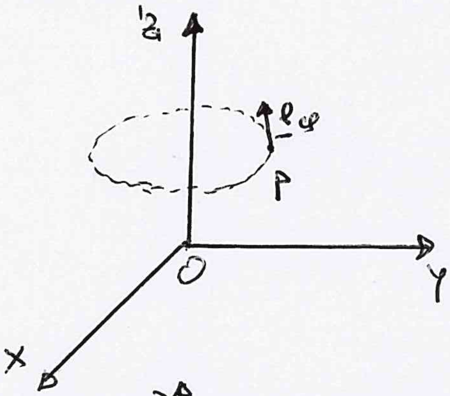
Consideriamo le curve ottenute fissando tutte le variabili tranne una:

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

1) $\begin{cases} \rho \text{ variabile} \\ \varphi, z \text{ fissate} \end{cases}$ curve rette ortogonali asse $\vec{z}$ passanti per P



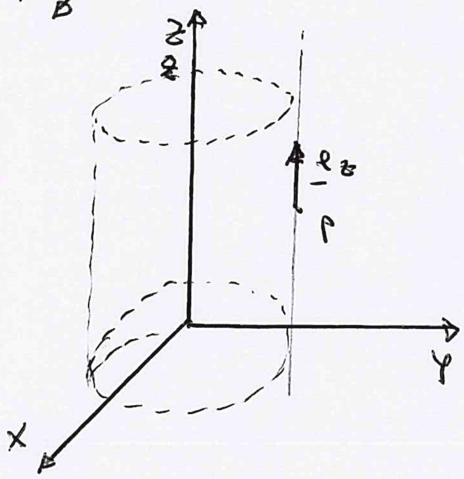
2) $\begin{cases} \varphi \text{ variabile} \\ \rho, z \text{ fissate} \end{cases}$ curve circolari di raggio R ad altezza $\bar{z}$ fissata



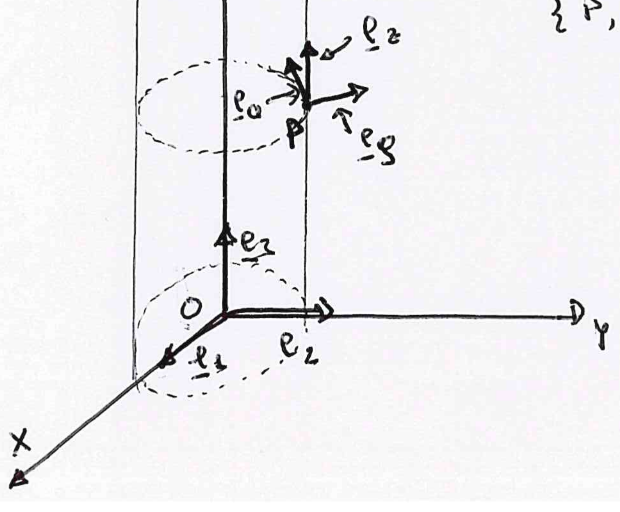
$$\underline{e}_\varphi = \frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

(tangente alla circonferenza in figura)

3) $\begin{cases} z \text{ variabile} \\ \rho, \varphi \text{ fissate} \end{cases}$ retta generatrice del cilindro di raggio $R = \rho$ con $\varphi = \bar{\varphi}$



$$\underline{e}_z = \frac{\partial P}{\partial z}$$



Riferimento naturale

$$\{P, \underline{e}_\rho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z\}$$

$$P - O = x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3 =$$

$$= (\rho \cos\varphi)\,\underline{e}_1 + (\rho \sin\varphi)\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3$$

Da cui calcolando esplicitamente avremo:

$$\underline{e}_\rho = \frac{\partial(P-O)}{\partial\rho} = \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\, \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\partial(P-O)}{\partial\varphi} = -\rho\operatorname{sen}\varphi\, \underline{e}_1 + \rho\cos\varphi\, \underline{e}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\, \underline{e}_\alpha$$

$$\underline{e}_z = \frac{\partial(P-O)}{\partial z} = \underline{e}_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_\rho \\ \underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_z \end{pmatrix}}_{\underline{e}_{\alpha'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{\alpha'}{}^{\alpha} = (J)^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\alpha}$$

α → colonna

α' → riga

$$\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\rho = 1 \;; \qquad \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi = \rho^2 \qquad \underline{e}_z \cdot \underline{e}_z = 1$$

$$\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\varphi = 0 \qquad \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_z = 0 \qquad \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_z = 0$$

$$g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa è data dalla

$$g^{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\alpha'}_{\beta'}$$

Nota: Si potrebbe costruire una base ortonormale

$$\{P, \hat{\underline{e}}_{\alpha'}\} \qquad \hat{\underline{e}}_\rho = \underline{e}_\rho \qquad \hat{\underline{e}}_\varphi = \frac{1}{\rho}\underline{e}_\varphi \qquad \hat{e}_z = e_z$$

in questo caso

$$\hat{g}_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ma $\hat{g}_{\alpha'\beta'}$ non è la metrica indotta dalla trasf. delle coordinate.

VEDIAMO COME CALCOLARE LE STESSE QUANTITA' IN MODO COMPATTO:

CONSIDERIAMO LA TRASF. DI COORDINATE

$$(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

ABBIAMO VISTO CHE PER DESCRIVERE QUESTE TRASFORMAZIONI E' SUFFICIENTE CALCOLARE LE MATRICI

$$A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \qquad \text{ESSENDO} \quad \underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\, \underline{e}_{\alpha}$$

E LA SUA INVERSA

$$A_{\alpha}{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \qquad \text{ESSENDO} \quad \underline{e}_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\alpha'}\, \underline{e}_{\alpha'}$$

TUTTO IL RESTO VIENE DI CONSEGUENZA

INFATTI SE $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ E' LA MATRICE DELLA METRICA ASSOCIATA AL RIF. ORTONORMALE IN COORDINATE CARTESIANE ALLORA NELLE NUOVE COORDINATE AVREMO

$$g_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} A_{\beta'}{}^{\beta}\, g_{\alpha\beta} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} A_{\beta'}{}^{\beta}\, \delta_{\alpha\beta} =$$
$$= A_{\alpha'}{}^{\mu} A_{\beta'}{}^{\mu}$$

$$\boxed{g_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}{}^{\mu} A_{\beta'}{}^{\mu}}$$

ED ANALOGAMENTE:

$$g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}{}_{\alpha} A^{\beta'}{}_{\beta}\, g^{\alpha\beta} = A_{\alpha}{}^{\alpha'} A^{\beta'}{}_{\beta}\, \delta^{\alpha\beta} = A^{\alpha'}{}_{\mu} A^{\beta'}{}_{\mu}$$

$$\boxed{g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}{}_{\mu} A^{\beta'}{}_{\mu}}$$

"COORDINATE POLARI" in $\mathbb{R}^2$

$$(x^{1}, x^{2}) = (x, y)$$
$$(x^{1'}, x^{2'}) = (\rho, \alpha) \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \rho\cos\alpha = x^{1'}\cos(x^{2'}) \\ x^2 = \rho\,\text{sen}\,\alpha = x^{1'}\,\text{sen}(x^{2'}) \end{cases}$$

DA CUI:

COLONNA

$$A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & \text{sen}(x^{2'}) \\ -x^{1'}\,\text{sen}(x^{2'}) & x^{1'}\cos(x^{2'}) \end{pmatrix}$$

RIGA

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}(\alpha) \\ -\rho\,\text{sen}(\alpha) & \rho\cos\alpha. \end{pmatrix}$$

DA CUI:

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_{1'} \\ \underline{e}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\rho\,\text{sen}\,\alpha & \rho\cos\alpha. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha}\,\underline{e}_{\alpha}$$

ANALOGAMENTE:

$$g_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}{}^{k} A_{\beta'}{}^{k} = A_{\alpha'}{}^{1} A_{\beta'}{}^{1} + A_{\alpha'}{}^{2} A_{\beta'}{}^{2}$$

$$g_{1'1'} = A_{1'}{}^{1} A_{1'}{}^{1} + A_{1'}{}^{2} A_{1'}{}^{2} = (\cos\alpha)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1$$

DA CUI BANALMENTE

$$g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{2'2'} = A_{2'}{}^{1} A_{2'}{}^{1} + A_{2'}{}^{2} A_{2'}{}^{2} = (-\rho\,\text{sen}\,\alpha)^2 + (\rho\cos\alpha)^2 = \rho^2$$

VICEVERSA:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} \\ x^{2'} = \text{arctg}\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{cases}$$

COLONNA

$$A_{\alpha}{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\frac{\text{sen}\,\alpha}{\rho} \\ \text{sen}\,\alpha & \frac{\cos\alpha}{\rho} \end{pmatrix}$$

RIGA

INFATTI:

$$A_1^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \cdot \cancel{2} x^1 = \frac{\cancel{\rho} \cos\alpha}{\cancel{\rho}} = \cos\alpha$$

$$A_1^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = \frac{\partial \, \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{x^1}\right)}{\partial x^1} = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x^1}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{(x^1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{\cancel{(x^1)^2}}{(x^1)^2+(x^2)^2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{(x^1)^2}} = -\frac{\cancel{\rho}\, \mathrm{sen}\alpha}{\rho^{\cancel{2}}} = -\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\rho}$$

$$A_2^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \cdot \cancel{2} x^2 = \frac{\cancel{\rho}\, \mathrm{sen}\alpha}{\cancel{\rho}} = \mathrm{sen}\alpha$$

$$A_2^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \frac{\partial \, \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{x^1}\right)}{\partial x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x^1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^1} =$$

$$= \frac{(x^1)^{\cancel{2}}}{(x^1)^2+(x^2)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^1}} = \frac{\cancel{\rho} \cos\alpha}{\rho^{\cancel{2}}} = \frac{\cos\alpha}{\rho}$$

DA CUI
$$A_\alpha^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\rho} \\ \mathrm{sen}\alpha & \frac{\cos\alpha}{\rho} \end{pmatrix}$$

BANALMENTE

$$g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}_\mu A^{\beta'}_\mu = A^{\alpha'}_1 A^{\beta'}_1 + A^{\alpha'}_2 + A^{\beta'}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g^{1'1'} = A^{1'}_1 A^{1'}_1 + A^{1'}_2 A^{1'}_2 = \\ \quad = \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1 \\ g^{2'2'} = A^{2'}_1 A^{2'}_1 + A^{2'}_2 A^{2'}_2 = \\ \quad = \left(-\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \end{cases}$$

E' BANALE PROVARE CHE:

$$A_{\alpha'}^{\alpha} A_\alpha^{\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\beta'} \quad ; \quad A_\alpha^{\mu'} A_{\mu'}^{\beta} = \delta_\alpha^{\beta}$$

$$g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

"COORDINATE SFERICHE" in $\mathbb{R}^3$

$$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\rho, \alpha, \varphi)$$

DA cui:

$$\begin{cases} x^1 = \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi = x^{1'} \operatorname{sen}(x^{2'}) \cos(x^{3'}) \\ x^2 = \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi = x^{1'} \operatorname{sen}(x^{2'}) \operatorname{sen}(x^{3'}) \\ x^3 = \rho \cos\alpha = x^{1'} \cos(x^{2'}) \end{cases}$$

Quindi:

COLONNA

$$A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} =$$

RIGA

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi & \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi & \cos\alpha \\ \rho \cos\alpha \cos\varphi & \rho \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi & -\rho \operatorname{sen}\alpha \\ -\rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi & \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

DA cui $\quad \underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \, \underline{e}_\alpha$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_\rho \\ \underline{e}_\alpha \\ \underline{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A_{\alpha'}{}^{\alpha} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

PER LA MATRICE DELLA METRICA AVREMO

$$g_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}^{\mu} A_{\beta'}^{\mu} = A_{\alpha'}^{1} A_{\beta'}^{1} + A_{\alpha'}^{2} A_{\beta'}^{2} + A_{\alpha'}^{3} A_{\beta'}^{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

$$g_{3'3'} = A_{3'}^{1} A_{3'}^{1} + A_{3'}^{2} A_{3'}^{2} + \cancel{A_{3'}^{3} A_{3'}^{3}}$$

$$= (-\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^2 + (\rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$g_{2'3'} = A_{2'}^{1} A_{3'}^{1} + A_{2'}^{2} A_{3'}^{2} + \cancel{A_{2'}^{3} A_{3'}^{3}} =$$

$$= (\rho \cos\theta \cos\varphi)(-\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) +$$

$$+ (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi)(\rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi) = 0$$

E COSÌ VIA.

SE VALUTIAMO LA TRASFORMAZIONE INVERSA AVREMO:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z}}\right) \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \\ x^{2'} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^3)^2}}\right) \\ x^{3'} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{x^1}\right) \end{cases}$$

COLONNA

$$A_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho} & -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho\operatorname{sen}\theta} \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\rho} & \dfrac{\cos\varphi}{\rho\operatorname{sen}\theta} \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta/\rho & 0 \end{pmatrix}$$

RIGA

AD ESEMPIO

$$A_2^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \frac{\partial \,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^3)^2}}\right)}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^3)^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^3)^2}}} \cdot \frac{\cancel{2}(x^2)}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^3)^2}}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \cdot \frac{(x^3)}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \cdot \frac{(x^2)}{\cancel{(x^3)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\rho^2}} \cdot \frac{\cancel{\rho}\cos\alpha \cdot \cancel{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{\rho^2\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\varphi+\rho^2\mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\rho\,\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\rho}$$

E COSÌ VIA PER GLI ALTRI ELEMENTI DI MATRICE.

AVREMO COSÌ $\quad \underline{e}_\alpha = A_\alpha^{\alpha'}\,\underline{e}_{\alpha'}$

PER LA MATRICE DUALE $\quad g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}_\mu A^{\beta'}_\mu = A^{\alpha'}_1 A^{\beta'}_1 + A^{\alpha'}_2 A^{\beta'}_2 + A^{\alpha'}_3 A^{\beta'}_3$

È FACILE VERIFICARE CHE

$$g^{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\rho^2\mathrm{sen}^2\alpha) \end{pmatrix}$$

INOLTRE È FACILE VERIFICARE CHE

$$A_{\alpha'}^{\mu} A_\mu^{\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\beta'} \qquad A_\alpha^{\mu'} A_{\mu'}^{\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

$$g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \quad ;$$

"COORDINATE CILINDRICHE" in $\mathbb{R}^3$

$$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\rho, \alpha, z)$$

IN QUESTO CASO AVREMO:

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos\alpha = x^{1'} \cos(x^{2'}) \\ x^2 = \rho \operatorname{sen}\alpha = x^{1'} \operatorname{sen}(x^{2'}) \\ x^3 = z = x^{3'} \end{cases}$$

DA CUI

$$\begin{array}{c} \\ A_{\alpha'}{}^{\alpha} \\ \uparrow \\ \text{RIGA} \end{array} \overset{\text{COLONNA}}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\alpha & \rho\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^{\alpha} \underline{e}_\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{e}_\rho \\ \underline{e}_\alpha \\ \underline{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A_{\alpha'}{}^{\alpha} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'}{}^{\mu} A_{\beta'}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SE CONSIDERIAMO LA TRASFORMAZIONE INVERSA AVREMO.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = \cancel{x}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ x^{2'} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3}{x^1}\right) \\ x^{3'} = x^3 \end{cases}$$

SE QUINDI CALCOLIAMO LA MATRICE

$$\begin{array}{c} \text{COLONNA} \\ A_{\alpha}{}^{\alpha'} \\ \text{RIGA} \end{array} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \frac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DA CUI BANALMENTE $\underline{e}_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'}$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A_{\alpha}{}^{\alpha'} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_{\rho} \\ \underline{e}_{\varphi} \\ \underline{e}_{t} \end{pmatrix}$$

ANALOGAMENTE

$$g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}_{\mu} A^{\beta'}_{\mu} = A^{\alpha'}_{1} A^{\beta'}_{1} + A^{\alpha'}_{2} A^{\beta'}_{2} + A^{\alpha'}_{3} A^{\beta'}_{3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BANALMENTE SI PROVA CHE

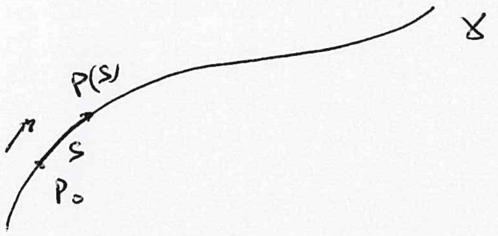
$$A_{\alpha'}{}^{\mu} A_{\mu}{}^{\beta'} = \delta_{\alpha'}{}^{\beta'} \qquad A_{\alpha}{}^{\mu'} A_{\mu'}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$$

$$g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\alpha'\gamma'} g_{\gamma'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta} \quad \text{"SEMPRE"}$$

CALCOLIAMO ADESSO, DATA UNA CURVA γ REGOLARE, L'ELEMENTO INFINITESIMO DI LUNGHEZZA DELLA CURVA (AL QUADRATO) $(ds)^2$ UTILIZZANDO I TRE SET DI COORDINATE.

ESERCIZIO

SIA DATA UNA CURVA γ REGOLARE



FISSIAMO SULLA CURVA γ

1) UNA ORIGINE P_0
2) UN VERSO DI PERCORRENZA
3) UNA UNITA' DI MISURA

CONSIDERIAMO UN ELEMENTO INFINITESIMO DI LUNGHEZZA DI γ ESSO SARA INDICATO DA ds. QUINDI AVREMO

$$(ds)^2 = d\vec{P} \cdot d\vec{P} = dx^\alpha \underline{e}_\alpha \cdot dx^\beta \underline{e}_\beta =$$

$$= dx^\alpha dx^\beta \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}$$

VOGLIAMO CALCOLARE **LA QUANTITA'** $(ds)^2$ UTILIZZANDO "SET" DIFFERENTI DI COORDINATE.

CURVA IN UN PIANO:

COORDINATE CARTESIANE: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

COORDINATE POLARI: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$ $\qquad x^{\alpha'} \equiv \{\rho, \varphi\}$

$$(ds)^2 = dx^{\alpha'} dx^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} = (d\rho)^2 \overbrace{g_{11}}^{1} + (d\varphi)^2 \overbrace{g_{22}}^{\rho^2} =$$

$$= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2$$

VEDIAMO SE E' VERO:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos\varphi\, d\rho - \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi$$

DA CUI $\boxed{(dx)^2 + (dy)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2}$

CURVA NELLO SPAZIO

COORDINATE CARTESIANE: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha \cos\varphi \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\alpha \,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = \rho \cos\alpha \end{cases} \qquad g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \mathrm{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x^{\alpha'} = \{\rho, \alpha, \varphi\}$$

$$(ds)^2 = dx^{\alpha'} dx^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} = (d\rho)^2 g_{1'1'} + (d\alpha)^2 g_{2'2'} + (d\varphi)^2 g_{3'3'}$$

$$= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\alpha)^2 + \rho^2 \mathrm{sen}^2\alpha (d\varphi)^2$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = (\mathrm{sen}\,\alpha \cos\varphi) d\rho + (\rho \cos\alpha \cos\varphi) d\alpha + $$
$$+ (-\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi) d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = (\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi) d\rho + (\rho \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi) d\alpha$$
$$+ (\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \cos\varphi) d\varphi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi = (\cos\alpha) d\rho + (-\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha) d\alpha$$

DA CUI QUADRANDO E SOMMANDO AVREMO

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\alpha)^2 + \rho^2 \mathrm{sen}^2\alpha (d\varphi)^2$$

COORDINATE CILINDRICHE:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\alpha \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ z = z \end{cases} \qquad g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x^{\alpha'} = \{\rho, \alpha, z\}$$

$$(ds)^2 = dx^{\alpha'} dx^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z} dz = \cos\varphi \, d\rho - \rho \sin\varphi \, d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z} dz = \sin\varphi \, d\rho + \rho \cos\varphi \, d\varphi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} dz = dz$$

da cui: $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2$

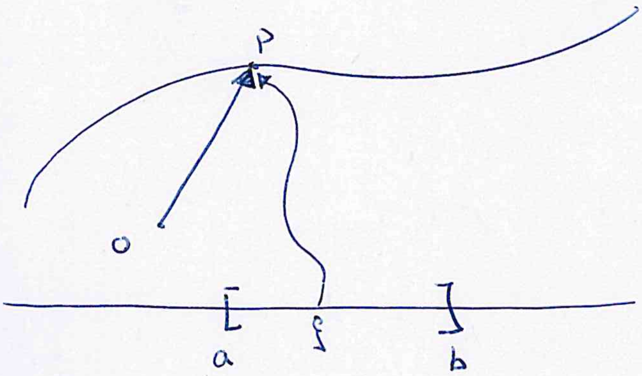
CENNI SULLE PROPRIETA' DIFFERENZIALI DELLE CURVE

UNA CURVA γ E' COSTITUITA DA UN INSIEME DI PUNTI DEFINITI MEDIANTE UNA FUNZIONE VETTORIALE DI UNA SOLA VARIABILE

$$\gamma : [a,b] \to R^n$$

QUINDI FISSATO UN PUNTO $O \in E_n$ E SIA $P \in \gamma$ ALLORA AVREMO UNA FUNZIONE VETTORIALE

$$\underline{\xi} = (P - O) : [a,b] \to R^n$$



IN PARTICOLARE FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO $\{O, \underline{e}_i\}$

$$\underline{\xi} = (P - O) = X^i(\xi)\, \underline{e}_i$$

AVREMO QUINDI COME PARAMETRIZZAZIONE DI γ L'INSIEME DELLE EQUAZ. ALGEBRICHE (1) CHIAMATE "EQUAZIONI PARAMETRICHE" DELLA CURVA.

$$\underline{\xi}(\xi) \Rightarrow \begin{cases} X^1 = X^1(\xi) \\ X^2 = X^2(\xi) \\ \vdots \\ X^n = X^n(\xi) \end{cases} \qquad (1)$$

SE DEFINIAMO UN CAMBIO DI VARIABILE DESCRITTO DALLA APPLICAZIONE

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b] \quad : \quad \xi = \varphi(\eta)$$

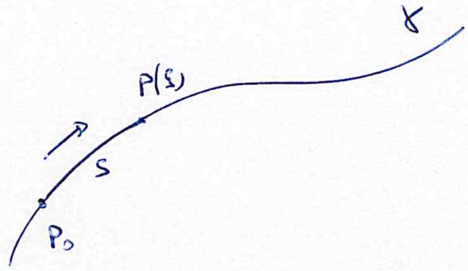
AVREMO $X^i[\xi(\eta)] = \tilde{X}^i(\eta)$ DA CUI LE NUOVE EQUAZ. PARAMETRICHE:

$$\underline{\xi}(\eta) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X}^1 = \tilde{X}^1(\eta) \\ \vdots \\ \tilde{X}^n = \tilde{X}^n(\eta) \end{cases} \qquad (2)$$

"ASCISSA CURVILINEA"

FISSIAMO SU UNA CURVA γ

- UNA ORIGINE P_0.
- UN VERSO DI PERCORRENZA.
- UNA UNITA' DI MISURA.



IN QUESTO MODO FISSIAMO UNA "ASCISSA CURVILINEA" SU γ IN GRADO DI **MISURARE** LA DISTANZA ORIENTATA DI UN PUNTO P DA P_0

L'ELEMENTO INFINITESIMO DI LUNGHEZZA SARA' DATO DALLA RELAZIONE:

$$(ds)^2 = dx^\alpha \underline{e}_\alpha \cdot dx^\beta \underline{e}_\beta = dx^\alpha dx^\beta \underbrace{(\underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta)}_{g_{\alpha\beta}} = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{dx^\alpha}{d\xi} \frac{dx^\beta}{d\xi} g_{\alpha\beta} (d\xi)^2$$

NOTA: SE $\{\underline{e}_\alpha\}$ E' ORTONORMALE

$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

$(ds)^2 = dx^\alpha dx^\alpha$

DA CUI $\boxed{ds = \pm\sqrt{x'^\alpha x'^\beta g_{\alpha\beta}}\, d\xi}$

DOVE IL SEGNO E' POSITIVO SE "s" E' CRESCENTE QUANDO ξ E' CRESCENTE, E' NEGATIVO IN CASO CONTRARIO

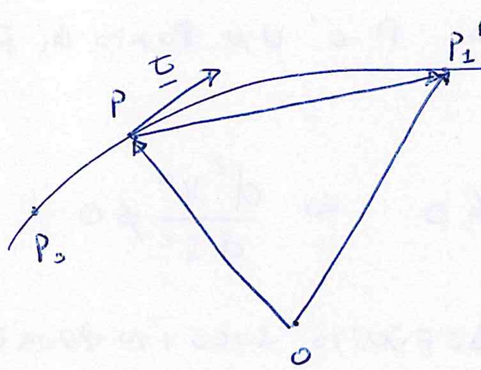
AVREMO QUINDI

$$s(\xi) = \int_\gamma ds = \int_0^\xi ds(\tilde{\xi})$$

DATA QUINDI LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA $x^i = x^i(\xi)$ POSSIAMO CONSIDERARE $\xi = \xi(s)$ ED USARE s COME PARAMETRO "NATURALE" PER PARAMETRIZZARE LA CURVA

$$\underline{x}(s) \Rightarrow \begin{cases} x^1 = x^1(s) \\ \vdots \\ x^n = x^n(s) \end{cases}$$

"TRIEDRO DI FRENET"



SUPPONENDO CHE LA CURVA SIA DIFFERENZIABILE

$$\frac{d(P-O)}{ds} = \frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(P_1-O)-(P-O)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{P_1 - P}{\Delta s} = \underline{t}$$

ESSENDO $\underline{t}$ VETTORE TANGENTE ALLA CURVA γ IN P.

$$\underline{t} \cdot \underline{t} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dP}{ds} = \frac{dx^\alpha \underline{e}_\alpha \cdot dx^\beta \underline{e}_\beta}{(ds)^2} = \frac{dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}}{(ds)^2} = 1$$

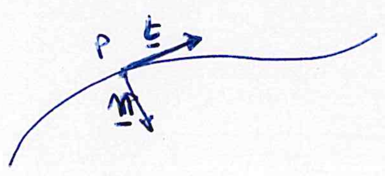
ALLORA $\underline{t} = \underline{t}(s)$ È SEMPRE UN VETTORE ORIENTATO VERSO LE ASCISSE CURVILINEE CRESCENTI (INFATTI $\Delta P = (P_1 - P)$ È ORIENTATO VERSO LE ASCISSE CRESCENTI SE $\Delta s > 0$, E VERSO LE ASCISSE DECRESCENTI SE $\Delta s < 0$}, QUINDI IL RAPP. INCREMENTALE RISULTA ESSERE SEMPRE ORIENTATO VERSO LE ASCISSE CRESCENTI E QUINDI ANCHE IL SUO LIMITE)

VERSORE NORMALE PRINCIPALE $\underline{n}$

DALLA CONDIZIONE $\boxed{\underline{t} \cdot \underline{t} = 1}$ $\Rightarrow$ $2\,\underline{t} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} = 0$

QUINDI $d\underline{t}/ds$ È NORMALE AL VERSORE $\underline{t}$

DEFINIAMO IL VERSORE NORMALE PRINCIPALE $\underline{n}$ ORIENTATO VERSO LA CONCAVITA' DELLA CURVA IN MODO TALE CHE



$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d\underline{t}}{ds} = c(s)\,\underline{n}}$ $\qquad$ $\boxed{\underline{t} \cdot \underline{n} = 0}$ $\qquad$ $\Rightarrow$ RETRO

1ª FORMULA DI FRENET

DEFINIAMO LA CURVATURA $C(s)$.

$$\frac{d\underline{t}}{ds}\cdot\frac{d\underline{t}}{ds} = (C(s))^2\,\overbrace{\underline{n}\cdot\underline{n}}^{1} \Rightarrow C(s)=\sqrt{\frac{d\underline{t}}{ds}\cdot\frac{d\underline{t}}{ds}}$$

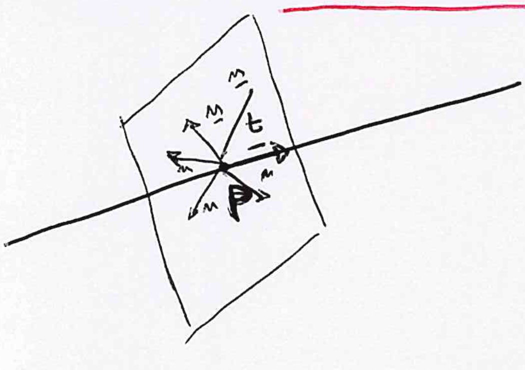
DA CUI: $\underline{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds}\,\underline{e}_\alpha \Rightarrow \frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2}\,\underline{e}_\alpha$

DA CUI: $$\boxed{C(s)=\sqrt{\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}\,\frac{d^2x^\beta}{ds^2}\,\underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\beta}} = \boxed{\sqrt{\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}\,\frac{d^2x^\beta}{ds^2}\,g_{\alpha\beta}}}$$

SE QUINDI $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=0 \Rightarrow C(s)=0$

QUINDI QUANDO NON POSSIAMO DEFINIRE IL "TRIEDRO DI FRENET"

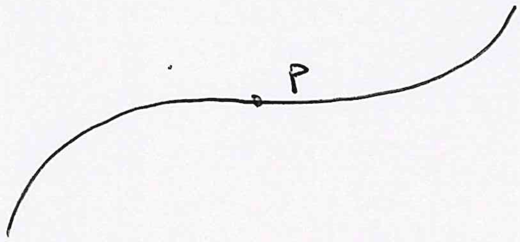
1° CASO) SIA γ UNA RETTA



ALLORA IL VETTORE $\underline{n}$ NON PUO' ESSERE DEFINITO IN MANIERA UNIVOCA.

$C(s)=0$ IN QUANTO $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=0$

2° CASO) SIA P UN PUNTO DI FLESSO DI γ



ALLORA IL PUNTO P ESSENDO UN PUNTO DI FLESSO, E' TALE CHE NON POTRA' DEFINIRSI IN MODO UNIVOCO IL VETTORE $\underline{n}$ IN QUANTO CIO' SARA' LEGATO ALLA "CONCAVITA'" E "CONVESSITA'" DELLA CURVA IN P.

ANCHE IN QUESTO CASO

$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=0$ DA CUI $C(s)=0$

DOVE $c(s)$ = "CURVATURA PRINCIPALE" DELLA CURVA IN P

$c(s) = \dfrac{1}{R(s)}$ ESSENDO $R(s)$ = "RAGGIO DI CURVATURA" IN P

$$\boxed{\frac{d\underline{t}}{ds} = c(s)\,\underline{n} = \frac{1}{R(s)}\,\underline{n}} \qquad \text{CON: } \begin{cases} \underline{t} \cdot \underline{n} = 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 \end{cases}$$

"PIANO OSCULATORE" = PIANO CONTENENTE I VERSORI $\{\underline{t}, \underline{n}\}$.

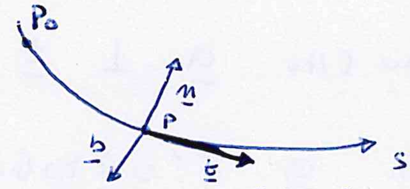
RETRO ⇒

IL RAGGIO DI CURVATURA $R(s)$ È IL RAGGIO DI UNA CIRCONFERENZA CHE APPARTIENE AL PIANO OSCULATORE NEL PUNTO DI CONTATTO P.

VERSORE BINORMALE $\underline{b}$

INTRODUCIAMO UN TERZO VERSORE $\underline{b}$ TALE CHE

$$\boxed{\underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}}$$



IN MODO CHE $\{P, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ COSTITUISCA UNA BASE ORTONORMALE LEVOGIRA, DETTA "TRIEDRO DI FRENET"

DOVE OVVIAMENTE
$$(*) \begin{cases} \underline{b} \cdot \underline{b} = 1 \\ \underline{t} \cdot \underline{b} = 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{b} = 0 \end{cases}$$

DALLA $(*)_1$ DERIVANDO $\Rightarrow$ $2\dfrac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{b} = 0$

DALLA $(*)_2$ DERIVANDO $\Rightarrow$ $\underbrace{\dfrac{d\underline{t}}{ds} \cdot \underline{b}}_{c\,\underline{n}\cdot\underline{b}=0} + \underline{t} \cdot \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \dfrac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{t} = 0$

QUINDI $\dfrac{d\underline{b}}{ds}$ È $\perp$ A $\underline{t}$ e $\underline{b}$, CIOÈ SARÀ DIRETTO COME $\underline{n}$

2ª FORMULA DI FRENET $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n}}$ DOVE $\boxed{\tau(s) = \text{TORSIONE DELLA CURVA IN P}}$

DEF. DEFINIAMO "PIANO OSCULATORE" Σ QUEL PIANO CHE CHE HA CON LA CURVA γ UN PUNTO DI CONTATTO $P \in \gamma$ (ALMENO) DEL II° ORDINE.

SI PROVA CHE I DUE VETTORI $\underline{t}$, $\underline{n} \in \Sigma$

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DI UN PIANO

$$\underline{a} \cdot \underline{r} + d = 0 \iff a_1 x + a_2 y + a_3 z + d = 0$$

ED IMPONIAMO CHE ABBIA IN $P \in \gamma$ UN PUNTO DI CONTATTO (ALMENO) DEL II° ORDINE CIOÈ TALE CHE SE $P \in \gamma$

$$\begin{cases} F(s) = \underline{a} \cdot (P - O) + d = 0 \\ F'(s) = \underline{a} \cdot \dfrac{dP}{ds} = \underline{a} \cdot \underline{t} = 0 \\ F''(s) = \underline{a} \cdot \dfrac{d\underline{t}}{ds} = c(s)\, \underline{a} \cdot \underline{n} = 0 \end{cases} \Leftarrow$$

PIANO CHE HA UN PUNTO $P \in \gamma$ DI CONTATTO (ALMENO) DEL II° ORDINE

SUPPOSTO CHE $c(s) \neq 0$ AVREMO QUINDI CHE $\boxed{\underline{a} \perp \underline{t}}$ ed $\boxed{\underline{a} \perp \underline{n}}$

ALLORA DA QUESTO DEDUCIAMO CHE IL PIANO Σ OSCULATORE CONTIENE I DUE VETTORI $\underline{t}$ ED $\underline{n}$

$\boxed{\text{NOTA}}$: SIANO Q E $\bar{Q}$ DUE PUNTI DI UN PIANO Σ

ALLORA CONSIDERIAMO IL VETTORE $\underline{u} = Q - \bar{Q} \in \Sigma$

DOVENDO Q e $\bar{Q}$ SODDISFARE L'EQUAZIONE DEL PIANO Σ

AVREMO 1) $a_1 x_Q + a_2 y_Q + a_3 z_Q + d = 0$

2) $a_1 x_{\bar{Q}} + a_2 y_{\bar{Q}} + a_3 z_{\bar{Q}} + d = 0$

SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO AVREMO

$$a_1 (x_Q - x_{\bar{Q}}) + a_2 (y_Q - y_{\bar{Q}}) + a_3 (z_Q - z_{\bar{Q}}) = 0$$

CIOÈ $\underline{a} \cdot (Q - \bar{Q}) = 0$ DA CUI $Q - \bar{Q} \perp \underline{a}$

DAL MOMENTO CHE $\underline{t} \perp \underline{a}$ $\underline{n} \perp \underline{a}$ $\Rightarrow$ $\underline{t}, \underline{n}$ SONO CONTENUTI IN Σ.

DEF. "CERCHIO OSCULATORE" LA CIRCONFERENZA CHE APPARTIENE AL PIANO OSCULATORE Σ CHE HA IN $P \in \gamma$ UN PUNTO DI CONTATO (ALMENO) DEL II° ORDINE".

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DI UNA SFERA DI RAGGIO R E CENTRO $Q \in \Sigma$ (DOVE Σ E' IL PIANO OSCULATORE)

$$\left[\underline{z} - (Q-O) \right]^2 = R^2$$

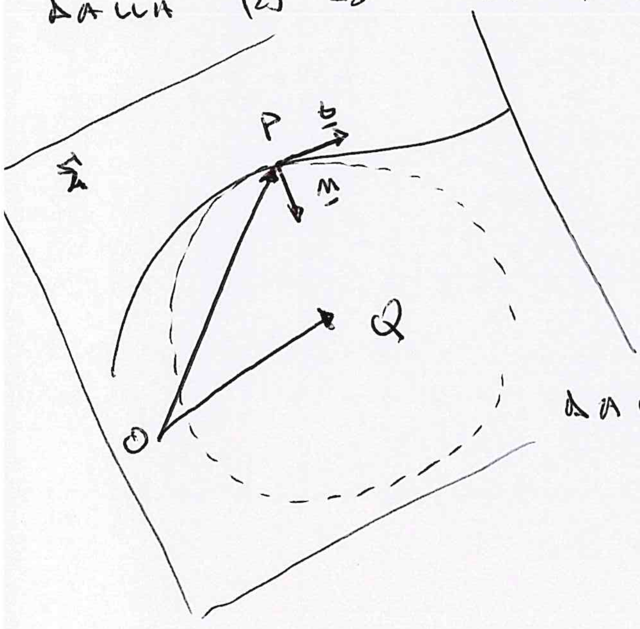
DOVE $\underline{z} = P - O$. IMPONIAMO CHE $P \in \gamma$ SIA UN PUNTO DI CONTATTO (ALMENO) DEL II° ORDINE. PER CUI

$$F(s) = \left[(P-O) - (Q-O) \right]^2 - R^2 = 0$$

DA CUI:
$$\begin{cases} F(s) = (P-Q)^2 - R^2 = 0 & (1) \\ F'(s) = 2(P-Q) \cdot \dfrac{dP}{ds} = 0 & (2) \\ F''(s) = 2 \dfrac{dP}{ds} \cdot \underline{t} + 2(P-Q) \cdot \dfrac{d\underline{t}}{ds} = 0 & (3) \end{cases}$$

DALLA (1) $\Rightarrow$ $|P-Q| = R$

DALLA (2) $\Rightarrow$ $(P-Q) \cdot \underline{t} = 0 \Rightarrow P - Q = R\,\underline{n}$



DALLA (3) OTTENIAMO

$$2\left\{ \overbrace{\underline{t} \cdot \underline{t}}^{1} + \overbrace{(P-Q)}^{-R\underline{n}} \cdot c(s)\,\underline{n} \right\} = 0$$

DA CUI $-R(s)\,c(s)\,\overbrace{\underline{n} \cdot \underline{n}}^{1} + 1 = 0$

$$\Rightarrow c(s) = \frac{1}{R(s)}$$

INFINE ESSENDO:

$$(**)\quad \begin{cases} \underline{n}\cdot\underline{n} = 1 \\ \underline{n}\cdot\underline{t} = 0 \\ \underline{n}\cdot\underline{b} = 0 \end{cases}$$

DERIVANDO LA $(**)_1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{n} = 0$

QUINDI $\dfrac{d\underline{n}}{ds}$ E' $\perp$ AD $\underline{n}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\underline{n}}{ds} = \alpha(s)\,\underline{t} + \beta(s)\,\underline{b}$ (0)

MA UTILIZZANDO LA $(**)_2$

$$\frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{t} + \underbrace{\underline{n}\cdot\frac{d\underline{t}}{ds}}_{\underline{n}\,\cdot\,c(s)\,\underline{n}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{t} = -c(s) \qquad (1)$$

UTILIZZANDO LA $(**)_3$

$$\frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{b} + \underbrace{n\cdot\frac{d\underline{b}}{ds}}_{\underline{n}\,\cdot\,\tau(s)\,\underline{n}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{b} = -\tau(s) \qquad (2)$$

DA CUI CONFRONTANDO (1) CON (0) MOLTIPLICATA PER $\underline{t}$

$$\frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{t} = \alpha(s) = -c(s)$$

ANALOGAMENTE CONFRONTANDO LA (2) CON LA (0) MOLTIPLICATA PER $\underline{b}$

$$\frac{d\underline{n}}{ds}\cdot\underline{b} = \beta(s) = -\tau(s)$$

DA CUI

$$\boxed{\frac{d\underline{n}}{ds} = -c(s)\,\underline{t} - \tau(s)\,\underline{b}}$$

DA CUI

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{t}}{ds} = c(s)\,\underline{n} = \dfrac{1}{R(s)}\,\underline{n} \\[2ex] \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n} \\ d\underline{n}/ds = -c(s)\,\underline{t} - \tau(s)\,\underline{b} \end{cases}$$

"<u>FORMULE DI FRENET</u>"